cours 3, le 15 décembre 2010

Séries de Fourier

Quelques sources : Chatterji, vol. 3 ; Queffélec-Zuily, chap. IV ; W. Rudin, Analyse réelle et complexe ; Arnaudiès-Fraysse vol. 3, compléments d'Analyse ; L. Schwartz, Méthodes Mathématiques pour les sciences Physiques (MMP), Hermann.

Point de vue périodique et point de vue sur une période

Si f est définie sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi)$, on introduit la fonction $\widetilde{f}$, définie sur $\mathbb{R}$, qui est telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $-\pi \le t < \pi$ on ait

$$\widetilde{f}(2n\pi + t) = f(t),$$

c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[2n\pi - \pi, 2n\pi + \pi)}(x) f(x - 2n\pi).$$

On rencontre des problèmes évidents de continuité ou de dérivabilité pour la fonction prolongée : si f était prolongeable en fonction continue sur $[-\pi, \pi]$, la fonction $\widetilde{f}$ ne sera continue sur $\mathbb{R}$ que si $f(\pi) = f(-\pi)$, et pour un prolongement de classe C^1 il faudra ajouter la condition $f'(\pi) = f'(-\pi)$. Notons que les fonctions à support compact dans *l'ouvert* $]-\pi, \pi[$ ne posent aucun problème.

Par exemple, si on pose

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2}$$

quand $0 < t < 2\pi$, et $f(0) = 0$, on prolonge f en une fonction 2π-périodique $\widetilde{f}$, qu'on notera f_0 dans la suite. La fonction f_0 est impaire sur $\mathbb{R}$: si $-\pi \le x < 0$,

$$f_0(x) = f(x + 2\pi) = \frac{\pi - x - 2\pi}{2} = -\frac{\pi + x}{2} = -\frac{\pi - |x|}{2} = -f_0(-x),$$

donc f_0 est 2π-périodique et impaire sur $[-\pi, \pi]$, par conséquent impaire sur $\mathbb{R}$.

Si f est mesurable positive et 2π-périodique, on vérifie que

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas de a (changement de variable linéaire pour découper-ramener en $(0, 2\pi)$).

On utilisera régulièrement

$$\mathrm{d}\mu(x) = \mathbf{1}_{(-\pi,\pi)}(x)\frac{\mathrm{d}x}{2\pi},$$

considéré comme mesure sur $\mathbb{R}$, qu'on appliquera à une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Si f est 2π-périodique et $|f|^p$ localement intégrable, on posera

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p(\mu)} = \Bigl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \,\mathrm{d}\mu(t)\Bigr)^{1/p} = \Bigl(\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^p \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\Bigr)^{1/p}.$$

Convolution périodique
Si f, g sont localement intégrables et 2π-périodiques, on pose (pour presque tout x réel)

$$(f \underset{\text{per}}{*} g)(x) = \int_a^{a+2\pi} f(x-t) g(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi},$$

résultat indépendant de a, ce qui arrange bien les choses, par exemple pour montrer la commutativité de la convolution,

$$f \underset{\text{per}}{*} g = g \underset{\text{per}}{*} f.$$

Si G coïncide avec g sur une période, et G nulle en dehors de cette période, on a

$$(f \underset{\text{per}}{*} g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \mathrm{G}(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} (f * \mathrm{G})(x),$$

ce qui permet de ramener la plupart des propriétés de la convolution périodique à celles de la convolution ordinaire.

Série de Fourier d'une fonction de $\mathrm{L}^1(0, 2\pi)$
Si f est intégrable sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[0, 2\pi]$, ou bien si elle est 2π-périodique localement intégrable, on définit les coefficients de Fourier $c_n(f)$, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, par

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$

On voit qu'on peut borner $c_n(f)$ par la norme $\mathrm{L}^1(\mu)$,

$$|c_n(f)| = \Bigl| \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \Bigr| \le \int_0^{2\pi} \bigl| f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \bigr| \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mu)}.$$

Quand f est dans $\mathrm{L}^2(\mu)$, on voit que

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle_{\mathrm{L}^2(\mu)}.$$

On voit aussi que

$$(f \underset{\text{per}}{*} e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)} \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \Bigl(\int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \Bigr) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

c'est-à-dire que

$$f \underset{\text{per}}{*} e_n = c_n(f) \, e_n.$$

La convolution (périodique) avec un polynôme trigonométrique

$$\mathrm{P} = \sum_{k=-n}^{n} a_k \, e_k \in \mathcal{P}$$

donne par conséquent

$$f \underset{\text{per}}{*} \mathrm{P} = \sum_{k=-n}^{n} a_k c_k(f) e_k,$$

ce qui est à rapprocher des rapports Fourier-convolution sur $\mathbb{R}$: les coefficients de Fourier de la convolée sont le produit des coefficients de Fourier.

En particulier, on pose pour tout $n \ge 0$

$$\mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^{2\pi} e_k(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e_0(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1.$$

Le polynôme trigonométrique D_n s'appelle *noyau de Dirichlet* ; on a

$$f \underset{\mathrm{per}}{*} \mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k,$$

qui s'appelle la $n$ème somme de Fourier de f,

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,.$$

Calcul du noyau de Dirichlet

Pour $m < n$, on écrit

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2})\big(e_m(x) + \cdots + e_n(x)\big) = -\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1/2)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x}\,.$$

Dans le cas symétrique où $\mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$, on trouve ainsi que

$$\forall x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{D}_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2}} = \frac{\sin\big[(n+1/2)x\big]}{\sin(x/2)}.$$

On définit aussi les *coefficients de Fourier réels* de la fonction f par

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \quad n \ge 0\,; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t, \quad n \ge 1\,;$$

on note que $a_0 = 2c_0$; comme $a_n - \mathrm{i}b_n = 2c_n$ et $a_n + \mathrm{i}b_n = 2c_{-n}$ pour tout $n \ge 1$, on voit que

$$a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,.$$

La somme de Fourier $\mathrm{S}_n f$ s'écrit donc aussi

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big).$$

Exemple de $(\pi - x)/2$: dans le cas de fonctions réelles présentant une symétrie il est souvent plus commode de travailler avec les coefficients réels a_n, b_n ; pour la fonction 2π-périodique f_0 correspondante, on a par imparité de f_0 que

$$a_n = 0, \qquad n \ge 0,$$

et pour tout entier $n \ge 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[-(\pi - t)\frac{\cos(nt)}{n}\Big]_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\Big) = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

donc

$$(\mathrm{S}_n f_0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Riemann-Lebesgue

Si f est 2π-périodique localement intégrable, définissons F sur $\mathbb{R}$ en posant $\mathrm{F}(t) = f(t)$ sur une période, par exemple quand $-\pi \le t < \pi$, et en posant $\mathrm{F}(t) = 0$ sinon ; alors on a $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 quand $|\lambda| \to +\infty$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On a aussi convergence vers 0 si on remplace $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$ par $\cos(\lambda t) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t})/2$ ou par $\sin(\lambda t)$. En particulier quand $|n| \to +\infty$

$$c_n(f) \to 0.$$

Le point de vue L^2

Le fait que les $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mu)$ se traduit exactement par

$$\|f - (\mathrm{S}_n f)\|_{\mathrm{L}^2(\mu)} \to 0$$

pour toute fonction 2π-périodique f localement de carré intégrable. De plus, l'égalité de Bessel montre que pour toute famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de scalaires de carré sommable, il existe une fonction 2π-périodique f localement de carré intégrable telle que $c_n(f) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mu)} = \Bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2\Bigr)^{1/2}.$$

Remarques sur la convergence ponctuelle et la théorie L^2

Si on sait que $(\mathrm{S}_n f)(x)$ converge simplement presque partout vers une limite $\mathrm{L}(x)$, cela implique que la somme $\mathrm{L}(x)$ de la série de Fourier au point x est égale à $f(x)$ pour presque tout x ; en effet, la convergence de $\mathrm{S}_n f$ vers f dans L^2 implique l'existence d'une sous-suite $(\mathrm{S}_{n_j} f)$ qui converge presque partout vers f, donc $f(x) = \mathrm{L}(x)$ presque partout,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\bigr) \quad \text{presque partout.}$$

On peut dire plus dans le cas « doublement continu »(continuité de la somme de la série et continuité de la fonction) : si $\lim(\mathrm{S}_n f)(x)$ existe en tout point d'un intervalle I (d'intérieur non vide), et si cette limite et $f(x)$ sont continues sur I, alors on a égalité en tout point de I. Dans le cas où f est continue et où les coefficients de Fourier de f sont absolument sommables, on déduit donc l'égalité en tout point de $f(x)$ et de la somme de la série de Fourier, qui est normalement convergente dans ce cas, donc a une somme continue.

Le (très difficile) théorème de Carleson précise la question de la convergence presque partout.

Théorème de Carleson (paru en 1966). *Pour toute fonction f dans $\mathrm{L}^2(\mu)$, les sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)(x)$ tendent vers $f(x)$ pour presque tout x.*

Exemple. La transformation d'Abel permet de prouver la convergence en tout point x de la série de Fourier

$$(s) \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$$

de notre exemple de départ f_0 ; on en déduit que la somme vaut $(\pi - x)/2$ pour presque tout x tel que $0 < x < 2\pi$.

Mais en fait, on peut montrer par la méthode d'Abel la convergence uniforme de la série (s) sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, quand $0 < \varepsilon < \pi$. On a donc, pour *tout* x tel que $0 < x < 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Cette égalité sera retrouvée par le théorème classique de Dirichlet.

Exemple d'application de Bessel-Parseval

Reprenons l'exemple de f_0, qui vaut $f_0(x) = (\pi - x)/2$ pour $x \in (0, 2\pi)$, et dont on a donné les coefficients de Fourier réels ; on va obtenir la valeur de $\sum_{n \geqslant 1} n^{-2}$:

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi u^2 \, \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} |f_0(u)|^2 \, \frac{\mathrm{d}u}{2\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{\sin(nx)}{n} \Bigr|^2 \, \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}.$$

Si une suite (f_n) converge dans $\mathrm{L}^2(\mu)$ vers une fonction f, les primitives (F_n) nulles en un point a convergent uniformément : pour $|x - a| \le 2\pi$,

$$|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}(x)| = \Bigl| \int_a^x \bigl(f_n(t) - f(t) \bigr) \, \mathrm{d}t \Bigr| \le \sqrt{x - a} \, \|f_n - f\|_2 \le 2\pi \, \|f_n - f\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}.$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[a, a + 2\pi]$. Par exemple, avec $\int_0^x$, on voit que

$$\int_0^x \Bigl(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k} \Bigr) \, \mathrm{d}t$$

converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers la primitive de f_0 nulle en 0 ; si $0 \le x \le 2\pi$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{\sin(nt)}{n} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(nx)}{n^2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{\pi x}{2}.$$

On a déjà calculé $\sum n^{-2}$, mais on pourrait le trouver maintenant ; on a en effet l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + c, \quad \text{pour} \quad 0 \le x \le 2\pi,$$

avec, à gauche, une série normalement convergente de fonctions d'intégrale nulle sur une période : on trouve ainsi la valeur de c, en faisant en sorte que l'intégrale du trinôme de droite soit nulle sur $[0, 2\pi]$, ce qui fournit la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{pour} \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

En continuant à prendre la primitive d'intégrale nulle sur chaque période, on pourra calculer $\zeta(2n)$ pour n entier ≥ 1. Les primitives en question ont un rapport étroit avec les polynômes de Bernoulli : il suffirait de travailler sur $[0,1]$ au lieu de $[0,2\pi]$, en posant $x = 2\pi y$ et en commençant par

$$\mathrm{B}_1(y) = y - \frac{1}{2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi y)}{k\pi},$$

égalité valable sur l'intervalle ouvert $(0,1)$. Ensuite, on a sur $[0,1]$

$$\mathrm{B}_2(y) = y^2 - y + \frac{1}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k\pi y)}{k^2\pi^2},$$

$$\mathrm{B}_3(y) = y^3 + \cdots = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2k\pi y)}{k^3\pi^3}, \quad \text{etc...}$$

Fourier et dérivées

Si f est 2π-périodique de classe C^1,

$$\int_0^{2\pi} \big(f'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} - \mathrm{i}nf(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \big(f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\big)'\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\Big]_{t=0}^{2\pi} = 0,$$

donc

$$c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f).$$

Pour une fonction f de classe C^k,

$$c_n(f^{(k)}) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f),$$

qui implique que $c_n(f) = \mathrm{O}(n^{-k})$, puisque f a une dérivée $f^{(k)}$ qui est dans $\mathrm{L}^1(\mu)$ (donc $c_n(f^{(k)})$ est borné par $\|f^{(k)}\|_{\mathrm{L}^1(\mu)}$). Les fonctions f périodiques de classe C^2 ont donc une série de Fourier absolument (ou normalement) convergente, dont la somme est égale à $f(x)$ en tout point, d'après les remarques de la section sur la convergence ponctuelle presque partout.

Réciproquement, si $c_n(f) = \mathrm{O}(n^{-k-2})$, on peut dériver k fois terme à terme la série de Fourier de la fonction f et conclure que f est de classe C^k. La différence ($k+2$ au lieu de k) entre les deux critères disparaît dans le cas C^∞ périodique : ces fonctions sont caractérisées par le fait que leurs coefficients sont à décroissance rapide, c'est-à-dire que $c_n(f) = \mathrm{O}(n^{-k})$ pour tout entier $k \geq 0$.

Théorème de Dirichlet

Rappelons que

$$\mathrm{D}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_n(x) = \frac{\sin[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)}.$$

Théorème de Dirichlet-Dini. *On suppose que f est 2π-périodique mesurable, localement intégrable, et qu'il existe une valeur ℓ telle que*

$$\int_0^{\pi} \Big| \ell - \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2} \Big| \,\frac{\mathrm{d}t}{t} < +\infty.$$

Alors

$$(\mathrm{S}_n f)(x_0) \to \ell.$$

Preuve. — On remarque que

$$g(t) = \frac{2\ell - f(x_0-t)) - f(x_0+t)}{\sin(t/2)}$$

est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, car si $0 < t \le \pi$, on a par concavité sur $[0, \pi]$ que $\sin(t/2) \ge t/\pi$, donc

$$\frac{1}{\sin(t/2)} \le \frac{\pi}{t}$$

ce qui ramène l'intégrabilité de g à l'hypothèse du théorème. On a de plus

$$\ell - (\mathrm{S}_n f)(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(\ell - f(x_0-t)\big)\mathrm{D}_n(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

et comme le noyau D_n est pair,

$$\begin{aligned}\ell - (\mathrm{S}_n f)(x_0) &= 2\int_0^{\pi} \Big(\ell - \frac{f(x_0-t)) + f(x_0+t)}{2}\Big) \frac{\sin(nt+t/2)}{\sin(t/2)}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\sin(nt+t/2)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, d'après Riemann-Lebesgue.

Corollaire. *Si f est dérivable en un point x_0 et 2π-périodique localement intégrable, la somme de la série de Fourier de f au point x_0 est égale à $f(x_0)$.*

Ce corollaire permet de retrouver les résultats qu'on a donnés précédemment (à partir de la théorie L^2) pour notre exemple f_0.

Définition des C^1 par morceaux non-nécessairement continues. On dit que f, définie sur $[a, b]$, est de classe C^1 par morceaux s'il existe une subdivision de $[a, b]$ en un nombre fini de segments $[a_j, b_j]$, de façon que la restriction de f à chaque intervalle ouvert (a_j, b_j) puisse se prolonger en fonction de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[a_j, b_j]$. Il en résulte en particulier que la fonction f admet en tout point x des limites à gauche et à droite, qu'on notera $f(x-)$ et $f(x+)$.

Corollaire : théorème de Dirichlet. *Si f est 2π-périodique, de classe* C^1 *par morceaux sur* $[0, 2\pi]$, *on a pour tout* x

$$(\mathrm{S}_n f)(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Convergence bilatérale

Si on utilise les coefficients de Fourier réels, le résultat précédent exprime bien la convergence « ordinaire » d'une série,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\bigr) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Mais si on utilise les exponentielles complexes e_n, la somme $\mathrm{S}_n f$ correspond à une somme *symétrique* de termes pris dans $\mathbb{Z}$. Ça n'est pas la notion habituelle de convergence pour une série à deux bouts

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

où on demande plutôt que les deux séries pour $n > 0$ et $n < 0$ soient toutes les deux convergentes (comme pour les intégrales généralisées sur $\mathbb{R}$). Les deux « bouts » ne sont pas convergents en général, même si le théorème de Dirichlet s'applique. Par exemple avec la série de $f_0(x) = (\pi - x)/2$, exprimée avec les e_n,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}n}, \qquad 0 < x < 2\pi,$$

il y a divergence « de chaque côté » quand on se place en $x = 0$: la série de Fourier complexe de f_0, au point $x = 0$, est donnée par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\mathrm{i}k} + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{2\mathrm{i}k},$$

et la série $\sum_{k \geqslant 1} 1/(2\mathrm{i}k)$ est divergente.

Le théorème de Carleson implique que la série de Fourier d'une fonction localement de carré intégrable converge bilatéralement pour presque tout x ; en effet, si f est dans $\mathrm{L}^2(\mu)$, la partie positive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

définit une nouvelle fonction $f_1 \in \mathrm{L}^2(\mu)$ d'après Bessel, à laquelle on peut appliquer Carleson.

Remarque. On retrouve avec Dirichlet le fait que les (e_n) forment une base hilbertienne (on oubliera donc ce fait ici, pour un instant) : si f est 2π-périodique de classe C^2, ses coefficients de Fourier sont absolument sommables, la série de Fourier converge en tout point et le théorème de Dirichlet dit que la somme est f. En fait, il y a convergence normale, donc uniforme : on trouve ainsi que toute fonction de classe C^2 et périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Théorème de Weierstrass périodique. *Toute fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

Squelette de preuve. — Pour une fonction 2π-périodique f continue sur $\mathbb{R}$, on considère $g = f * \varphi$, convolution ordinaire avec φ de classe C^2 à petit support contenant 0. Alors g est proche de f uniformément, et g est de classe C^2 et périodique, donc approchable par des polynômes trigonométriques.

La densité de $\mathcal{P}$ dans tous les $\mathrm{L}^p(0, 2\pi)$, $1 \le p < +\infty$, en découle par densité des fonctions continues périodiques dans les $\mathrm{L}^p(\mu)$, pour $1 \le p < +\infty$, en particulier dans $\mathrm{L}^2(\mu)$: on en déduit que les (e_n) forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mu)$.

Norme L^1 *de* D_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{D}_n(t)| \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{\sin(t/2)} \, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \ge \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(nt + t/2)| \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\ge \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(nt + t/2) \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi+\pi/2} \sin^2(u) \, \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{n\pi+\pi} \cos^2(v) \, \frac{\mathrm{d}v}{v - \pi/2} \ge \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \cos^2(v) \, \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

d'où

$$\ge \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\ln(2n+1)}{\pi}.$$

Avec Banach-Steinhaus, on déduit l'existence de fonctions périodiques continues f aux sommes $\mathrm{S}_n f$ non bornées en un point x_0 donné. On peut aussi trouver des fonctions continues dont les sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)(x)$ sont non bornées pour un ensemble dénombrable de points x (mais le théorème de Carleson limite nos ambitions pour des contre-exemples plus radicaux : si f est continue, elle est de carré sommable, donc la série de Fourier de f converge pour presque tout x).