Développement de Laurent

C'est ici qu'on va répéter des arguments de preuve déjà utilisés dans le cours précédent. On rappelle que $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ désigne la couronne ouverte centrée en 0,

$$\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\},$$

où $0 \leq \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \leq +\infty$.

Théorème. *Pour toute fonction f holomorphe dans la couronne ouverte $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$, il existe des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que pour tout $z \in \mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ on ait la représentation en série absolument convergente*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Pour tout $r \in (\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ on a

$$a_n r^n = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\cdot$$

Inversement, si $f(z)$ admet pour tout z de $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ une représentation $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$ en série simplement convergente aux deux infinis, les coefficients (b_n) sont égaux aux (a_n) et la série converge normalement sur toute couronne fermée plus petite.

Preuve. — Pour chaque $r \in (\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ la fonction f_r définie par $f_r(\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ est 2π-périodique et de classe C^∞, donc somme en tout point θ de sa série de Fourier,

$$f_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_r)\,\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $g(z) = f(z)/z^n$ est holomorphe dans la couronne, donc d'après un lemme du cours précédent, on sait que

$$\mathrm{I}_r(g) = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) r^{-n}\,\mathrm{e}^{-n\,\mathrm{i}\,\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = r^{-n} c_n(f_r)$$

ne dépend pas de $r \in (\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$: appelons a_n cette valeur constante ; alors pour tout $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ de la couronne on peut écrire

$$f(z) = f_r(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^n\,\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Inversement, supposons que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$, série simplement convergente aux deux infinis ; considérons $\mathrm{R}_1 < \rho_1 < \rho_2 < \mathrm{R}_2$ et la couronne fermée limitée par ρ_1, ρ_2, compact contenu dans l'ouvert $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$; choisissons r_1, r_2 tels que $\mathrm{R}_1 < r_1 < \rho_1$ et que $\rho_2 < r_2 < \mathrm{R}_2$; par hypothèse la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ converge au point r_2, donc cette série entière converge normalement dans la boule fermée de rayon ρ_2 par un lemme de séries entières. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_{-n}\zeta^n$ converge au point $\zeta = 1/r_1$, donc normalement dans la boule fermée $1/\rho_1$, d'où la convergence normale de la série de Laurent dans la sous-couronne fermée : quand $\rho_1 \le |z| \le \rho_2$, on a à la fois $|z| \le \rho_2$ et $1/|z| \le 1/\rho_1$.

La convergence normale permet d'identifier les coefficients de Fourier de f_r, par interversion série intégrale,

$$a_n r^n = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \sum_k b_k r^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = b_n r^n.$$

Expression des coefficients a_n par une intégrale curviligne

Sur un chemin circulaire γ_r centré en 0, défini par $\gamma_r(\theta) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, on a $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $dz = r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ et

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\frac{dz}{z} = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

donc pour $r \in (\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ on peut écrire

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})r^{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^n}\,\frac{dz}{z}.$$

Inégalités de Cauchy

À partir de la première formule qui exprime $a_n r^n$ comme coefficient de Fourier de la fonction f_r, il est clair que si on pose

$$\mathrm{M}(f, r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\},$$

pour tout r entre R_1 et R_2, on obtient les *inégalités de Cauchy*,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad |a_n|\,r^n \le \mathrm{M}(f, r).$$

Remarque. Si on a un lacet γ dans la couronne $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ et f holomorphe dans cette couronne, on voit que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

En effet, la convergence normale de la série de Laurent permet de voir que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_\gamma z^n\,dz\,;$$

ensuite, pour tout $n \ne -1$ la fonction z^n est la $\mathbb{C}$-dérivée (continue) dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ de $z^{n+1}/(n+1)$, donc l'intégrale de z^n, $n \ne -1$, est nulle sur tout lacet évitant 0. Il ne reste que le terme $n = -1$. Cette remarque est le fondement du calcul des intégrales par la méthode des résidus.

Singularités artificielles et théorème de Liouville

Proposition. *Si f est holomorphe dans un disque épointé $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})^*$ et si*

$$(z - z_0)\, f(z) \to 0$$

quand z tend vers z_0, alors f se prolonge en fonction holomorphe dans le disque $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$.

Preuve. — On pose $g(h) = f(z_0 + h)$; alors g est holomorphe dans la couronne $\mathrm{C}(0, \mathrm{R})$ et y admet un développement de Laurent

$$0 < |h| < \mathrm{R} \qquad \Rightarrow \qquad g(h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n h^n.$$

On va vérifier (on a déjà fait quelque chose de voisin dans le cours précédent) que les a_n sont nuls quand $n < 0$: par l'hypothèse de la proposition, on a $hg(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0, et pour tout $n < 0$, à partir du moment où $0 < r \le 1$

$$|a_n| \le r^{|n|} \max\{|g(h)| : |h| = r\} \le r\, \mathrm{M}(g, r)$$

qui tend vers 0 par hypothèse, donc les a_n, $n < 0$ sont nuls. Le développement de Laurent de f dans le disque épointé se réduit à

$$0 < |z - z_0| < \mathrm{R} \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n.$$

Il suffit de prolonger f par $f(z_0) = a_0$.

Formule de Cauchy élémentaire : avec un cercle

On suppose que $\overline{\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})} \subset \Omega$; il existe $\rho > \mathrm{R}$ tel que $\mathrm{U} = \mathrm{D}(z_0, \rho) \subset \Omega$. Dans cet ouvert étoilé U les fonctions holomorphes ont des primitives et les intégrales des fonctions holomorphes sur les lacets contenus dans U sont nulles.

Considérons z tel que $|z - z_0| < \mathrm{R}$. La fonction

$$g : w \in \Omega \setminus \{z\} \to \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

est holomorphe sauf en z et reste bornée quand w tend vers z, donc on a une singularité artificielle : la fonction g prolongée par $g(z) = f'(z)$ est holomorphe dans Ω et par conséquent

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_{\mathrm{R}, z_0}} g(w)\, dw = 0,$$

où $\gamma_{\mathrm{R}, z_0}(\theta) = z_0 + \mathrm{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Par ailleurs, avec $w = z_0 + \mathrm{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_{\mathrm{R}, z_0}} \frac{1}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0 - z) + \mathrm{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\, \mathrm{R}\, \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - (z - z_0)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} / \mathrm{R}}\, \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} (z - z_0)^n\, \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{R}^{-n} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = 1,$$

donc pour $|z - z_0| < \mathrm{R}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_{\mathrm{R}, z_0}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Remarque. On déduit usuellement le caractère analytique des fonctions holomorphes à partir de cette formule, en développant $(w - z)^{-1}$ en série de puissances de z, et en intervertissant série et intégrale.

Une *fonction entière* est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$; on sait qu'elle se représente sur $\mathbb{C}$ par une série entière de rayon de convergence infini.

Théorème de Liouville. *Si f est entière et $\mathrm{O}(|z|^{\mathrm{N}})$ à l'infini, alors f est un polynôme de degré $\leq \mathrm{N}$. En particulier, si f est bornée elle est constante. Si f tend vers 0 à l'infini elle est nulle.*

Preuve. — C'est toujours pareil : on écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

et pour tout entier $n \geq 0$,

$$|a_n| \leq r^{-n}\mathrm{M}(f, r).$$

Si $f(z) = \mathrm{O}(r^{\mathrm{N}})$, on aura

$$|a_n| \leq \mathrm{C}r^{-n}r^{\mathrm{N}},$$

d'où le résultat avec $r \to +\infty$: les a_n avec $n > \mathrm{N}$ sont nuls, et f est polynomiale de degré $\leq \mathrm{N}$.

Corollaire. D'Alembert-Gauss.

Preuve. — Si P est un polynôme de degré ≥ 1, on vérifie que $|\mathrm{P}(z)|$ tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'infini. Si P n'avait pas de zéro, la fonction $f(z) = 1/\mathrm{P}(z)$ serait entière et tendrait vers 0 à l'infini : sa valeur $f(z)$ serait donc nulle en tout point z d'après Liouville, ce qui est impossible pour l'inverse $1/\mathrm{P}(z)$ d'un nombre complexe.

Pôles, points singuliers essentiels

Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage épointé $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})^*$ d'un point z_0 ; alors f admet un développement de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ dans ce voisinage épointé.

— Si tous les a_n, $n < 0$ sont nuls, on a affaire à une singularité artificielle.

— On dit que z_0 est un *pôle* de la fonction f s'il existe un nombre *fini et non nul* de coefficients a_n, $n < 0$, qui sont non nuls.

— On dit que z_0 est une *singularité essentielle* de la fonction f s'il existe un nombre *infini* de coefficients a_n, $n < 0$, qui sont non nuls.

Un théorème de Weierstrass dit que si z_0 est une singularité essentielle pour f, alors l'image $f(\mathrm{D}(z_0, \delta)^*)$ de tout disque épointé tel que $0 < \delta \leq \mathrm{R}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Principe des zéros isolés

Proposition. *Si $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de $z_0 \in \Omega$, il existe un disque épointé $\mathrm{D}(z_0, r)^*$ dans lequel f ne s'annule pas.*

Preuve. — Soit R tel que $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R}) \subset \Omega$; dans le disque ouvert de rayon R, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Il n'est pas possible que tous les a_n soient nuls, sinon f serait identiquement nulle dans le voisinage $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$ de z_0. On peut donc écrire

$$f(z) = a_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + a_{n_0+1}(z - z_0)^{n_0+1} + \cdots,$$

avec a_{n_0} non nul, donc

$$f(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0}\Big(1 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \cdots\Big) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0}\varphi(z)$$

avec φ holomorphe, $\varphi(z_0) = 1$, donc, par continuité, la fonction φ reste non nulle dans un disque $\mathrm{D}(z_0, r)$. Dans $\mathrm{D}(z_0, r)^*$, la fonction f ne peut pas s'annuler.

Proposition. *Si $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, si z_n tend vers $z \in \Omega$, avec $z_n \neq z$ et $f(z_n) = 0$, alors f est nulle dans un voisinage de z. Si Ω est connexe, f est nulle en tout point de Ω.*

Preuve. — La première partie est la simple contraposition de la proposition précédente : on déduit que f est nulle dans un ouvert contenant z, et il en résulte que toutes les dérivées sont nulles dans le même ouvert. Pour le cas connexe, on pose

$$\mathrm{Z} = \{w \in \Omega : \forall n \geq 0,\ f^{(n)}(w) = 0\}.$$

Cet ensemble est fermé et ouvert dans Ω, et contient le point z. Il est donc égal à Ω.

Définition : fonctions méromorphes.

Un ensemble $\mathrm{E} \subset \Omega$ est *discret* dans Ω s'il est fermé dans Ω et si pour tout point $e \in \mathrm{E}$, il existe un disque ouvert centré en e qui ne contient aucun autre point de E.

Une fonction f est dite *méromorphe dans* Ω s'il existe un ensemble E discret dans l'ouvert Ω, si f est dans $\mathrm{H}(\Omega \setminus \mathrm{E})$ avec des pôles aux points de E.

Exemple : $\mathrm{cotan}(\pi z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. La fonction a des pôles aux entiers de $\mathbb{Z}$: comme elle est de période π, il suffit d'examiner $z = 0$,

$$\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z}\,\frac{\cos z}{1 - z^2/6 + \cdots} = \frac{\varphi(z)}{z} = \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}.$$

On a aussi comme exemple

$$g(z) = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

qui a un pôle simple en chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, et on peut montrer que $\pi\,\mathrm{cotan}(\pi z) - g(z)$ est entière, bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante. On voit finalement que la valeur constante est nulle, et on en déduit une identité d'Euler (voir Cartan par exemple).

Plus généralement $f_1(z)/f_2(z)$ est méromorphe dans Ω connexe quand f_1, f_2 sont holomorphes dans Ω, avec f_2 non identiquement nulle. Un théorème dit que dans un ouvert simplement connexe, toute fonction méromorphe est de cette forme.

Indice

Si z est un point de $\mathbb{C}$, et γ un lacet ne passant pas par z, on pose

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

Théorème. *L'indice est dans $\mathbb{Z}$, il est localement constant dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, il est nul dans la composante connexe de l'infini de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Preuve. — On considère un chemin fermé $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, ne passant pas par z, et on pose

$$\forall t \in [a,b], \qquad \Phi(t) = \exp\Big(-\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,\mathrm{d}s\Big).$$

La dérivée est

$$\Phi'(t) = -\Phi(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}.$$

Dérivons $(\gamma(t)-z)\Phi(t)$: on trouve 0, donc $\Phi(b) = \Phi(a) = 1$, ce qui montre que

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,\mathrm{d}s \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}.$$

L'indice de z apparaît comme une intégrale dépendant d'un paramètre. On montre facilement que le résultat est continu en z et tend vers 0 quand z tend vers l'infini. Comme les valeurs sont entières, le résultat en découle.

Formule de Cauchy : deuxième couche

Dans un étoilé, avec l'indice : si f est holomorphe dans un ouvert étoilé Ω, si γ est un lacet dans Ω ne passant pas par le point $z \in \Omega$, on a

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Preuve. — Dans un étoilé les intégrales des holomorphes sur les lacets sont nulles. On a donc

$$\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0,$$

et on décode cette information.

Principe du maximum

Théorème. *On suppose que $|f(z_0)|$ est un maximum local de $|f|$, où $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$; alors f est constante au voisinage de z_0.*

Preuve. — Avec les séries de Fourier, comme dans Rudin, ARC. Pour $r > 0$ petit on peut écrire

$$f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta},$$

et par Bessel

$$0 \ge \int_0^{2\pi}\Big(|f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 - |f(z_0)|^2\Big)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2 r^{2n},$$

qui entraîne $a_n = 0$ pour $n > 0$. La fonction f vaut a_0 au voisinage de z_0.

Cas relativement compact : si Ω est borné, si f est continue sur le compact $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans l'ouvert Ω, on a

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Preuve. — La fonction continue $|f|$ atteint son maximum en un point x_0 du compact $\overline{\Omega}$. Si x_0 est au bord, il n'y a rien à ajouter ; sinon, x_0 est dans une composante connexe Ω_1 de l'ouvert Ω, et $|f(x_0)|$ étant un maximum local, la fonction $f - f(x_0)$ est nulle au voisinage de x_0, donc nulle dans Ω_1 qui est connexe. Traçons une demi-droite horizontale D formée des points $x_0 + t$, $t \geq 0$; elle ne peut rester dans Ω_1 qui est borné. Si $t_0 > 0$ est le plus petit réel tel que $x_0 + t_0 \notin \Omega$, alors $x_1 = x_0 + t_0$ est au bord de Ω et par continuité $|f(x_1)| = |f(x_0|$: le maximum de $|f|$ est *aussi* atteint au bord.

Lemme des trois droites

On considère la bande ouverte $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. Le bord $\partial\mathrm{S}$ de la bande est formé des deux droites verticales $\operatorname{Re} z = 0$ et $\operatorname{Re} z = 1$.

Théorème. *Si f est holomorphe dans la bande* S, *continue* et bornée *sur l'adhérence, alors f est bornée sur* S *par son sup au bord,*

$$\sup_{z \in \mathrm{S}} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\mathrm{S}} |f(z)|.$$

Preuve. — D'abord le cas où f tend vers 0 à l'infini se ramène facilement au cas borné. Ensuite, on fixe z_0 dans la bande, on multiplie $f(z)$ par $\mathrm{e}^{\varepsilon z^2}$ pour que le produit

$$g(z) = \mathrm{e}^{\varepsilon z^2} f(z)$$

tende vers 0 à l'infini. D'après le premier cas on déduit

$$|g(z_0)| \leq \max_{z \in \partial\mathrm{S}} |g(z)| \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} \sup_{z \in \partial\mathrm{S}} |f(z)|,$$

et on fait tendre $\varepsilon > 0$ vers 0 pour conclure.

Contre-exemple $\cos(z)$, quand la fonction n'est pas supposée bornée sur la bande. Ici la bande est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On a pour $z = x + \mathrm{i}y$

$$2 \operatorname{Re} \cos z = \operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}\Big)$$

$$= \operatorname{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y}\Big) = \cos(x)\big(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}\big),$$

donc

$$\operatorname{Re} \cos(z) = \operatorname{ch}(y) \cos(x)$$

qui est nul sur les verticales $\operatorname{Re} z = \pm\pi/2$. Alors

$$f(z) = \exp\big(\cos(z)\big)$$

est holomorphe dans la bande, de module 1 sur les bords, mais au centre

$$|f(\mathrm{i}y)| = \exp\big(\operatorname{Re} \cos(z)\big) = \exp\big(\operatorname{ch}(y)\big)$$

est extrêmement non bornée.