Exercice 1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts. Montrer qu'on peut supposer que ces intervalles sont deux à deux disjoints.

Exercice 2. On dira qu'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est *discret* dans $\mathbb{R}$ si pour tout réel y, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}$ contenant y et qui contient au plus un point de D. Montrer que si D est discret, il est fermé et au plus dénombrable.

Exercice 3 : « *algorithme de Borel* ». On donne une suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geq 0}$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ qui couvrent $[0,1]$. On pose $x_0 = 0$ et on désigne par n_0 le premier entier tel que $x_0 \in \mathrm{I}_{n_0}$; si x_k, n_k sont définis, on désigne par x_{k+1} l'extrémité de I_{n_k} et dans le cas $x_{k+1} \leq 1$, on désigne par n_{k+1} le premier entier n tel que I_n contienne x_{k+1}. Montrer qu'il existe un entier k tel que $[0,1]$ soit la réunion de $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_{n_k}$. *Indication* : par l'absurde, on considérera la limite x de la suite croissante (x_n) et l'hypothèse de recouvrement.

Exercice 4. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

est (simplement) convergente et que sa valeur est égale à celle de l'intégrale absolument convergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5. Démontrer ce cas élémentaire du théorème de convergence dominée : si $\sum |v_n| < +\infty$, si $|u_{n,k}| \leq |v_n|$ pour tous n, k et si $u_n = \lim_k u_{n,k}$ pour tout n, alors

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n = \lim_k \sum_{n\geqslant 0} u_{n,k}.$$

Démontrer le théorème dit *de Mertens* : si $\sum |a_n| < +\infty$ et si la série $\sum b_n$ est convergente (simplement), alors la *série produit* $\sum c_n$ de terme général $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Bigr)\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Bigr).$$

(*Indication* : exprimer les sommes partielles de la série produit au moyen des a_j et des sommes partielles de la série $\sum b_n$, et appliquer ce qui précède). Montrer que le théorème ne subsiste pas si on suppose seulement que les deux séries sont simplement convergentes.

Exercice 6. On désigne par α un paramètre réel, et pour chaque entier $n \geq 1$ on pose $u_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}/n^\alpha$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. On se propose d'étudier la série numérique $\sum u_n$.

Pour chaque entier $k \geq 1$ on pose

$$\mathrm{S}_k = \sum_{k^2 \leqslant n < (k+1)^2} \frac{1}{n^\alpha}.$$

a. Vérifier que la série $\sum u_n$ converge lorsque $\alpha > 1$.

b. Vérifier que

$$\sum_{1\leqslant n<(k+1)^2} u_n = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j\, \mathrm{S}_j .$$

c. On suppose ici que $\alpha \leq 1/2$. Montrer que $\mathrm{S}_k \geq 1$; conclure dans ce cas.

d. On suppose maintenant que $1/2 < \alpha$. Montrer que

$$\frac{2}{(k+1)^{2\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{2\alpha}} \leq \mathrm{S}_k \leq \frac{2}{k^{2\alpha-1}} + \frac{1}{k^{2\alpha}} .$$

En déduire la convergence de la série $\sum (-1)^k\, \mathrm{S}_k$. En plaçant un entier $n \geq 1$ quelconque entre deux carrés successifs k^2 et $(k+1)^2$, conclure l'étude des sommes partielles $\sum_{j=1}^{n} u_j$ dans ce cas.

Exercice 7.

a. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$; montrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\Big| f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t \Big| \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

b. On suppose que $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$; montrer alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8. Si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$, où I est quelconque, la notation $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ désignera la borne supérieure des sommes finies $\sum_{i\in\mathrm{J}} u_i$, pour J fini contenu dans I ; cette borne supérieure est un élément de $[0, +\infty]$, valeur $+\infty$ admise.

a. Si $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est une partition de I, montrer que $\sum_{\alpha\in\mathrm{A}} \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}_\alpha} u_i \Big) = \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$.

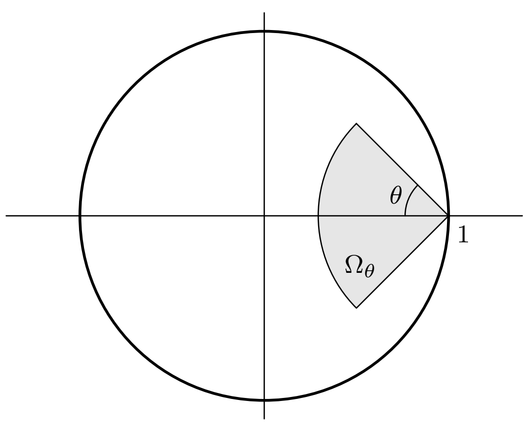
b. Si I est dénombrable et si $(i_n)_{n\geqslant 0}$ est une énumération de I, montrer que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n} .$$

c. Si la somme $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$ n'est pas égale à $+\infty$, montrer que le sous-ensemble I_0 de I formé des indices i tels que $u_i > 0$ est fini ou dénombrable.

Exercice 9. Pour $0 < \theta < \pi/2$ on considère la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\Omega_\theta = \{ z \in \mathbb{C} : |\arg(1-z)| < \theta,\ |1-z| < \cos\theta \} \qquad (\text{argument dans }]-\pi, \pi])$$



a. Montrer que Ω_θ est contenu dans le disque unité, et plus précisément

$$|z|^2 < 1 - |1 - z| \cos\theta$$

pour tout $z \in \Omega_\theta$.

b. On suppose que $\sum a_n$ est une série convergente à termes complexes, et on pose pour $|z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Évaluer $f(z) - \mathrm{S}$ en introduisant les restes $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ (transformation d'Abel). Borner la quantité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z^n - z^{n+1}|$$

lorsque $z \in \Omega_\theta$ et en déduire que $f(z)$ tend vers S quand z tend vers 1 par valeurs dans le domaine Ω_θ.

c. Si les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ sont convergentes ainsi que la série produit $\sum c_n$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Exercice 10. Montrer que pour tout borélien A de $[0, 1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ tel que $\lambda(\mathrm{A} \setminus \mathrm{K}) < \varepsilon$ (on note λ la mesure de Lebesgue).
Indication : montrer que la famille des sous-ensembles B de $[0, 1]$ qui ont la propriété suivante : *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* K_ε *et un ouvert* V_ε *tels que* $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{V}_\varepsilon$ *et* $\lambda(\mathrm{V}_\varepsilon \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$, est une tribu de parties de $[0, 1]$ qui contient les intervalles.

Exercice 11. Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$; montrer que la fonction

$$x \to \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

convenablement prolongée en 0, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Indication : écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, et transformer l'expression du reste intégral pour ramener à une intégrale sur $[0, 1]$.

Exercice 12 : *formule d'Euler-MacLaurin.* On considère la suite de polynômes (P_n) définie par

$$\mathrm{P}_0 = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{P}'_{n+1} = -\mathrm{P}_n, \quad \int_0^1 \mathrm{P}_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout entier $n \geq 0$. Déterminer P_1 et P_2 ; vérifier que $\mathrm{B}_n = (-1)^n n!\,\mathrm{P}_n$ est unitaire de degré n (*polynôme de Bernoulli*). Vérifier que $\mathrm{P}_k(1) = \mathrm{P}_k(0)$ pour tout $k \geq 2$.

a. Si f est de classe C^{n+1} sur $[0, 1]$ et $n \geq 1$, montrer que

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) = {} & \frac{f'(0) + f'(1)}{2} - \sum_{2 \leq k \leq n} \mathrm{P}_k(0)\big(f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0)\big) \\ & + \int_0^1 \mathrm{P}_n(t) f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1}$$

b. En appliquant la formule (1) à la fonction $x \to \mathrm{e}^{\lambda x}$, montrer que le DL au voisinage de $\lambda = 0$ de la fonction $\lambda \to \lambda/(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$ est donné à tout ordre n par

$$\frac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda}}{\mathrm{e}^{\lambda}-1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_k(0)\lambda^k + \mathrm{O}(\lambda^{n+1}).$$

Montrer que la fonction $\lambda \to \lambda/(1-\mathrm{e}^{-\lambda}) - \lambda/2$ est paire. En déduire que $\mathrm{P}_{2k+1}(0) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

c. Récrire la formule (1) avec les polynômes de Bernoulli B_n et les nombres de Bernoulli $b_n = \mathrm{B}_n(0)$, en tenant compte de la remarque précédente.

d. Désignons par B_n^* la fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est égale à $x \to \mathrm{B}_n(x)$ quand $0 \leq x < 1$. Si f est de classe C^{2n+1} sur l'intervalle $[p,q]$, avec $p < q$ entiers et $n \geq 1$, montrer que

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) = {} & \frac{f'(p)}{2} + f'(p+1) + \cdots + f'(q-1) + \frac{f'(q)}{2} \\ & - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k)}(q) - f^{(2k)}(p)\right) + \int_p^q \frac{\mathrm{B}_{2n}^*(t)}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 13 : *un théorème de Borel.* Pour les besoins de l'exercice, on appellera *série de fonctions de type* (B) toute série de fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$(\beta) \qquad\qquad x \in \mathbb{R} \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\,\theta(b_n x)$$

où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres réels ou complexes, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels > 1 telle que $\ln(1+|a_n|) = \mathrm{O}(\ln b_n)$ quand $n \to +\infty$, et où θ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1,1]$.

a. Montrer que toute série de type (B) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. *Indication :* on notera que pour borner uniformément $x^n\theta(b_n x)$, seuls comptent les x tels que $|x| \leq 1/b_n$.

b. On suppose de plus que la fonction θ précédente est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; montrer que la fonction f définie par la somme de la série (β),

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\,\theta(b_n x)$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée peut se calculer par dérivation terme à terme.

Indication : on notera que la série dérivée de la série (β) s'exprime comme la somme de deux séries qui sont encore de type (B).

c. En déduire par récurrence que si θ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que ses dérivées peuvent se calculer par dérivations terme à terme successives.

d. On suppose de plus, pour finir, que θ est C^∞ et égale à 1 dans un voisinage de 0. Montrer que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \geq 0$.

e. Étant donnée une suite numérique (a_n) quelconque, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui admet ces nombres comme dérivées successives au point 0 (c'est un théorème de Borel).

Exercice 14 : *distance de Hausdorff.* Soient (X, d) un espace métrique non vide et x_0 un point fixé dans X ; on désignera par $\mathcal{F}_b$ l'ensemble des fermés F non vides de X qui sont *bornés pour la distance d*, c'est-à-dire tels que $\sup_{y \in \mathrm{F}} d(y, x_0) < +\infty$. À chaque fermé $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_b$ on associe la fonction φ_A définie sur X par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi_\mathrm{A}(x) = d(x, \mathrm{A}) - d(x, x_0) = \inf\{d(x, a) - d(x, x_0) : a \in \mathrm{A}\}.$$

a. Vérifier que φ_A est bornée sur X. Montrer que pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}_b$ on a

$$\|\varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B}\|_\infty = \max\bigl(\sup\{d(a, \mathrm{B}) : a \in \mathrm{A}\}, \sup\{d(b, \mathrm{A}) : b \in \mathrm{B}\}\bigr).$$

En déduire que la quantité précédente, qu'on notera $h(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, est une distance sur l'ensemble $\mathcal{F}_b$ (c'est la *distance de Hausdorff* entre sous-ensembles fermés).

b. On suppose que (X, d) est complet ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est complet pour la distance de Hausdorff.

Indication : considérer une suite de Cauchy (A_k) telle que $h(\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_{k+1}) < 2^{-k-1}$ pour tout $k \geq 0$, et l'ensemble A des points $a \in \mathrm{X}$ qui sont limite d'une suite (a_k) avec $a_k \in \mathrm{A}_k$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que tout point $a_k \in \mathrm{A}_k$ est à distance $< 2^{-k}$ d'un point de A, et que tout point $a \in \mathrm{A}$ est à distance $< 2^{-k} + \varepsilon$ d'un point de A_k, pour tout $\varepsilon > 0$.

c. On suppose que (X, d) est compact ; montrer que $\mathcal{F}_b$ est compact pour la distance de Hausdorff.

d. On considère les deux applications g_0, g_1 de $[0, 1]$ dans lui-même définies par $g_0(x) = x/3$ et $g_1(x) = (2 + x)/3$. Sur l'ensemble X des fermés non vides de $[0, 1]$, muni de la distance de Hausdorff, on définit la transformation T qui associe à $\mathrm{F} \in \mathrm{X}$ l'ensemble

$$\mathrm{T}(\mathrm{F}) = g_0(\mathrm{F}) \cup g_1(\mathrm{F}).$$

Montrer que T est contractante de rapport 1/3 sur X. Son (unique) point fixe est l'ensemble triadique de Cantor Δ. Montrer que Δ est de mesure nulle.

Exercice 15.

a. Montrer qu'il existe une unique fonction f_0 *croissante* (au sens large) sur $[0, 1]$ qui vérifie les conditions

$$f_0(x) + f_0(1 - x) = 1, \quad f_0(x/3) = f_0(x)/2$$

pour tout $x \in [0, 1]$ (noter que $f_0(0) = 0$; calculer $f_0(1)$, $f_0(1/3)$, $f_0(2/3)$, etc.).

b. On considère l'ensemble C des fonctions f continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, muni de la distance de la convergence uniforme. Vérifier que C est complet.

À chaque fonction $f \in \mathrm{C}$ on associe la fonction $\mathrm{T}(f)$ définie sur $[0, 1]$ par

$$\mathrm{T}(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} f(3x), & 0 \leq x \leq 1/3\,; \\ \dfrac{1}{2}, & 1/3 \leq x \leq 2/3\,; \\ \dfrac{1}{2}\bigl(1 + f(3x - 2)\bigr), & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que T est une application de C dans C, contractante.

c. Vérifier que la fonction f_0 de la question *a* est le point fixe de T. Montrer que f_0 est constante au voisinage de chaque point du complémentaire de l'ensemble triadique de Cantor Δ (elle admet donc une dérivée nulle presque partout).

Exercice 16 : *fonctions à variation bornée.* On considère une fonction F réelle continue sur $\mathbb{R}$. Pour toute suite finie ordonnée $\pi = (x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ de points de $\mathbb{R}$, on posera

$$\mathrm{V}_0(\mathrm{F}, \pi) = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{F}(x_j) - \mathrm{F}(x_{j-1})| \,; \quad [\pi] = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

On dit que F est à variation bornée si

$$\sup_{\pi} \mathrm{V}_0(\mathrm{F}, \pi) < +\infty.$$

a. On suppose désormais que F est continue à variation bornée ; si $a < b$, on désignera par $\mathrm{V}(\mathrm{F}, a, b)$ la variation de F sur $[a, b]$,

$$\mathrm{V}(\mathrm{F}, a, b) = \sup\{\mathrm{V}_0(\mathrm{F}, \pi) : [\pi] \subset [a, b]\}.$$

Vérifier que $\mathrm{V}(\mathrm{F}, a, b)$ est aussi égal au sup sur les suites π telles que $[\pi] \subset]a, b[$. Montrer que pour tout x, les variations $\mathrm{V}(\mathrm{F}, x, x+h)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{F}, x-h, x)$ tendent vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs > 0.

b. Montrer que $x \to \mathrm{V}(\mathrm{F}, 0, x)$ est croissante et continue sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction $x \to \mathrm{V}(\mathrm{F}, 0, x) - \mathrm{F}(x)$ est croissante.

Conclure : *toute fonction continue à variation bornée sur* $\mathbb{R}$ *est différence de deux fonctions croissantes continues.*

c. On suppose que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vérifier que $\mathrm{V}_0(\mathrm{F}, \pi) \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour toute suite π. Montrer que pour tous $a < b$, on a l'égalité

$$\mathrm{V}(\mathrm{F}, a, b) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Indication : utiliser la densité dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ des fonctions en escalier.