cours 4, le 5 janvier 2011

Séries de Fourier II

Quelques exemples

Formules en période 1

Par simple changement de variable $y = 2\pi x$ on montre que les fonctions

$$e_{n,1}(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2([0,1], \mathrm{d}x)$ et qu'elles permettent de représenter les fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ au moyen des théorèmes démontrés précédemment : représentation au sens de L^2, représentation ponctuelle des fonctions continues dont les coefficients de Fourier sont absolument sommables, théorème de Dirichlet-Dini (ou de Fejér qu'on verra plus loin).

Les coefficients de Fourier dans cette situation de période 1 s'écrivent

$$c_{n,1}(f) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\, \mathrm{d}t$$

(on utilisera systématiquement cet indice 1 pour rappeler la périodicité 1). On obtient ainsi sur $[0,1]$, à partir de l'exemple $(\pi - x)/2$ traité en période 2π, une expression des polynômes de Bernoulli,

$$\forall y \in (0,1), \qquad \mathrm{B}_1(y) = y - \frac{1}{2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi y)}{k\pi},$$

$$\forall y \in [0,1], \qquad \mathrm{B}_2(y) = y^2 - y + \frac{1}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k\pi y)}{k^2\pi^2},$$

etc : on peut calculer quasi-automatiquement les polynômes successifs par leur série de Fourier, alors qu'on ne trouve pas de formule générale pour les nombres de Bernoulli (il faut simplement penser au coefficient $n!$ qui fait la différence entre les polynômes unitaires et les primitives de B_1, dont le terme dominant est $x^n/n!$).

Parallèlement on définit la transformation de Fourier unitaire $\mathcal{F}_1$, pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (\mathcal{F}_1 f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x t}\, \mathrm{d}x.$$

On vérifie que la formule d'inversion, quand elle est applicable, devient simplement

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}_1 f)(t)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x t}\, \mathrm{d}t,$$

et que $\mathcal{F}_1$ se prolonge en opérateur unitaire de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (une bijection isométrique de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ sur lui-même).

Formule de Poisson

On restera en période 1 dans ce paragraphe. On considère une fonction f sur $\mathbb{R}$; sous des hypothèses convenables,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}_1 f)(k).$$

La stratégie de preuve est simple :

— introduire la fonction g périodisée

— garantir que la fonction 1-périodique g est égale au point 0 à la somme de sa série de Fourier au point 0

— vérifier que les coefficients de Fourier de g sont liés aux valeurs de $\mathcal{F}_1 f$ aux points entiers.

Dans un cas simple on prend $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a donc $x^2 f(x)$ borné, disons par M. On pose

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$

On introduit sur $[-1/2, 1/2]$ et pour $n \in \mathbb{Z}$ les fonctions continues

$$u_n(t) = f(t+n)\,;$$

si $n \neq 0$ et $|t| \leq 1/2$ on a $|t+n| \geq |n| - 1/2 > 0$ donc $\|u_n\|_\infty \leq \mathrm{M}(|n|-1/2)^2$, série majorante convergente. La série $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[-1/2, 1/2]$, donc sa somme g est continue. La fonction g est aussi périodique de période 1.

Du côté des coefficients de Fourier, et par la convergence normale de la série de fonctions, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_{k,1}(g) &= \int_0^1 g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k(u-n)}\,\mathrm{d}u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ku}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ku}\,\mathrm{d}u = (\mathcal{F}_1 f)(k). \end{aligned}$$

Comme f est dans $\mathcal{S}$, il en est de même pour $\mathcal{F}_1 f$, donc $t^2(\mathcal{F}_1 f)(t)$ est borné, ce qui entraîne

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{F}_1 f)(k)| < +\infty.$$

On est dans l'un des cas d'égalité ponctuelle pour les séries de Fourier : périodique continue dont les coefficients sont absolument sommables. On a donc pour tout x

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}_1 f)(k)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k,1}(g)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} = g(x),$$

et en particulier pour $x = 0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}_1 f)(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k,1}(g) = g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$

Il en résulte bêtement une interprétation en termes de transformée de Fourier d'une distribution tempérée :

$$\mathcal{F}_1\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Rapport avec la base de Shannon, vue en leçon

On suppose que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}_1 f$ est (continue) à support compact contenu dans l'intervalle ouvert $(-1/2, 1/2)$.

Pour tout τ réel on pose $f_\tau(x) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\tau x} f(x)$; c'est une fonction dans $\mathcal{S}$ et on vérifie que

$$(\mathcal{F}_1 f_\tau)(n) = (\mathcal{F}_1 f)(n+\tau).$$

Pour $|\tau| < 1/2$ le seul terme non nul $(\mathcal{F}_1 f_\tau)(n)$ dans l'application à f_τ de la formule de Poisson est $(\mathcal{F}_1 f_\tau)(0)$ et la formule de Poisson donne

$$\forall \tau \in [-1/2, 1/2], \qquad (\mathcal{F}_1 f)(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_\tau(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n\tau} f(n).$$

Par ailleurs et par hypothèse, on connaît $\mathcal{F}_1 f$ en dehors de $[-1/2, 1/2]$: elle y est nulle. On peut donc reconstituer $\mathcal{F}_1 f$, donc f elle-même, à partir des valeurs $f(n)$.

Sommes et noyau de Fejér

On revient à la période 2π. On cherche à régulariser le comportement des sommes de Fourier $\mathrm{S}_n f$ par un procédé de Cesàro, en posant

$$\sigma_n f = \frac{\mathrm{S}_0 f + \cdots + \mathrm{S}_n f}{n+1} = f \underset{\text{per}}{*} \frac{\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n}{n+1}.$$

On est donc amené à introduire le noyau trigonométrique

$$\mathrm{K}_n = \frac{\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n}{n+1},$$

appelé *noyau de Fejér*. On va calculer ce noyau K_n. On a

$$\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x}\big)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1$$

donc

$$\Big[\sum_{k=0}^{n} \cos(x/2 + kx) + \mathrm{i}\Big(\sum_{k=0}^{n} \sin(x/2 + kx)\Big)\Big]\big(2\mathrm{i}\sin(x/2)\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} - 1$$

d'où en prenant les parties réelles

$$2\big(\sin(x/2) + \cdots + \sin(nx + x/2)\big)\sin(x/2) = 2\sin^2((n+1)x/2),$$

et

$$\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n = \frac{\sin^2\big[(n+1)x/2\big]}{\sin^2(x/2)}.$$

On a donc

$$\mathrm{K}_n = \frac{\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n}{n+1} = \frac{\sin^2\big[(n+1)x/2\big]}{(n+1)\sin^2(x/2)}.$$

La fonction K_n est ≥ 0, d'intégrale 1 pour $\mathrm{d}\mu$, car toutes les D_k sont d'intégrale 1. On peut calculer les coefficients du polynôme trigonométrique K_n, en écrivant

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{D}_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=-k}^{k} e_\ell = \sum_{k,\ell} \mathbf{1}_{0\leq|\ell|\leq k\leq n}\, e_\ell = \sum_{\ell=-n}^{n} (n+1-|\ell|)\, e_\ell,$$

donc

$$\mathrm{K}_n = \sum_{\ell=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\ell|}{n+1}\Big)\, e_\ell.$$

Par conséquent

$$\sigma_n f = \sum_{\ell=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|\ell|}{n+1}\Big) c_\ell(f) e_\ell.$$

Théorème de Fejér. *Si f est dans $\mathrm{L}^p(0,2\pi)$ et $1 \le p < +\infty$, on a*

$$\|f - \sigma_n f\|_p \to 0.$$

Dans le cas où f est 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$, il y a convergence uniforme de $\sigma_n f$ vers f.

Preuve. — Plutôt que d'énoncer et prouver dans le cas périodique les résultats d'approximation par convolution qui ont été vus sur $\mathbb{R}$, ce qui serait la meilleure solution, on va s'échiner à se *ramener* au cas de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mu)$; on peut supposer f périodique définie sur $\mathbb{R}$. On va se ramener aux convolutions sur $\mathbb{R}$ en posant $\mathrm{F} = \mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]} f$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(x) = \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x) \frac{\mathrm{K}_n(x)}{2\pi}.$$

Alors φ_n est une approximation de l'unité (voir plus loin), F est dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$ donc $\mathrm{F} * \varphi_n$ tend vers F dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ d'après les résultats d'approximation sur $\mathbb{R}$. Pour $|x| \le \pi$ on écrit

$$(\mathrm{F} * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x-y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{F}(x-y)\mathrm{K}_n(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{2\pi}$$

et comme $|x|, |y| \le \pi$ on a $|x-y| \le 2\pi$ et $\mathrm{F}(x-y) = f(x-y)$,

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \qquad (\mathrm{F} * \varphi)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\mathrm{K}_n(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{2\pi} = (f \underset{\text{per}}{*} \mathrm{K}_n)(x).$$

On a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|(f \underset{\text{per}}{*} \mathrm{K}_n)(x) - f(x)\big|^p\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \big|(\mathrm{F} * \varphi_n)(x) - \mathrm{F}(x)\big|^p\,\mathrm{d}x$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \big|(\mathrm{F} * \varphi_n)(x) - \mathrm{F}(x)\big|^p\,\mathrm{d}x = \|\mathrm{F} * \varphi_n - \mathrm{F}\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \to 0.$$

On pourra traiter de même le cas périodique continu, mais en prenant simplement dans ce cas $\mathrm{F} = f$, fonction uniformément continue bornée sur $\mathbb{R}$.

Vérifions les hypothèses d'approximation de l'unité : on a bien $\varphi_n \ge 0$, fonction d'intégrale 1, et pour tout $\delta > 0$,

$$\int_{|x|>\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{\delta}^{\pi} \mathrm{K}_n(x)\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \le \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(x/2)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{(n+1)\sin^2(\delta/2)}$$

qui tend vers 0 avec n.

Conséquences.

— Unicité dans L^1 : si f est localement intégrable périodique et si tous ses coefficients de Fourier sont nuls, alors $f = 0$ (presque partout). En effet, les sommes de Fejér de f sont alors nulles, et convergent vers f pour la norme L^1.

— Pour une fonction continue, $(\mathrm{S}_n f)(x_0)$ ne peut converger que vers $f(x_0)$. En effet, si cette suite converge vers une limite ℓ, les sommes de Cesàro, égales aux sommes de Fejér de f au point x_0, convergent aussi vers ℓ ; mais les sommes de Fejér d'une fonction périodique continue tendent toujours vers $f(x_0)$.

Holomorphie

Sources : Rudin, Cartan, Chatterji, Yger

Définition. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$ et z_0 un point de Ω ; on dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existe quand h tend vers 0 *par valeurs complexes*. Dans ce cas la limite est notée $f'(z_0)$.

Exemples. La fonction constante $\mathbf{1}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, de dérivée nulle. La fonction $z \to z$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, de dérivée égale à 1. La fonction $z \to \overline{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Règles de calcul

Sommes, produits de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en un point z_0 sont $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 ; le quotient f/g si $g(z_0) \neq 0$. Les preuves sont identiques à celles du cas réel.

Les polynômes et les fractions rationnelles sont donc une première classe intéressante de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en tout point où elles sont définies.

Composition ; composition avec un chemin C^1

On suppose que $z_0 = g(t_0)$, où g est définie d'un voisinage de t_0 dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à valeurs dans Ω, et g est $\mathbb{K}$-dérivable au point t_0. On écrit

$$f(g(t_0+h)) = f\big(g(t_0) + g'(t_0)h + h\varepsilon_2(h)\big) = f\big(g(t_0) + k\big) = f\big(z_0 + k\big)$$

où h peut être interprété $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ selon le cas ; on note que

$$k = k(h) = g'(t_0)h + h\varepsilon_2(h)$$

est une fonction $\mathrm{O}(h)$ à l'origine. Ensuite,

$$f(g(t_0+h)) = f(z_0) + f'(z_0)k + k\varepsilon_1(k)$$

$$= f(z_0) + f'(z_0)\, g'(t_0)h + f'(z_0)\, h\varepsilon_2(h) + k\varepsilon_1(k)$$

$$= f(g(t_0)) + f'(g(t_0))g'(t_0)h + h\varepsilon_3(h),$$

ce qui montre que $f \circ g$ est $\mathbb{K}$-dérivable au point t_0, avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t))\Big|_{t=t_0} = f'(g(t_0))\, g'(t_0).$$

Relations de Cauchy-Riemann

On utilisera les deux points de vue $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$:

$$f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{F}(x, y),$$

où x, y sont réels. Les dérivées partielles au point z_0 sont obtenues en composant avec les chemins $g_1 : t \to z_0 + t$ et $g_2 : t \to z_0 + \mathrm{i}t$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \mathrm{i}f'(z_0),$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0,$$

et si $f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{U}(x, y) + \mathrm{i}\mathrm{V}(x, y)$ il en résulte que

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}(z_0), \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}(z_0),$$

le gradient de V est à 90 degrés positifs de celui de U.

De plus, si f est $\mathbb{C}$-dérivable dans un ouvert, les fonctions U, V sont harmoniques (si elles sont C^2, ce qu'on prouvera plus tard).

Définition de l'espace $\mathrm{H}(\Omega)$ des fonctions *holomorphes* dans l'ouvert Ω : ce sont les fonctions f qui sont $\mathbb{C}$-dérivables en tout point de Ω. D'après la discussion précédente, $\mathrm{H}(\Omega)$ est une algèbre de fonctions.

Séries entières

Une *série entière* est une série de fonctions de la forme

$$\sum a_n z^n$$

où z est complexe (ainsi que les a_n). La série converge toujours quand $z = 0$, et il est possible qu'une telle série ne converge qu'en 0, par exemple quand $a_n = n!$ (dans ce cas, le terme général de la série ne tend pas vers 0 quand $z \neq 0$).

Rayon de convergence

Si la série $\sum a_n z^n$ converge en $z_0 \neq 0$ alors $|a_n| r_0^n$ est borné, disons par M, donc pour $|z| < r_0 = |z_0|$

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \leq \mathrm{M}(r/r_0)^n\,;$$

la série majorante est une série géométrique convergente. La série $\sum a_n z^n$ converge donc absolument en tout point $|z| < r_0$.

Désignons par R le sup (dans $\overline{\mathbb{R}}$) de l'ensemble C des valeurs r_0 tels qu'il existe un point de module r_0 en lequel la série converge. Alors clairement la série converge pour $|z| < \mathrm{R}$ et diverge pour $|z| > \mathrm{R}$.

Le nombre R ainsi déterminé s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière. Il est possible que $\mathrm{R} = 0$, ou que $\mathrm{R} = +\infty$.

Formule d'Hadamard

Si $|z| \limsup_n |a_n|^{1/n} > 1$ il existe une infinité de valeurs $|a_n|^{1/n}|z| > 1$, donc une infinité de valeurs $|a_n z^n| > 1$ et la série $\sum a_n z^n$ ne converge pas.

Si $|z| \limsup_n |a_n|^{1/n} < 1$ et si on choisit ρ tel que $|z| \limsup_n |a_n|^{1/n} < \rho < 1$, on aura $|a_n|^{1/n}|z| \leq \rho$ pour n assez grand, donc $|a_n z^n| \leq \rho^n$ et la série converge. La valeur limite est donc

$$\mathrm{R} = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}.$$

Continuité de la somme

Soit $\rho < \mathrm{R}$; on peut trouver z_0 tel que $r_0 = |z_0| > \rho$ et que la série $\sum a_n z^n$ converge en $z_0 \neq 0$; alors $|a_n| r_0^n$ est borné, disons par M, donc pour $|z| \leq \rho$

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \leq \mathrm{M}(\rho/r_0)^n$$

qui converge normalement pour $|z| \leq \rho < r_0$. La somme de la série entière définit une fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

qui est continue dans le disque ouvert de convergence.

Série dérivée et dérivée de la série

On voit facilement avec la formule d'Hadamard que la série dérivée a le même rayon de convergence que la série. En effet, $\sum n a_n z^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum n a_n z^n$ converge, et le rayon de convergence correspondant est calculé par la formule d'Hadamard comme inverse de

$$\limsup |n a_n|^{1/n}\,;$$

comme $n^{1/n}$ tend vers 1, cette quantité est égale à

$$\limsup |n a_n|^{1/n} = 1/\mathrm{R}.$$

Désignons par g la somme (continue dans le disque ouvert de rayon R) de la série dérivée. Soit z dans le disque ouvert de convergence, et ρ tel que $|z| < \rho < \mathrm{R}$; la série dérivée converge normalement dans le disque fermé de rayon ρ. Si $|h| < \rho - |z|$, $z, z+h$ sont dans le disque fermé de rayon ρ, la série dérivée converge normalement sur le segment donc

$$\int_0^1 g(z+th)h\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 n a_n (z+th)^{n-1} h\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\big((z+h)^n - z^n\big) = f(z+h) - f(z).$$

Comme g est continue au point z on a $|g(z+th) - g(z)| < \varepsilon$ quand $|h| < \delta$, donc

$$\left| h g(z) - \int_0^1 g(z+th)h\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon |h|$$

et il en résulte que $f' = g$.

Exemple : e^z.