Exemples de séries entières

Les fonctions e^z, $\cos, \sin, \cosh$ et $\sinh$, $\tan$ et $\tanh$ sont au programme. Leurs développements doivent être connus, tout comme celui de $(1+x)^\alpha$.

Les séries entières apparaissent comme solutions de certaines équations différentielles, par exemple l'équation de Bessel d'ordre 0

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + t^2 y(t) = 0$$

qui admet pour solution vérifiant $y(0) = 1$ la fonction de Bessel J_0

$$\mathrm{J}_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{4^n n!\, n!}.$$

Le rayon de convergence de cette série est infini : la fonction J_0 est une *fonction entière*. L'identification terme à terme dans les séries dérivées montre que J_0 vérifie la gentille équation différentielle complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^2 y''(z) + z y'(z) + z^2 y(z) = 0.$$

Le principe du prolongement analytique nous dira qu'il suffisait de vérifier l'équation pour les valeurs réelles de z : si la fonction entière $z^2 y''(z) + z y'(z) + z^2 y(z)$ est nulle sur l'axe réel, elle est nulle en tout point de $\mathbb{C}$.

Si on a trouvé J_0 à partir de l'équation différentielle, en identifiant les coefficients de son développement en série entière, cette remarque sur le prolongement analytique est vide de sens. Mais si on a introduit J_0 autrement, par exemple par

$$\mathrm{J}_0(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \sin\theta} \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

vérifié l'équation différentielle par dérivation sous le signe somme, puis calculé la série entière par interversion série-intégrale, la remarque de prolongement reprend un peu de sens.

Intégrales curvilignes

Si γ est un chemin de classe C^1 de $[a, b]$ dans un ouvert Ω où une fonction complexe f est définie et continue, on pose

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Si le chemin est continu et de classe C^1 par morceaux, on additionne les morceaux de classe C^1 : si $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_\mathrm{N} = b$ est une subdivision de $[a, b]$ telle que γ soit de classe C^1 sur chaque $[a_j, a_{j+1}]$, on pose

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Il faut vérifier que le résultat ne dépend pas du découpage.

On note $\gamma^* = \gamma([a, b])$ l'image du chemin. C'est un compact de Ω.

Majoration

Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe C^1, ou bien continu de classe C^1 par morceaux, on définit la longueur de chemin γ par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t.$$

C'est la longueur de γ, pas la longueur de l'image γ^* : si le cercle de rayon 1 est parcouru par γ deux fois dans le sens positif, la longueur de γ est 4π. On a alors si f est continue sur γ^*,

$$\Bigl|\int_\gamma f(z)\,dz\Bigr| \le \ell(\gamma) \max\{|f(w)| : w \in \gamma^*\}.$$

Intégrale d'une dérivée

On suppose que f est holomorphe dans un ouvert Ω, et que f' est continue (on verra plus loin que la continuité de f' est automatique, c'est le *théorème de Goursat*). Si on a un chemin $\gamma : [a, b] \to \Omega$, on voit que

$$(*) \qquad \int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

donc le résultat est nul pour tout chemin fermé ($\gamma(b) = \gamma(a)$, appelé aussi *lacet*).

On notera

$$\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} f(z)\,dz \quad \text{ou simplement} \quad \int_{\mathrm{AB}} f(z)\,dz$$

l'intégrale correspondant à $\gamma_{\mathrm{A},\mathrm{B}} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_{\mathrm{A},\mathrm{B}}(t) = (1 - t)\mathrm{A} + t\mathrm{B}$,

$$\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} f(z)\,dz = \int_0^1 f((1 - t)\mathrm{A} + t\mathrm{B})(\mathrm{B} - \mathrm{A})\,\mathrm{d}t.$$

On note que $\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} + \int_{[\mathrm{B},\mathrm{A}]} = 0$, en particulier $\int_{[\mathrm{A},\mathrm{A}]} = 0$.

Théorème de Goursat

Théorème de Goursat (1900). *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω, la dérivée f' est continue.*

À partir de là, on savait depuis longtemps que f est en fait C^∞, et même analytique. On savait aussi en 1900 qu'il suffisait de montrer le *lemme de Goursat* énoncé ci-dessous. Il nous faut un peu de préparation : si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont trois points de $\mathbb{C}$ et si f est définie et continue dans un ouvert Ω contenant le triangle $\mathrm{T} = \mathrm{conv}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, on posera

$$\int_{\mathrm{ABC}} f(w)\,dw = \int_{\mathrm{AB}} f(w)\,dw + \int_{\mathrm{BC}} f(w)\,dw + \int_{\mathrm{CA}} f(w)\,dw.$$

Si on ne s'intéresse qu'au module de l'intégrale sur le bord $\partial\mathrm{T}$ du triangle T, on peut poser

$$\Bigl|\int_{\partial\mathrm{T}} f(w)\,dw\Bigr| = \Bigl|\int_{\mathrm{ABC}} f(w)\,dw\Bigr|.$$

Pour un triangle $\mathrm{T} = \mathrm{conv}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ on considérera son périmètre, ou longueur du bord,

$$\mathrm{L}(\mathrm{T}) = \ell(\partial \mathrm{T}) = |\mathrm{B} - \mathrm{A}| + |\mathrm{C} - \mathrm{B}| + |\mathrm{A} - \mathrm{C}|.$$

Si M est un point de la droite affine réelle passant par les points A, B de $\mathbb{C}$, alors

$$\int_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{AM}} + \int_{\mathrm{MB}} .$$

Cela résulte de la relation de Chasles pour les intégrales sur les segments de $\mathbb{R}$.

Lemme de Goursat. *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω et si Ω contient un triangle* $\mathrm{conv}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$*, alors*

$$\int_{\mathrm{ABC}} f(w)\, dw = 0.$$

Le cas où les trois points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont alignés résulte de la relation de Chasles, et l'égalité est alors vraie pour toute fonction continue f. Le problème se pose pour les *vrais* triangles.

Preuve. — Pour un triangle ABC on introduit les milieux respectifs $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ de BC, CA et AB et on vérifie que

$$\int_{\mathrm{ABC}} = \int_{\mathrm{AC'B'}} + \int_{\mathrm{BA'C'}} + \int_{\mathrm{CB'A'}} + \int_{\mathrm{A'B'C'}}$$

(observer que les segments « intérieurs » comme $[\mathrm{C}', \mathrm{B}']$ sont parcourus au total deux fois dans les quatre intégrales de droite, et dans des sens opposés).

Attaquons la preuve pour de bon, avec le triangle $\mathrm{T}_0 = \mathrm{conv}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ donné dans Ω. Supposons par l'absurde que

$$0 < c = \Bigl| \int_{\partial \mathrm{T}_0} f(w)\, dw \Bigr|.$$

On peut découper comme expliqué le triangle T_0 en quatre triangles plus petits $\mathrm{T}_{0,j}$, $j = 1, \ldots, 4$, de façon que

$$\int_{\partial \mathrm{T}_0} = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial \mathrm{T}_{0,j}} .$$

Il existe donc un au moins de ces sous-triangles T_{0,j_0} pour lequel

$$c/4 \le \Bigl| \int_{\partial \mathrm{T}_{0,j_0}} f(w)\, dw \Bigr|.$$

On posera $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_{0,j_0} \subset \mathrm{T}_0$. Par ailleurs, les longueurs des côtés des sous-triangles $\mathrm{T}_{0,j}$ sont égales à la moitié des longueurs des côtés de T_0. On a donc

$$\mathrm{L}(\mathrm{T}_1) = \frac{1}{2} \mathrm{L}(\mathrm{T}_0).$$

Si on pose pour tout triangle T contenu dans Ω

$$\mathrm{Q}(\mathrm{T}) = \frac{\Bigl| \int_{\partial \mathrm{T}} f(w)\, dw \Bigr|}{\mathrm{L}^2(\mathrm{T})}$$

on voit que Q augmente quand on passe de T_0 à T_1 :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{T}_1) = \frac{\left|\int_{\partial \mathrm{T}_1} f(w)\,dw\right|}{\mathrm{L}^2(\mathrm{T}_1)} \geq \frac{c/4}{(\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)/2)^2} = \frac{c}{\mathrm{L}^2(\mathrm{T}_0)} = \mathrm{Q}(\mathrm{T}_0).$$

On peut construire par récurrence, en suivant ce principe initial, une suite décroissante (T_n) de triangles, tendant vers un point z_0 de Ω, et tels que $\mathrm{Q}(\mathrm{T}_n) \geq \mathrm{Q}(\mathrm{T}_0)$. Mais pour le petit triangle T_n, qui est de longueur $2^{-n}\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)$, le quotient $\mathrm{Q}(\mathrm{T}_n)$ est petit : d'après la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f au point Ω, il existe pour $\varepsilon = \mathrm{Q}(\mathrm{T}_0)/2 > 0$ un $\delta > 0$ tel que pour $|z - z_0| < \delta$ on ait

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Posons $\mathrm{G}(z) = f(z_0)(z-z_0) + f'(z_0)(z-z_0)^2/2$; c'est une fonction holomorphe de dérivée continue

$$\mathrm{G}'(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\,;$$

l'intégrale de G' est donc nulle sur le chemin fermé $\partial \mathrm{T}_n$,

$$\int_{\partial \mathrm{T}_n} f(w)\,dw = \int_{\partial \mathrm{T}_n} (f(w) - \mathrm{G}'(w))\,dw.$$

On choisit n assez grand pour que $\mathrm{L}(\mathrm{T}_n) = 2^{-n}\mathrm{L}(\mathrm{T}_0)$ soit $< \delta$. Alors $\mathrm{diam}(\mathrm{T}_n) \leq \mathrm{L}(\mathrm{T}_n)/2 < \delta$, et comme la fonction G' est proche de f sur T_n,

$$\forall z \in \mathrm{T}_n, \qquad |f(z) - \mathrm{G}'(z)| \leq \varepsilon\, \mathrm{diam}(\mathrm{T}_n)\,;$$

on a donc la majoration

$$\left|\int_{\partial \mathrm{T}_n} f(w)\,dw\right| \leq \varepsilon\, \mathrm{diam}(\mathrm{T}_n)\, \mathrm{L}(\mathrm{T}_n) \leq \varepsilon \mathrm{L}(\mathrm{T}_n)^2,$$

ce qui donne $\mathrm{Q}(\mathrm{T}_n) \leq \varepsilon < \mathrm{Q}(\mathrm{T}_0)$ et apporte une contradiction qui termine la preuve.

Conséquence : existence de primitives dans les ouverts étoilés

Théorème 1. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert étoilé et si f est dans $\mathrm{H}(\Omega)$, elle admet une $\mathbb{C}$-primitive F dans Ω.*

Preuve. — On suppose que Ω est étoilé par rapport à un point O, ce qui signifie que

$$\forall z \in \Omega, \qquad [\mathrm{O}, z] \subset \Omega.$$

On pose pour tout z dans Ω

$$\mathrm{F}(z) = \int_{[\mathrm{O},z]} f(w)\,dw.$$

On fixe z_0 dans Ω et $r_0 > 0$ tel que $\mathrm{D}(z_0, r_0)$ soit contenu dans Ω ; alors pour $|h| < r_0$ le segment $[z_0, z_0 + h]$ est contenu dans Ω et pour tout point p de $[z_0, z_0 + h]$ tous les points de $[\mathrm{O}, p]$ sont dans Ω par le caractère étoilé. Il en résulte que le triangle solide $\mathrm{conv}(\mathrm{O}, z_0, z_0+h)$ est contenu dans Ω, et d'après le lemme de Goursat

$$\int_{[\mathrm{O}, z_0]} f(w)\, dw + \int_{[z_0, z_0+h]} f(w)\, dw + \int_{[z_0+h, \mathrm{O}]} f(w)\, dw = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\mathrm{F}(z_0) + \int_{[z_0, z_0+h]} f(w)\, dw = \mathrm{F}(z_0+h).$$

On a donc pour tout h tel que $|h| < r_0$,

$$\frac{\mathrm{F}(z_0+h) - \mathrm{F}(z_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(w)\, dw$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^1 f((1-t)z_0 + t(z_0+h))h\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(z_0+th)\, \mathrm{d}t$$

qui tend vers $f(z_0)$ quand h tend vers 0, par la continuité de f (qui résulte de sa dérivabilité). On a donc vérifié que

$$\mathrm{F}'(z_0) = f(z_0).$$

Application : les intégrales d'une fonction holomorphe f sur les chemins fermés contenus dans un ouvert étoilé sont nulles.

En effet, la fonction f apparaît comme dérivée continue d'une fonction holomorphe F, et on applique l'égalité $(*)$.

Détermination du logarithme

On considère le fermé X de $\mathbb{C}$ formé de tous les réels ≤ 0,

$$\mathrm{X} = \{z : z \in \mathbb{R},\ z \leq 0\},$$

et l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{X}$ de $\mathbb{C}$. Cet ouvert est étoilé par rapport au point $\mathrm{O} = 1$. D'après les résultats précédents, on peut définir dans cet ouvert une primitive F de la fonction $f(z) = 1/z$, holomorphe dans Ω. On peut supposer que $\mathrm{F}(1) = 0$ en posant

$$\forall z \in \Omega, \qquad \mathrm{F}(z) = \int_{[1,z]} \frac{dw}{w}\cdot$$

On considère si $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, le chemin γ qui va tout droit de 1 à r, puis de r à z sur un arc du cercle a_z de rayon r, défini par $a_z(\alpha) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ pour α variant de 0 à θ ; comme les intégrales sur les chemins fermés contenus dans Ω sont nulles, on trouve

$$\mathrm{F}(z) = \int_1^r \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{a_z} \frac{dw}{w}\cdot$$

On trouve ainsi que

$$\mathrm{F}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\theta.$$

Si on a bien précisé de quel ouvert Ω on parle, on peut se permettre d'écrire

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\theta.$$

On a

$$\exp\bigl(\ln z\bigr) = z.$$

Exploitation des séries de Fourier

Lemme. *Pour g holomorphe et C^1 dans la couronne ouverte*

$$\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = \{z : \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\}, \qquad 0 \le \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \le +\infty,$$

l'intégrale

$$\mathrm{I}(r) = \int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

ne dépend pas de $r \in (\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$.

Preuve. — La dérivée en r de $\mathrm{I}(r)$ est nulle :

$$r\,\mathrm{i}\,\mathrm{I}'(r) = \int_0^{2\pi} g'(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\;\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \Bigl(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\Bigr)\,\mathrm{d}\theta = g\bigl(r\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}\bigr) - g(r) = 0.$$

Remarque. Pour dériver sous l'intégrale, on avait besoin d'une hypothèse permettant d'appliquer un théorème ou un autre. Pour passer à une fonction g holomorphe *tout court*, il aurait suffit pour la théorie de Lebesgue de savoir que g' est localement bornée, mais on ne le sait pas plus, pour l'instant, que la continuité de g' ! En fait, quand on débloquera la situation, on trouvera g' de classe C^∞.

Lemme oublié. *Si φ est 2π-périodique et de classe C^1, ses coefficients de Fourier sont absolument sommables.*

Preuve. — La dérivée φ' est continue, donc de carré intégrable et

$$\sum |c_n(\varphi')|^2 < +\infty.$$

Comme $c_n(\varphi') = \mathrm{i}nc_n(\varphi)$ il en résulte, avec Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^{-1}(n|c_n|) \le \Bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^{-2}\Bigr)^{1/2} \Bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |c_n(\varphi')|^2\Bigr)^{1/2} < +\infty,$$

ou bien simplement avec $uv \le u^2 + v^2$.

On va être obligé de se répéter. On établit un cas particulier d'un résultat qu'on reprendra sous le nom de *développement de Laurent*.

Proposition. *Si f est holomorphe dans $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, elle est développable en série entière de rayon $\ge \mathrm{R}$.*

Preuve. — Comme le disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ est étoilé il existe une primitive F pour f, et F est holomorphe de classe C^1. Il suffit de montrer que F est développable en série entière : si $\mathrm{F}(z) = \sum a_n z^n$, on a vu dans l'étude des séries entières qu'il en résulte que $f(z) = \mathrm{F}'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ est développable dans le même disque.

Pour chaque $r < \mathrm{R}$ la fonction $\mathrm{F}_r(\theta) = \mathrm{F}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ est périodique de classe C^1, donc somme de sa série de Fourier,

$$\mathrm{F}_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\mathrm{F}_r)\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $g(z) = \mathrm{F}(z)/z^n$ est holomorphe dans la couronne $\mathrm{C}(0, \mathrm{R})$, donc d'après le lemme 1 on sait que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{F}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = r^{-n} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = r^{-n} c_n(\mathrm{F}_r)$$

ne dépend pas de r : appelons le a_n ; alors pour tout $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ de la couronne ouverte $\mathrm{C}(0, \mathrm{R})$, on a

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}_r(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^n\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Il reste à voir que les a_n avec $n < 0$ sont nuls. Fixons r_0 tel que $0 < r_0 < \mathrm{R}$; pour tout $r \in (0, r_0)$ et $n < 0$,

$$|a_n| = r^{|n|} \Bigl| \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \Bigr| \le r^{|n|} \max\{|\mathrm{F}(z)| : |z| \le r_0\}$$

qui tend vers 0 quand $r \to 0$, donc $a_n = 0$. Pour tout z de la couronne $\mathrm{C}(0, \mathrm{R})$ on a donc

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

et l'égalité se prolonge par continuité à $z = 0$.

Théorème. *Si f est holomorphe dans Ω elle est analytique. Plus précisément, si z_0 est dans Ω et si r_0 désigne la distance de z_0 au bord de Ω, la fonction f est donnée dans le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0, r_0)$ par son développement de Taylor,*

$$\forall z \in \mathrm{D}(z_0, r_0), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Les dérivées successives de f sont donc holomorphes dans Ω.

Preuve. — La fonction $h \to f(z_0 + h)$ est holomorphe dans $\mathrm{D}(0, r_0) \subset \Omega$, donc développable en série entière de rayon de convergence $\ge r_0$,

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0) h^n,$$

et les coefficients sont calculables en dérivant la série entière.