Fourier

Exercice 1 : *théorème de Fejér sur* $\mathbb{R}$.

a. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction paire F sur $\mathbb{R}$ qui vaut

$$\mathrm{F}(x) = (2-x)/4 \ \text{ si } \ 0 \le x \le 2, \qquad \mathrm{F}(x) = 0 \ \text{ si } \ x \ge 2.$$

b. On pose

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\Bigl(\frac{\sin x}{x}\Bigr)^2,$$

et $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tout entier $n \ge 1$. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, exprimer la transformée de Fourier de $f * \varphi_n$ à partir de celle de f.

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose pour tout entier $n \ge 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2n}^{2n} \widehat{f}(y)\Bigl(1 - \frac{|y|}{2n}\Bigr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

c. Montrer que si f est bornée, intégrable sur $\mathbb{R}$ et continue au point x_0, on a

$$f(x_0) = \lim_n f_n(x_0).$$

d. Montrer que si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$, la suite (f_n) converge vers f dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ (c'est un analogue du théorème de Fejér pour les séries de Fourier).

Holomorphie

Exercice 2. On fixe x tel que $0 < x < \pi$; calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

à partir de la détermination du logarithme complexe sur l'ouvert étoilé

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\},$$

qui est donnée par $\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n$ quand $|z| < 1$.

Indication : on rappelle que pour cette détermination, si $\rho > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, alors $\ln(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln\rho + \mathrm{i}\theta$; appliquer à $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, avec $0 < r < 1$, r tendant vers 1.

Exercice 3. On suppose que f est une fonction entière, définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

et qu'il existe un réel $\mathrm{K} \ge 0$ et une constante M tels que f admette la majoration

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \bigl|\mathrm{Re}\, f(z)\bigr| \le \mathrm{M}\bigl(1 + |z|^{\mathrm{K}}\bigr).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\le \mathrm{K}$ (variante du *théorème de Liouville*).

Indication : considérer pour tout $r > 0$ la fonction périodique $g_r(\theta) = \mathrm{Re}\, f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, de carré intégrable sur chaque période.

Réfléchir au cas plus délicat suivant : que peut-on dire si on suppose seulement que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, f(z) \le \mathrm{M}\bigl(1 + |z|^{\mathrm{K}}\bigr)?$$

Exercice 4.
a. On désigne par U le disque unité ouvert du plan complexe. Soit f une fonction holomorphe de U dans U ; utiliser la série de Taylor de f en 0 et la théorie des séries de Fourier pour montrer que : on a $|f'(0)| \le 1$, et si $|f'(0)| = 1$, alors il existe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$ (le lecteur aura reconnu le très classique *lemme de Schwarz*, sous un habillage à peine moins classique).

b. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{U}$, la fonction φ_a définie par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \qquad \varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

est une bijection de U sur U. Déterminer la bijection réciproque.

c. Déduire des questions précédentes que toute bijection f holomorphe de U sur U est de la forme $\lambda\varphi_a$, pour un certain $a \in \mathrm{U}$ et λ de module 1.

Indication : poser $a = f(0)$ et considérer $\varphi_a \circ f$.

Exercice 5. On suppose que $b > 0$ est donné, que f est une fonction holomorphe dans la bande $\mathrm{S}_b = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < b\}$, que $f(z+2\pi) = f(z)$ pour tout $z \in \mathrm{S}_b$ et que la fonction

$$f_y : x \in [-\pi, \pi] \to f_y(x) = f(x + \mathrm{i}y)$$

converge dans $\mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$ vers des limites f_b et f_{-b} quand $y \nearrow b$ ou bien $y \searrow -b$.

Montrer qu'il existe des coefficients a_n, $n \in \mathbb{Z}$, tels que

$$\forall z \in \mathrm{S}_b, \qquad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nz}$$

avec

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \,\mathrm{e}^{2|n|b} < +\infty.$$

Réciproque ?

Exercice 6. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$; calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$$

en utilisant l'holomorphie et un contour adapté (on fera apparaître la fonction Γ en introduisant la demi-droite imaginaire $\mathbb{R}_+ \,\mathrm{i}$).

Exercice 7. On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, borné ou non, et une mesure μ sur I, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = w(x)\,\mathrm{d}x$, où w est une fonction > 0 sur I, mesurable à valeurs finies. On suppose qu'il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{\alpha|x|} \; w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

a. Montrer que l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ contient toutes les fonctions polynomiales. Montrer que le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ (on rappelle qu'il en résulte, par Gram-Schmidt, l'existence d'une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ formée de polynômes orthogonaux).

Indication : si $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \mu)$ est orthogonale à tous les polynômes, montrer que la fonction holomorphe g définie pour $|\operatorname{Re} z| < \alpha/2$ par

$$g(z) = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{zx}\, f(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x$$

est nulle ; en déduire que $\widehat{fw}$ est nulle, donc f aussi.

b. Montrer que le résultat s'applique lorsque $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ (mesure gaussienne, polynômes d'Hermite), ou bien $\mathrm{I} = [0, \infty)$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (polynômes de Laguerre).

Exercice 8 : *polynômes d'Hermite.* On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{x^2}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\big).$$

a. Montrer que H_n est un polynôme de degré n. Calculer H_0, H_1 et H_2.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la fonction $h_n : x \to \mathrm{H}_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformation de Fourier (on pourra utiliser une relation de récurrence entre h'_n, h_n et h_{n+1}, et les rapports entre Fourier et dérivation). Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformation de Fourier $\mathcal{F}$, agissant sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

c. Soit φ la fonction définie par $\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$; on rappelle que $\varphi^{(n)}(x_0)$ s'exprime à partir des polynômes (H_n). Exprimer le développement en série de Taylor de $t \to \varphi(x_0 - t)$. En déduire la *fonction génératrice* des polynômes d'Hermite,

$$\mathrm{e}^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{H}_n(x)\, \frac{t^n}{n!}\cdot$$

Utiliser la fonction génératrice pour retrouver le résultat précédent sur les vecteurs propres de $\mathcal{F}$.

Exercice 9. On considère une fonction φ continue > 0 sur $[0, +\infty[$; on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(r) \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon r}$ pour tout $r \geq 0$. On définit une fonction radiale w continue sur $\mathbb{C}$ en posant $w(z) = \varphi(|z|)$, et on introduit l'espace de Bergman $\mathrm{B}(w)$ des fonctions entières $f(z)$ telles que

$$\|f\|^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 w(z)\, \mathrm{d}\lambda(z) < +\infty,$$

muni du produit scalaire et de la norme de l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}, w\,\mathrm{d}\lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$).

a. Montrer que les fonctions polynomiales $p_n(z) = z^n$, $n \geq 0$, sont dans l'espace $\mathrm{B}(w)$ et sont deux à deux orthogonales. Si $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \in \mathrm{B}(w)$, montrer que

$$(*) \qquad \sum |a_n|^2\, \|p_n\|^2 < +\infty.$$

b. Montrer que pour tout $r > 0$, il existe $c > 0$ tel que l'on ait $\|p_n\| \geq c r^n$ pour tous les entiers $n \geq 0$. Montrer la réciproque de $(*)$: si $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de scalaires vérifiant $(*)$, la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence infini, et la fonction entière f ainsi définie est dans $\mathrm{B}(w)$. Montrer que les évaluations $f \to f(z)$ sont continues sur $\mathrm{B}(w)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{B}(w)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}, w\,\mathrm{d}\lambda)$.

c. Pour une fonction w sur $\mathbb{C}$ non nécessairement radiale, mais telle que $w(z) \le \mathrm{e}^{-\varepsilon|z|}$ pour un $\varepsilon > 0$, montrer que les polynômes sont denses dans $\mathrm{B}(w)$ (*indication* : adapter la méthode de l'exercice 7). Montrer que les évaluations sont continues. Montrer que $\mathrm{B}(w)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{L}^2(\mathbb{C}, w\,\mathrm{d}\lambda)$.

Exercice 10 : *formule d'inversion de Lagrange*. On suppose que f est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On sait que f admet une fonction réciproque holomorphe g dans un voisinage de 0,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n$$

qui vérifie donc $g(0) = 0$ et $g(f(z)) = z$ pour z voisin de 0. On pose $f(z) = z/p(z)$ avec p holomorphe non nulle au voisinage de 0 ; montrer la formule de Lagrange, qui dit que

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (p(z))^n \Big|_{z=0}$$

pour tout $n \ge 1$.

Indications : soit γ_0 le parcours (une fois, dans le sens positif) d'un petit cercle centré en 0, et soit $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$; montrer que

$$\mathrm{ind}_{\gamma_1}(0) = 1,$$

puis partir de la formule

$$b_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

et la transformer par le changement de variable $w = f(z)$ en une intégrale sur γ_0. On aura besoin de noter en route que $f(z)^{-n} - nzf'(z)f(z)^{-n-1}$ est une dérivée, donc a une intégrale nulle sur γ_0.

Appliquer la formule d'inversion au cas $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$ (calculer les coefficients de g, et le rayon de convergence de la série obtenue ; cette fonction g est la *fonction* W *de Lambert*, nommée d'après Johann Heinrich Lambert, mathématicien suisse du 18ième).

Analyse fonctionnelle

Exercice 11. On suppose que μ est une mesure infinie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et on désigne par X l'espace vectoriel des fonctions réelles $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu) \cap \mathrm{L}^4(\Omega, \mu)$.

a. Montrer que X est complet pour la norme définie par $\|f\|_{\mathrm{X}} = \|f\|_2 + \|f\|_4$.

b. Montrer que toute fonction $g \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$, c'est-à-dire de la forme $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mu)$ et $g_1 \in \mathrm{L}^{4/3}(\Omega, \mu)$, définit une forme linéaire ξ continue sur X par la formule

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \xi(f) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}\mu.$$

c. On suppose que ℓ est une forme linéaire continue sur X (muni de la norme précédente) et on définit une fonction réelle φ sur X en posant

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \varphi(f) = \int_\Omega (f^2 + f^4)\,\mathrm{d}\mu - \ell(f)\,;$$

montrer que

$$m = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathrm{X}\} > -\infty.$$

Vérifier que pour toutes $f, h \in \mathrm{X}$

$$\frac{1}{2}\big(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\big) - \varphi(f) \geq \int_\Omega (h^2 + h^4)\,\mathrm{d}\mu.$$

En déduire que le diamètre du fermé $\mathrm{F}_\varepsilon = \{\varphi \leq m + \varepsilon\} \subset \mathrm{X}$ tend vers 0 quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, puis que φ atteint son minimum m en un point unique $f_0 \in \mathrm{X}$.

Montrer que la forme linéaire ℓ provient de la fonction $g = 2f_0 + 4f_0^3 \in \mathrm{L}^2 + \mathrm{L}^{4/3}$.

d. Pour $2 < p < 4$, montrer que X s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, avec image dense. En déduire que les formes linéaires continues sur l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$ proviennent des fonctions de $\mathrm{L}^q(\Omega, \mu)$, $1/q + 1/p = 1$.

Exercice 12. On désigne par K un sous-ensemble convexe compact non vide de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites *réelles* $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ de carré sommable, et on définit par récurrence

$$\lambda_0 = \max\{x_0 : x \in \mathrm{K}\}, \quad \lambda_{n+1} = \max\{x_{n+1} : x \in \mathrm{K},\ x_0 = \lambda_0, \ldots, x_n = \lambda_n\}.$$

a. Montrer qu'il existe un point $y \in \mathrm{K}$ tel que $y_n = \lambda_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que y est un point extrémal de K (si $y = (y_1 + y_2)/2$ et $y_1, y_2 \in \mathrm{K}$, alors $y_1 = y_2 = y$).

b. Soit F un fermé de K tel que $y \notin \mathrm{F}$; montrer qu'il existe n et $\varepsilon > 0$ tels que F ne contienne aucun point f qui satisfasse les inégalités

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad f_j > \lambda_j - \varepsilon.$$

Montrer que y n'appartient pas à l'adhérence de l'enveloppe convexe de F.
Indication : l'ensemble F est contenu dans la réunion des $n+1$ convexes compacts G_j formés des points x de K tels que $x_j \leq \lambda_j - \varepsilon$; exprimer chaque élément de conv(F) comme combinaison convexe de points des différents G_j, puis passer à l'adhérence.

c. On suppose donné un groupe G de bijections affines continues de K sur K, où G est compact pour une topologie qui rende continues les applications $g \to gx$ de G dans K, pour tout $x \in \mathrm{K}$; on suppose qu'aucun sous-ensemble convexe fermé de K n'est invariant par tous les éléments de G (l'ensemble K est un convexe fermé *minimal invariant*).

Montrer que y appartient à l'orbite $\{gx_0 : g \in \mathrm{G}\}$ de tout élément x_0. Montrer que K est réduit à un point.
Indication : si $x_0 \neq x_1$, considérer l'orbite de $(x_0 + x_1)/2$.

d. On suppose donné un groupe compact G de bijections affines continues d'un convexe compact C non vide de $\ell^2(\mathbb{N})$; montrer qu'il existe un point $x_0 \in \mathrm{C}$ qui est fixe pour tous les éléments de G (cas particulier d'un *théorème de point fixe de Kakutani*).

Exercice 13 : *contre-exemple à l'extraction de sous-suites convergentes dans un compact général.* Désignons par K le disque unité fermé de $\mathbb{C}$; montrer que la suite (f_n) dans le compact $\mathrm{X} = \mathrm{K}^{[0,2\pi]}$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente (l'espace X est muni de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, pour laquelle il est compact par Tykhonov).

Indication : si une sous-suite (f_{n_k}) convergeait simplement vers une fonction limite f, on pourrait invoquer le théorème de convergence dominée.

Exercice 14. Dans l'espace X de toutes les fonctions f de $[0,1]$ dans $[0,1]$, muni de la topologie de la convergence simple (l'espace X est donc compact par Tykhonov), on considère le sous-ensemble K formé des fonctions f croissantes (au sens large).

a. Montrer que K est compact (pour la topologie induite).

b. Montrer que le sous-ensemble D de K formé des fonctions f continues à droite, à valeurs rationnelles et en escalier, avec des sauts (éventuels) situés en des abscisses rationnelles, est un ensemble dénombrable. Montrer que D est dense dans K.

c. On considère maintenant l'espace de Banach C(K). Pour chaque $t \in [0,1]$, on définit une fonction $\varphi_t \in \mathrm{C(K)}$ en posant $\varphi_t(f) = f(t)$ pour toute $f \in \mathrm{K}$. Calculer $\|\varphi_t - \varphi_s\|_{\mathrm{C(K)}}$ lorsque $s \neq t$.

En déduire que K est un compact séparable qui n'est pas métrisable.