Projection de plus courte distance et minimisation de fonctions

On va énoncer un résultat un peu plus général que l'existence de la projection de plus courte distance sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.

Lemme 1. *Si f est une fonction réelle continue sur un convexe fermé non vide* C *d'un espace de Banach* E*, minorée, et qui vérifie pour un $p > 0$ que*

$$(\mathrm{USC}_1) \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathrm{C}, \qquad \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} - f\Bigl(\frac{y_1 + y_2}{2}\Bigr) \geq \Bigl\|\frac{y_1 - y_2}{2}\Bigr\|^p,$$

alors f atteint son minimum sur C*, en un point unique.*

En particulier, la fonction f est convexe sur C, et même strictement convexe, avec de plus une *uniformité* dans le caractère strictement convexe. Par ailleurs, on peut toujours écrire $y_1 = x + v$, $y_2 = x - v$, où x est le milieu du segment $[y_1, y_2]$ et $v = (y_1 - y_2)/2$, et récrire la propriété de f sous la forme équivalente

$$(\mathrm{USC}_2) \qquad \frac{f(x + v) + f(x - v)}{2} \geq f(x) + \|v\|^p$$

chaque fois que $x \pm v \in \mathrm{C}$. En fait, l'hypothèse (USC) entraîne que f est minorée, on pourrait donc enlever cette hypothèse dans le lemme 1, comme nous le verrons à la fin de ce texte. Toutefois, dans les exemples qui nous intéresserons, il sera très facile de vérifier que la fonction est minorée, alors que le résultat général est un peu embêtant à prouver.

Preuve du lemme 1. — Puisque f est minorée et C non vide, la borne inférieure b des valeurs de f sur C existe (comme valeur réelle, finie) ; pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{C} : f(x) \leq b + 2^{-n}\}$$

est non vide, fermé, décroissant en n. Si y_1, y_2 sont deux points quelconques de F_n, posons $x = (y_1 + y_2)/2$, qui est un point du convexe C, donc $f(x) \geq b$; d'après l'hypothèse (USC), on a

$$\Bigl\|\frac{y_1 - y_2}{2}\Bigr\|^p \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} - f(x) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2} - b \leq (b + 2^{-n}) - b = 2^{-n},$$

donc $\|(y_2 - y_1)/2\| \leq 2^{-n/p}$. Cela montre que le diamètre de F_n est $\leq 2^{1-n/p}$, donc les diamètres des (F_n) tendent vers 0, l'intersection est non vide dans le complet E, et réduite à un point. Pour le point (unique) y_0 de l'intersection, on a $f(y_0) = b$ à la limite.

L'unicité est évidente : tout point y minimisant la fonction f est dans tous les F_n, et l'intersection des (F_n) est réduite au point y_0.

Remarque. Il suffisait que f soit s.c.i. sur C, puisqu'on a seulement utilisé le fait que les ensembles $\{f \leq c\}$ étaient fermés.

On va donner deux exemples d'application du lemme 1.

Exemple 1 : projection de plus courte distance
On fixe un point p_0 dans un espace de Hilbert H et on pose $f(x) = \|x - p_0\|^2$ pour tout $x \in \mathrm{H}$; pour deux points $x + v$ et $x - v$ dans H, la relation du parallélogramme dit que

$$f(x) + \|v\|^2 = \|x - p_0\|^2 + \|v\|^2 = \frac{\|x - p_0 + v\|^2 + \|x - p_0 - v\|^2}{2} = \frac{f(x+v) + f(x-v)}{2},$$

la fonction f est continue minorée par 0, ce qui permet d'appliquer le lemme 1 à tout convexe fermé non vide C dans H. On prouve donc l'existence d'un point de C qui est le plus proche de p_0 : c'est la projection de p_0 sur C.

Théorème de projection. *Pour tout convexe fermé non vide* C *dans un espace de Hilbert* H *et pour tout point $x \in \mathrm{H}$, il existe un point y de* C*, unique, tel que*

$$\|x - y\| = d(x, \mathrm{C}).$$

Projecteurs linéaires
On a vu que si V est un sous-espace vectoriel du Hilbert H et x un point de H, on a l'équivalence

$$\big(y \in \mathrm{V},\ \ \|x - y\| = d(x, \mathrm{V})\big) \Leftrightarrow \big(y \in \mathrm{V},\ \ x - y \perp \mathrm{V}\big).$$

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, c'est un convexe fermé non vide ; d'après le théorème de projection, le point de F le plus proche existe toujours : si x_1 se projette en $y_1 = \mathrm{P_F} x_1 \in \mathrm{F}$ et si x_2 se projette en $y_2 = \mathrm{P_F} x_2 \in \mathrm{F}$, on en déduit que la projection de $\lambda x_1 + x_2$ est $\lambda y_1 + y_2$; en effet, $\lambda y_1 + y_2 \in \mathrm{F}$ et

$$(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) = \lambda(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)$$

est orthogonal à F,

$$\forall f \in \mathrm{F}, \quad \langle \lambda(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), f \rangle = \lambda \langle x_1 - y_1, f \rangle + \langle x_2 - y_2, f \rangle = 0.$$

L'application $\mathrm{P_F}$ est donc linéaire, et $\mathrm{P_F^2} = \mathrm{P_F}$ puisque si $y = \mathrm{P_F} x$, y est dans F et le point y lui-même est évidemment le point de F le plus proche de y, ce qui montre que $\mathrm{P_F} y = y$ et $\mathrm{P_F^2} x = \mathrm{P_F} x$; l'application $\mathrm{P_F}$ est le *projecteur orthogonal* sur F ; sa norme vérifie l'inégalité $\|\mathrm{P_F}\| \le 1$, puisque pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a par Pythagore

$$\|x\|^2 = \|\mathrm{P_F} x\|^2 + \|x - \mathrm{P_F} x\|^2 \ge \|\mathrm{P_F} x\|^2.$$

On a en fait $\|\mathrm{P_F}\| = 1$ dès que $\mathrm{F} \ne \{0\}$.

Corollaire. *On a pour tout sous-espace vectoriel fermé* F *de l'espace de Hilbert* H

$$\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp\,; \quad (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

La projection orthogonale sur $\mathrm{F}^\perp$ *est* $\mathrm{Id} - \mathrm{P_F}$*, qui est donc aussi de norme* ≤ 1.

Preuve. — On a $\mathrm{H} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$ puisque pour tout $x \in \mathrm{H}$,

$$x = \mathrm{P_F} x + (x - \mathrm{P_F} x) \in \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp,$$

et l'intersection de F et $\mathrm{F}^\perp$ est réduite à $\{0\}$ (tout vecteur de l'intersection est orthogonal à lui-même, donc nul). De plus $x - \mathrm{P_F} x \in \mathrm{F}^\perp$ et $x - (x - \mathrm{P_F} x) = \mathrm{P_F} x$ est orthogonal à $\mathrm{F}^\perp$, donc $\mathrm{P}_{\mathrm{F}^\perp} x = x - \mathrm{P_F} x$.

On a de même $\mathrm{H} = \mathrm{F}^\perp \oplus (\mathrm{F}^\perp)^\perp$, et la projection sur $(\mathrm{F}^\perp)^\perp$ est $\mathrm{Id} - \mathrm{P}_{\mathrm{F}^\perp} = \mathrm{P_F}$, d'où on déduit que $(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.

Exemple 2 : dual de H ou de L^p, quand $2 \le p < +\infty$

Théorème (attribué à F. Riesz). *Pour toute forme linéaire continue ℓ sur un espace de Hilbert* H*, il existe un vecteur $y_0 \in$ H, unique, tel que*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \qquad \ell(x) = \langle x, y_0 \rangle.$$

On peut déduire ce résultat du corollaire précédent, appliqué au noyau $\mathrm{F} = \ker \ell$ d'une forme linéaire continue non nulle ℓ, qui dit que $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$, où $\mathrm{F}^\perp$ est alors de dimension 1, engendré par le vecteur y_0 cherché ; mais on va adopter une démarche légèrement différente qui est généralisable au cas du dual de l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, au moins quand $2 \le p < +\infty$, un cas qu'on traitera plus loin.

Preuve. — On commence par supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On va appliquer le lemme 1 à la fonction f définie sur H par

$$f(x) = \|x\|^2 - 2\,\ell(x).$$

Cette fonction est réelle, continue, et minorée, car

$$\|x\|^2 - 2\,\ell(x) \ge \|x\|^2 - 2\,\|x\|\,\|\ell\| \ge -\|\ell\|^2.$$

De plus, pour tous x, v dans H, on a que

$$\frac{f(x+v) + f(x-v)}{2} = \frac{\|x+v\|^2 + \|x-v\|^2}{2} - 2\,\frac{\ell(x+v) + \ell(x-v)}{2}$$

$$= \|x\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\ell(x) = f(x) + \|v\|^2,$$

ce qui permet d'appliquer le lemme 1 : la fonction f atteint son minimum en un point y_0 de H.

Pour tout vecteur v de H, on a donc $f(y_0 + tv) \ge f(y_0)$ pour tout t réel. Si la fonction $t \to f(y_0 + tv)$ est dérivable, on en déduira que sa dérivée est nulle au point $t = 0$. Or

$$f(y_0 + tv) = \|y_0 + tv\|^2 - 2\,\ell(y_0 + tv)$$

est un trinôme,

$$f(y_0 + tv) = \|y_0\|^2 + 2t\langle v, y_0 \rangle + t^2\|v\|^2 - 2t\,\ell(v) - 2\,\ell(y_0)$$

(pas besoin de partie réelle : le produit scalaire est réel ici !), de dérivée

$$2\langle v, y_0 \rangle + 2t\|v\|^2 - 2\,\ell(v),$$

dont la nullité en $t = 0$ fournit la relation voulue,

$$\ell(v) = \langle v, y_0 \rangle,$$

pour tout v dans H. Dans le cas complexe, on commence par oublier les complexes, et on munit H du produit scalaire réel

$$x \cdot y = \mathrm{Re}\langle x, y \rangle.$$

D'après ce qui précède, la forme $\mathbb{R}$-linéaire $\operatorname{Re} \ell$ peut s'écrire, pour un certain $y_0 \in \mathrm{H}$ et pour tout $x \in \mathrm{H}$,

$$\operatorname{Re} \ell(x) = x \cdot y_0 = \operatorname{Re}\langle x, y_0\rangle.$$

Comme ℓ est $\mathbb{C}$-linéaire,

$$\operatorname{Im} \ell(x) = -\operatorname{Re}\bigl(\mathrm{i}\ell(x)\bigr) = -\operatorname{Re} \ell(\mathrm{i}x) = -(\mathrm{i}x) \cdot y_0 = -\operatorname{Re}\langle \mathrm{i}x, y_0\rangle = \operatorname{Im}\langle x, y_0\rangle\,;$$

il en résulte que pour tout $x \in \mathrm{H}$, on a $\ell(x) = \langle x, y_0\rangle$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarques.

1. On a joué petit bras, en n'osant pas dire les grands mots : la fonction f de la preuve précédente est *différentiable* sur H, donc sa différentielle

$$h \in \mathrm{H} \to 2\langle h, x\rangle - 2\,\ell(h),$$

au point minimum y_0 est nulle.

2. On a dit avant la preuve que la démonstration la plus habituelle consiste à projeter orthogonalement sur le noyau F de ℓ, c'est-à-dire à minimiser $\|y - p_0\|^2$, où $\ell(p_0) = 1$, sous la contrainte $y \in \mathrm{F}$, autrement dit $\ell(y) = 0$. De façon équivalente, il s'agit de minimiser $\|y\|^2$ sous la contrainte $\ell(y) = 1$; la preuve précédente suit la démarche habituelle des *multiplicateurs de Lagrange*, qui consiste à minimiser

$$\|x\|^2 - \lambda\,\ell(x)$$

sur l'espace entier, pour un λ convenable, le multiplicateur de Lagrange. Ici, nous avions deviné que $\lambda = 2$ était le bon choix.

Dual de L^p, pour $2 \le p < +\infty$

On va voir que l'identification du dual de L^p, pour $2 \le p < +\infty$, peut suivre un cheminement presque identique à celui qu'on a suivi pour un espace de Hilbert. On partira de l'inégalité suivante, qui généralise l'identité quadratique qui est à la base de la relation du parallélogramme : si $2 \le p < +\infty$, on a pour tous les réels x, v que

$$(*) \qquad \frac{|x+v|^p + |x-v|^p}{2} \ge |x|^p + |v|^p.$$

Cette inégalité est facile à voir quand p est un entier pair ≥ 2, et elle est évidente dans le cas où $p = 4$,

$$\frac{(x+v)^4 + (x-v)^4}{2} = x^4 + 6x^2v^2 + v^4 \ge x^4 + v^4.$$

On prouvera $(*)$ plus loin.

Proposition. *Pour tout réel p tel que $1 < p < +\infty$ et pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, le dual de l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$ s'identifie à $\mathrm{L}^q(\Omega, \mu)$, où $1/q = 1 - 1/p$: pour toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$, il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^q(\Omega, \mu)$ (unique) telle que*

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mu), \qquad \ell(f) = \int_\Omega f(\omega) g(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

On va démontrer le cas $2 \le p < +\infty$ au moyen du lemme 1 de minimisation. Le cas où on a $1 < p \le 2$ ne s'obtient pas aussi facilement par la méthode de minimisation (mais on peut le faire, voir plus loin).

Preuve. — On traite d'abord le cas réel. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$; on définit une fonction φ sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mu)$ en posant

$$\forall f \in \mathrm{L}^p, \qquad \varphi(f) = \int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu - p\,\ell(f) = \|f\|_p^p - p\,\ell(f).$$

On a d'après $(*)$ et la linéarité de ℓ que

$$\frac{\varphi(f+v) + \varphi(f-v)}{2} = \int_\Omega \Bigl(\frac{|f+v|^p + |f-v|^p}{2} \Bigr) \,\mathrm{d}\mu - p\,\ell(f)$$

$$\ge \int_\Omega \bigl(|f|^p + |v|^p \bigr) \,\mathrm{d}\mu - p\,\ell(f) = \varphi(f) + \|v\|^p.$$

Par ailleurs d'après la relation $uv \le u^p/p + v^q/q$, vraie pour u, v réels ≥ 0,

$$\varphi(f) \ge \|f\|^p - p\,\|\ell\|\,\|f\| \ge \|f\|^p - p\Bigl(\frac{\|\ell\|^q}{q} + \frac{\|f\|^p}{p} \Bigr) = -p\,\frac{\|\ell\|^q}{q}$$

est minorée. Au point f_0, minimum de la fonction φ, la différentielle de φ s'annule, ou plus modestement, on peut dire qu'on a pour tout v de L^p

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Bigl(\int_\Omega \bigl|f_0 + tv\bigr|^p \,\mathrm{d}\mu - p\,\ell(f_0 + tv) \Bigr) = p \int_\Omega f_0^{[p-1]} v \,\mathrm{d}\mu - p\,\ell(v) = 0,$$

où on a posé pour s réel et $\alpha > 0$

$$s^{[\alpha]} = |s|^\alpha \,\mathrm{sign}(s)$$

(la dérivée de $s \in \mathbb{R} \to |s|^p$ est $s \to p s^{[p-1]}$). On a donc, en posant $g = f_0^{[p-1]} \in \mathrm{L}^q$, pour toute fonction $v \in \mathrm{L}^p$,

$$\ell(v) = \int_\Omega v(\omega) g(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega),$$

et

$$\int_\Omega |g(\omega)|^q \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega |f_0(\omega)|^{q(p-1)} \,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega |f_0(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) < +\infty.$$

Pour justifier la dérivation sous le signe somme, au voisinage de 0, de la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \int_\Omega |f_0(\omega) + tv(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega),$$

on note que pour $|t| \le 1$, la dérivée par rapport au paramètre t de la fonction sous l'intégrale est majorée par une fonction intégrable fixe,

$$\bigl|p(f_0(\omega) + tv(\omega))^{[p-1]} v(\omega)\bigr| \le p\bigl(|f_0(\omega)| + |v(\omega)|\bigr)^{p-1} |v(\omega)| \le p\bigl(|f_0(\omega)| + |v(\omega)|\bigr)^p$$

qui est intégrable puisque L^p est un espace vectoriel.

Dans le cas complexe on pourra représenter séparément $\operatorname{Re}\ell$ et $\operatorname{Im}\ell$ par g_1 et g_2, puis regrouper en

$$\ell(v) = \int_\Omega v(\omega)(g_1(\omega) + \mathrm{i}g_2(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega),$$

avec $g(\omega) = g_1(\omega) + \mathrm{i}g_2(\omega) \in \mathrm{L}^q$.

Remarque. On a aussi l'égalité de norme

$$\|\ell\| = \|g\|_q.$$

Dans le cas réel, cela résulte de la preuve précédente : on écrit que

$$\|g\|_q^q = \int_\Omega |f_0|^p\,\mathrm{d}\mu = \ell(f_0\,\mathrm{sign}(f_0)) \le \|\ell\|\,\|f_0\|_p = \|\ell\|\,\|g\|_q^{q/p}$$

donc $\|g\|_q \le \|\ell\|$ et l'inégalité de Hölder fournit l'inégalité opposée.

On en vient à la preuve de l'inégalité $(*)$. Il est commode de démontrer un lemme un peu plus abstrait.

Lemme. *On suppose que φ est paire continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$, avec $x \to \varphi(\sqrt{x})$ et φ' convexes sur $\mathbb{R}_+$. On a*

$$\frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)}{2} \ge \varphi(x) + \varphi(y).$$

Preuve. — Posons

$$k(x,y) = \frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)}{2} - \varphi(x) - \varphi(y)$$
$$= \frac{\varphi(|x+y|) + \varphi(|x-y|)}{2} - \varphi(x) - \varphi(y).$$

On note que $k(x,y) = k(x,-y)$, puis que $k(x,y) = k(y,x)$. Par ces symétries, il suffit de considérer le cas $0 \le y \le x$. Étudions pour $x \in [y, +\infty[$, y fixé ; on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(x,y) = \frac{\varphi'(x+y) + \varphi'(x-y)}{2} - \varphi'(x) \ge 0$$

par convexité de φ' sur $\mathbb{R}_+$, puisque $0 \le x - y \le x \le x + y$. Par ailleurs

$$k(y,y) = \frac{\varphi(2y)}{2} - 2\varphi(y) \ge 0$$

par la convexité et nullité en 0 de $\psi(y) = \varphi(\sqrt{y})$, qui impliquent la croissance de $\psi(t)/t$, donc

$$\frac{\psi(4y^2)}{4y^2} \ge \frac{\psi(y^2)}{y^2},$$

ce qui donne $\varphi(2y)/4 \ge \varphi(y)$.

Conséquence. Pour $2 \le p < +\infty$, avec $\varphi(x) = |x|^p$

$$\frac{|x+y|^p + |x-y|^p}{2} \ge |x|^p + |y|^p,$$

et l'inégalité inverse quand $1 < p \le 2$ avec $\varphi(x) = -|x|^p$.

Dual de L^p, *pour* $1 < p \leq 2$

Il y a plusieurs pistes pour traiter ce cas :

— utiliser une inégalité analogue à $(*)$, mais un peu plus difficile à établir ;

— établir la *réflexivité* de L^q, $2 \leq q < +\infty$ et s'en servir pour trouver le dual de L^p, $1 < p \leq 2$;

— ramener le cas de L^p à celui de L^2.

Une façon de remplir le premier contrat est de prouver d'abord l'inégalité suivante pour des réels : si $1 < p \leq 2$ et $1/q = 1 - 1/p$, on a

$$\forall x, v \in \mathbb{R}, \qquad \frac{|x+v|^p + |x-v|^p}{2} \geq \big(|x|^q + |v|^q\big)^{p/q},$$

qui entraîne pour la norme de L^p *l'inégalité de Clarkson*,

$$\forall x, v \in \mathrm{L}^p, \qquad \frac{\|x+v\|_p^p + \|x-v\|_p^p}{2} \geq \big(\|x\|_p^q + \|v\|_p^q\big)^{p/q}.$$

Cette inégalité permet de généraliser le lemme 1.

Pour la deuxième piste : l'inégalité $(*)$ entraîne que la propriété de projection de plus courte distance sur les convexes fermés non vides est vraie dans L^q, et implique que l'intersection d'une famille décroissante de convexes fermés bornés dans L^q, non vides, est non vide. Supposons donnée une forme linéaire continue ℓ sur L^p ; considérons pour toute partition finie

$$\pi = \{\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$$

de Ω telle que $0 < \mu(\mathrm{A}_i) < +\infty$ pour $i \geq 1$ le convexe C_π des fonctions $g \in \mathrm{L}^q$ qui vérifient que $\|g\|_q \leq \|\ell\|$ et représentent la forme linéaire sur les π-étagées : si

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}, \quad \text{alors} \quad \ell(f) = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu.$$

L'intersection des convexes C_π fournit la fonction $g \in \mathrm{L}^q$ qui représente ℓ.

Troisième voie : quand la mesure est finie, on peut considérer l'injection continue

$$j : \mathrm{L}^2 \longrightarrow \mathrm{L}^p\,;$$

alors $\ell \circ j$ est une forme linéaire continue sur L^2, qu'on peut représenter. On peut adapter l'argument pour une mesure générale.

La propriété (USC) *entraîne la minoration*

Supposons d'abord que g soit définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset [0, +\infty[$ contenant 0 et 1, que $g(0) = 0$ et que g vérifie la propriété (USC). Posons

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}(g) = \sup\{|g(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Tant que les entiers $k+2$ et k sont dans I, on a d'après la propriété (USC) que

$$\big(g(k+2) - g(k+1)\big) - \big(g(k+1) - g(k)\big) = \big(g(k+2) + g(k)\big) - 2g(k+1) \geq 2.1^p = 2,$$

donc pour $k \geq 0$,

$$g(k+1) - g(k) \geq g(1) - g(0) + 2k = g(1) + 2k.$$

Comme g est convexe, on a aussi quand $t \geq 1$ est dans I, et si $k+1 \leq t < k+2$,

$$g'_d(t) \geq g(k+1) - g(k) \geq g(1) + 2(t-2) = (g(1)-2) + 2(t-1)$$

et

$$g(t) - g(1) = \int_1^t g'_d(s)\,\mathrm{d}s \geq (t-1)(g(1)-2) + (t-1)^2$$

qu'on peut minorer par

$$-\big(g(1)-2\big)^2/4 \geq -\mathrm{M}^2/4 - \mathrm{M} - 1\,;$$

il en résulte que $g(t) \geq -\mathrm{M}^2/4 - 2\mathrm{M} - 1$. Si le point t est dans $[0,1]$, on a $g(t) \geq -\mathrm{M}$. On conclut que la fonction g est minorée sur I par $-\mathrm{M}^2/4 - 2\mathrm{M} - 1$.

Supposons maintenant que f continue vérifie (USC) sur un convexe C d'un espace de Banach ; on peut supposer que C contient 0 et que $f(0) = 0$. On peut trouver $\delta > 0$ tel que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathrm{C}$ tel que $\|x\| \leq \delta$. Posons alors pour tout vecteur u de norme 1

$$g_u(t) = \delta^{-p} f(\delta t u),$$

pour tous les $t \geq 0$ tels que $\delta t u \in \mathrm{C}$.

Supposons d'abord que $\delta u \in \mathrm{C}$. Alors g_u vérifie (USC) sur un certain intervalle I de $[0, +\infty[$, contenant 0 et 1, et $\mathrm{M}(g_u) \leq \delta^{-p}$. Il en résulte que f est minorée sur C, dans la direction u, par

$$-\delta^{-2p}/4 - 2\delta^{-p} - 1.$$

Si δu n'est pas dans C, tous les points $\delta t u \in \mathrm{C}$ avec $t \geq 0$ sont de norme $\leq \delta$, donc g_u est bornée par δ^{-p}. Dans tous les cas, dans toutes les directions, on a la minoration

$$\forall x \in \mathrm{C}, \qquad f(x) \geq -\delta^{-2p}/4 - 2\delta^{-p} - 1.$$