Intégration et distributions

Exercice 1. On suppose que f est une fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$, et dérivable en presque tout point de $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que f' est une fonction Lebesgue-mesurable (définie presque partout) ; montrer que pour tous $a < b$, on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \le f(b) - f(a)$$

(on pourra se contenter du cas un peu plus simple où f est aussi supposée continue).

Connaissez-vous un exemple pour lequel l'inégalité est stricte ?

Remarque : d'après un théorème de Lebesgue, toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est dérivable presque partout : l'hypothèse de dérivabilité donnée dans l'exercice est en fait automatiquement satisfaite.

Exercice 2. Si f et g sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

(avec les conventions de l'intégrale de Riemann quand $x < 0$). Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}\,\mathrm{G}\big]_a^b - \int_a^b f(t)\mathrm{G}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est la dérivée de F au sens des distributions.

Réciproquement, montrer que si la fonction h localement intégrable sur $\mathbb{R}$ est la dérivée distribution de la fonction H continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{H}(b) - \mathrm{H}(a).$$

Indication : introduire des fonctions test de la forme $\varphi_n = \mathbf{1}_{(a,b)} * \psi_n$ où $(\psi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité dont les longueurs des supports tendent vers 0.

Espaces de Hilbert

Exercice 3 : *déterminants de Gram.* Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que la distance de x_{n+1} au sous-espace F est donnée par la formule

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n}}\,.$$

Exercice 4 : *la base de Haar pour* $L^2(0,1)$.

a. Pour chaque entier $N \geq 0$ on considère le sous-espace V_N de $L^2(0,1)$ engendré par les indicatrices

$$\mathbf{1}_{(k2^{-N},(k+1)2^{-N})}, \qquad 0 \leq k < 2^N.$$

Montrer que la réunion des V_N, $N \geq 0$, est dense dans $L^2(0,1)$.

b. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0,1/2[$, $\varphi(x) = -1$ si $x \in [1/2,1[$, et φ nulle ailleurs sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 0$ et $j = 0,\ldots,2^n-1$, on pose

$$\forall x \in [0,1[, \quad h_{n,j}(x) = 2^{n/2}\varphi(2^n x - j).$$

Montrer que la famille de fonctions formée de $\mathbf{1}$ et de toutes les fonctions $h_{n,j}$, $n \geq 0$ et $j = 0,\ldots,2^n-1$, est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.

Indication : après avoir démontré le caractère orthonormé, vérifier que $\mathbf{1}$ et les $h_{n,j}$, pour $0 \leq n < N$ et $j = 0,\ldots,2^n-1$, sont dans V_N ; quel est leur nombre ?

Exercice 5. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = 1$ sur $[2k, 2k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\varphi(x) = -1$ sinon ; on pose ensuite pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1[$

$$\varepsilon_n(x) = \varphi(2^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\mathbf{1}_{[2k,2k+1[} - \mathbf{1}_{[2k+1,2k+2[}\big)(2^n x).$$

a. Montrer que si $0 \leq m < n$ et $0 \leq k < 2^m$, on a

$$\int_{k2^{-m}}^{(k+1)2^{-m}} \varepsilon_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En déduire que pour tous $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_p$, on a

$$\int_0^1 \Big(\prod_{j=1}^{p} \varepsilon_{n_j}(t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

b. Pour tout ensemble fini $A \subset \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \in [0,1[, \quad w_A(x) = \prod_{j \in A} \varepsilon_j(x)$$

(sans oublier l'ensemble vide, pour lequel $w_\emptyset = \mathbf{1}$). Montrer que la famille de toutes les fonctions (w_A) est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$ (base de WALSH).

Hilbert et transformation de Fourier

Exercice 6. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de la convolée $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Si g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, si g et g' sont dans $L^2(\mathbb{R})$, montrer que $(\mathcal{F}g')(y) = \mathrm{i}y(\mathcal{F}g)(y)$, et

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} (1+y^2)\,|(\mathcal{F}g)(y)|^2\,\mathrm{d}y < \infty.$$

Généraliser au cas où $g' \in L^2(\mathbb{R})$ est la dérivée de $g \in L^2(\mathbb{R})$ au sens des distributions.

Étudier la réciproque : si $g \in L^2(\mathbb{R})$ vérifie $(*)$, que peut-on en déduire ?

Exercice 7 : *base de Shannon sur $\mathbb{R}$.*

a. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on considère l'intervalle $\mathrm{I}_n = (2n-1, 2n+1)$. Montrer que le système des fonctions

$$f_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathbf{1}_{\mathrm{I}_n}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi k x}, \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

b. Expliciter la base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ obtenue par transformation de Fourier.

c. On considère le sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions dont la transformée de Fourier est nulle en dehors de $[-1, 1]$. Déduire de la question précédente une base hilbertienne pour ce sous-espace.

Exercice 8 : *transformation de Hilbert.*

a. Pour tout $\varepsilon > 0$ on considère la fonction f_ε définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{1}_{|x|>\varepsilon}}{\pi x}.$$

Vérifier que f_ε est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier.

b. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la convolution $g * f_\varepsilon$ tend vers une limite $\mathrm{H}g$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ quand $\varepsilon \to 0$. Montrer que H définit une application linéaire continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, isométrique ; déterminer son carré H^2.

c. Montrer que si θ est à support compact, paire, égale à 1 dans un voisinage de 0, on a pour toute φ fonction C^1 à support compact et tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathrm{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{\pi y}\, \mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{\pi y}\, \mathrm{d}y.$$

Séries de Fourier

Exercice 9. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}^1(0, 2\pi)$ sont égales dans un intervalle non vide $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, montrer que $\lim_n \big((\mathrm{S}_n f)(s) - (\mathrm{S}_n g)(s)\big) = 0$ (principe de localisation).

Exercice 10. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin \mathbb{Z}$, et on désigne par f_a l'unique fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

Exercice 11 : *une application géométrique.*

a. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction 2π-périodique g qui est égale à $\mathbf{1}_{[0,\pi]} - \mathbf{1}_{[-\pi,0]}$ sur $[-\pi, \pi[$.

b. On considère le sous-ensemble borné A de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{A} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le f(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

où f est une fonction continue 2π-périodique > 0. Si $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, exprimer par une intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta k(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ la surface de la partie de A correspondant aux points $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tels que $0 \le r \le f(\theta)$ et $\alpha \le \theta \le \beta$.

c. On suppose maintenant que A possède la propriété suivante : toute droite passant par le point 0 découpe A en deux parties de même surface. Exprimer les coefficients de Fourier de la convolution périodique $k * g$ et évaluer $k * g$. Montrer que l'ensemble A est symétrique par rapport à l'origine (autrement dit, la fonction f vérifie $f(\theta) = f(\theta + \pi)$).

Exercice 12. Si une fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 1/2$, c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{M}\, |x - y|^{\alpha},$$

montrer que ses coefficients de Fourier sont absolument sommables.

Indication : considérer pour t fixé dans $(0, 2\pi)$ la fonction $g_t(x) = (f(x-t) - f(x))/t^{\alpha}$; lui appliquer l'égalité de Bessel-Parseval, puis intégrer par rapport à $\mathrm{d}t/t^{\beta}$ le résultat obtenu, avec $0 < \beta < 1$. En déduire d'abord que $\sum |n|^{2\alpha-\varepsilon}\, |c_n(f)|^2 < +\infty$, pour $\varepsilon > 0$.

Exercice 13 : *équirépartition modulo* 1. Soient k un nombre entier et $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel ; déterminer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, kj\alpha}\,.$$

On considère une fonction f continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Démontrer le même résultat lorsque f est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ (en particulier si f est une indicatrice d'intervalle).

Généraliser aux sommes $n^{-2} \sum_{j,k=1}^{n} g(j\alpha, k\beta)$, dans le cas d'un couple (α, β) et d'une fonction g continue de deux variables telle que $g(x+1, y) = g(x, y+1) = g(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 14. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit le polynôme trigonométrique p_n de degré $n-1$ par

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1}.$$

a. On pose $\mathrm{P}_n = \overline{p_n} p_n$; vérifier que P_n est un polynôme trigonométrique de degré $< n$, à valeurs réelles ≥ 0, et calculer ses coefficients.

b. On pose $\mathrm{Q}_n = \mathrm{P}_n^2$. Vérifier que Q_n est une fonction réelle ≥ 0, et un polynôme trigonométrique de degré $< 2n$. Montrer que

$$\mathrm{I}_n := \int_0^{2\pi} \mathrm{Q}_n(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n^2 = \frac{2n^3 + n}{3}.$$

c. On pose $\mathrm{J}_n = \mathrm{I}_n^{-1} \mathrm{Q}_n$; montrer que pour tout t tel que $|t| \leq \pi$, on a

$$\mathrm{J}_n(t) \leq \frac{3\pi^4}{2n^3 t^4}.$$

d. À chaque fonction f continue et 2π-périodique on associe la suite de fonctions (f_n), obtenue par *convolution périodique* de f avec les (J_n), et qui est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\, \mathrm{J}_n(t)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

Montrer que f_n est un polynôme trigonométrique de degré $< 2n$. Montrer que

$$(*) \qquad \|f - f_n\|_\infty \le 2\,\omega_f\Big(\frac{\pi}{n}\Big),$$

où

$$\delta > 0 \to \omega_f(\delta) = \max\big\{|f(y) - f(x)| : |y - x| \le \delta\big\}$$

est le module de continuité ω_f de f. L'inégalité $(*)$ est une version d'un théorème d'approximation de Dunham JACKSON, mathématicien américain, 1888–1946.

Indication : pour majorer l'intégrale

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\,\mathrm{J}_n(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi},$$

on montrera la majoration

$$\big|f(x-t) - f(x)\big| \le \Big(\big[|t|/\delta\big] + 1\Big)\,\omega_f(\delta),$$

où $\big[|t|/\delta\big]$ désigne la partie entière de $|t|/\delta$ (qui est nulle quand $|t| < \delta$).

Exercice 15 : convergence uniforme des séries de Fourier.

a. Montrer que pour tout entier $n \ge 0$, le noyau de Dirichlet D_n vérifie

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{D}_n(t)|\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(nt + t/2)|}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t \le 1 + \ln(2n+1).$$

Indication : découper l'intervalle en $[0, \varepsilon]$ et $[\varepsilon, \pi]$, pour un $\varepsilon > 0$ bien choisi.

b. Déduire de l'exercice précédent le résultat suivant : *si f est une fonction continue et 2π-périodique telle que $\lim_n \big(\ln(n)\,\omega_f(1/n)\big) = 0$, alors la suite des fonctions $(\mathrm{S}_n f)$ converge uniformément vers f.*

Indication : on approche f par le polynôme trigonométrique f_n de l'exercice précédent ; on remarque que $\mathrm{S}_{2n} f = f * \mathrm{D}_{2n}$ et $f_n = f_n * \mathrm{D}_{2n}$ (convolutions périodiques).

Exercice 16. *Dans cet exercice, on ne suppose pas connue la théorie des séries de Fourier ; au contraire, il s'agit de proposer une preuve un peu différente pour la densité des polynômes trigonométriques. L'étudiant attentif pourra y voir une variante d'une démonstration courante du théorème de Dirichlet (qui lui aussi, implique la densité des polynômes trigonométriques).*

a. On désigne par X l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathrm{X}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)$ converge absolument ; on peut donc poser

$$\ell(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,;$$

vérifier que ℓ est linéaire sur X.

b. Si $\psi \in \mathrm{X}$ et si on définit φ par $\varphi(x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1)\,\psi(x)$, montrer que $\ell(\varphi) = 0$.

c. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que la fonction ψ définie pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ par

$$\varphi(x) = \varphi(0) + (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} - 1)\,\psi(x)$$

se prolonge en un élément $\psi \in \mathrm{X}$.

d. Si φ est 2π-périodique de classe C^3, montrer que

$$\varphi(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi), \quad \text{puis} \quad \varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme uniforme.

Exercice 17 : *contre-exemple de Fejér*. Pour chaque entier $k \geq 1$ définissons une fonction f_k continue, paire et 2π-périodique en posant

$$f_k(x) = \bigl|\sin(kx + x/2)\bigr|$$

lorsque $|x| \leq \pi$. Montrer que si $\ell \neq k$,

$$(\mathrm{S}_\ell f_k)(0) = (\mathrm{S}_k f_\ell)(0).$$

Si $2k \leq \ell$, montrer que pour $n \leq k$ on a

$$|c_n(f_\ell)| \leq \frac{4}{(2k+1)\pi} \quad \text{donc} \quad |(\mathrm{S}_k f_\ell)(0)| \leq \frac{4}{\pi}.$$

Montrer qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $(\mathrm{S}_\ell f_\ell)(0) \geq \kappa \ln \ell$ pour tout $\ell \geq 1$, et conclure que $(\mathrm{S}_n f)(0)$ ne converge pas pour la fonction f continue de *l'exemple de Fejér*

$$f = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{f_{2^{p^3}}}{p^2}.$$

Exercice 18. Déterminer les racines du polynôme

$$\mathrm{P}_{n-1} = \frac{1}{n}\bigl(\mathrm{X}^n - (\mathrm{X}-1)^n\bigr) = \mathrm{X}^{n-1} - \frac{n-1}{2}\,\mathrm{X}^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{6}\,\mathrm{X}^{n-3} + \cdots$$

puis calculer la somme $\sigma_2(n)$ des carrés des racines grâce aux relations entre coefficients et racines. En comparant les deux expressions trouvées pour $n^{-2}\sigma_2(n)$, quand $n \to +\infty$, déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$