Une inégalité de Hardy

a. À chaque fonction f continue à support compact dans $]0,+\infty[$ on associe la fonction $\mathrm{H}f$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad (\mathrm{H}f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que $\mathrm{H}f$ est dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.

b. À chaque fonction $g \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ on associe la fonction $\mathrm{U}g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{U}g)(u) = \mathrm{e}^{u/2}\, g(\mathrm{e}^u).$$

Montrer que $\mathrm{U}g$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$; montrer que U est une isométrie de $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

c. Exprimer la fonction $\mathrm{U}(\mathrm{H}f)$ à partir de la fonction $\mathrm{U}f$ par une convolution sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$\|\mathrm{H}f\|_{\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)} \le 2\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)},$$

et qu'on peut prolonger H en opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$, tel que $\|\mathrm{H}\| \le 2$.

d. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on considère la fonction g_ε définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad g_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_{[\varepsilon,\varepsilon^{-1}]}(x)\,\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vérifier que g_ε est un élément de $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$. Calculer $\mathrm{H}g_\varepsilon$. Comparer les normes de g_ε et $\mathrm{H}g_\varepsilon$ dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$, et en déduire que

$$\|\mathrm{H}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)} = 2$$

(on pourra aussi évaluer $\|2g_\varepsilon - \mathrm{H}g_\varepsilon\|$, et comparer à la grandeur de $\|g_\varepsilon\|$).

Commentaire. Dans cet exercice, on a démontré l'inégalité de Hardy suivante : pour toute fonction f de carré intégrable sur $]0,+\infty[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \Bigl|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr|^2 \mathrm{d}x \le 4\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Il existe plusieurs preuves de cette inégalité, qui en général ne passent pas par l'étude d'une convolution. Mais on peut remarquer qu'on a utilisé implicitement l'isomorphisme de groupe entre $\mathbb{R}_+^*$ multiplicatif, muni de la mesure $\mathrm{d}x/x$, invariante par homothétie, et $\mathbb{R}$ additif, muni de la mesure de Lebesgue, invariante par translation. Dans cette optique, on peut décoder certaines des preuves sans convolution comme étant l'étude des propriétés de la convolution « multiplicative » :

$$k(x) = \int_0^{+\infty} f(x/t)\,g(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Pour tout $p > 1$ on montre de même que

$$\int_0^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr)^p \mathrm{d}x \le \Bigl(\frac{p}{p-1}\Bigr)^p \int_0^{+\infty} |f(t)|^p\,\mathrm{d}t.$$