Séries de vecteurs et familles sommables

On pourrait se contenter d'introduire le langage des familles sommables, qu'on peut considérer mieux adapté aux questions de séries orthogonales dans les espaces de Hilbert, mais il m'a semblé préférable de commencer par revenir sur le langage le plus classique, celui des séries de vecteurs.

Si E est un espace vectoriel normé, sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, et si $(u_k)_{k\geqslant n_0}$ est une famille de vecteurs de E, indexée par les entiers $k \in \mathbb{Z}$ tels que $k \geq n_0$, on définit pour tout $n \geq n_0$ la somme partielle

$$\mathrm{U}_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n \in \mathrm{E}.$$

On dit que la série de vecteurs $\sum u_n$ *converge dans* E si la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\geqslant n_0}$ converge, pour la norme de E, vers un vecteur $s \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{U}_n - s\|_{\mathrm{E}} = 0.$$

Dans ce cas, on dit que s est la *somme de la série* et on note

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = s.$$

Il y a un certain nombre d'évidences à dérouler : somme de séries convergentes, produit par un scalaire ; si $n_1 \geq n_0$, on a pour tout $n > n_1$ que

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} u_k + \sum_{k=n_1+1}^{n} u_k,$$

ce qui entraîne, quand n tend vers l'infini et si la série converge, l'évidence

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n_1} u_k + \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} u_k$$

qu'on utilisera plus loin.

Quand l'espace normé E est complet, on peut affirmer que *toute série de vecteurs de* E *telle que* $\sum \|u_k\| < +\infty$ *est convergente dans* E (en fait, cette affirmation équivaut à dire que E est complet : exercice), mais dans un espace de Hilbert on peut faire beaucoup mieux quand les vecteurs de la série sont deux à deux orthogonaux.

Théorème. *On suppose donnés des vecteurs* $(u_k)_{k\geqslant n_0}$ *d'un espace de Hilbert* H, *deux à deux orthogonaux. La série de vecteurs* $\sum u_k$ *converge dans* H *si et seulement si*

$$\sum_{k\geqslant n_0} \|u_k\|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, on a

$$\Big\| \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \Big\|^2 = \sum_{k\geqslant n_0} \|u_k\|^2.$$

Preuve. — Posons pour tout $n \geq n_0$

$$\mathrm{V}_n = \|u_{n_0}\|^2 + \|u_{n_0+1}\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2,$$

et comme d'habitude

$$\mathrm{U}_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n \in \mathrm{H}.$$

Pour $n_0 \leq m < n$, on aura

$$\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n,$$

donc par Pythagore

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\|^2 = \|u_{m+1}\|^2 + \|u_{m+2}\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2 = \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_m.$$

Il en résulte immédiatement que la suite (U_n) est de Cauchy dans H si et seulement si la suite (croissante) numérique (V_n) est de Cauchy, ou encore si cette suite numérique est bornée, c'est-à-dire que la série de vecteurs orthogonaux $\sum u_k$ converge dans H si et seulement si

$$\sum_{k \geqslant n_0} \|u_k\|^2 < +\infty.$$

Quand la série converge dans H, la somme de la série est la limite dans H de la suite (U_n), donc la norme de la somme est la limite de la norme de U_n,

$$\Big\| \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \Big\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \|\mathrm{U}_n\|^2 = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n_0}^{n} \|u_k\|^2 = \sum_{k \geqslant n_0} \|u_k\|^2.$$

Remarque. Il est clair que le critère numérique $\sum \|u_n\|^2 < +\infty$ est indépendant de l'ordre des termes de la série, donc la série de vecteurs correspondante converge encore dans H après toute permutation de ses termes. La somme est toujours la même : nous ne l'avons pas encore montré, ce sera l'un des gains de la notion de famille sommable.

Point de vue des familles sommables

Définition. Soit $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs d'un espace normé E ; on dit que la famille est *sommable* dans E s'il existe un vecteur $\mathrm{S} \in \mathrm{E}$ (la *somme de la famille*) possédant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fini $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{I}$ tel que pour tout sous-ensemble fini A de I contenant A_0, on ait

$$(*) \qquad \Big\| \mathrm{S} - \sum_{i \in \mathrm{A}} u_i \Big\| < \varepsilon.$$

Un tel vecteur S est unique : si S et S′ sont deux sommes pour la famille, on aura en prenant, pour $\varepsilon > 0$ donné, l'ensemble fini A_0 qui garantit $(*)$ pour S et A'_0 pour S′, puis en posant $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}'_0$,

$$\Big\| \mathrm{S} - \sum_{i \in \mathrm{A}} u_i \Big\| < \varepsilon, \quad \Big\| \mathrm{S}' - \sum_{i \in \mathrm{A}} u_i \Big\| < \varepsilon,$$

donc $\|\mathrm{S} - \mathrm{S}'\| < 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$.

Il est clair sur la définition que le vecteur S de E ne dépend d'aucune indexation particulière de l'ensemble I. Pour une famille sommable $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de somme S, on emploiera la notation

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i = \mathrm{S}.$$

Ici encore, il y a des évidences à dérouler : somme de deux familles, produit par un scalaire ; si on *réunit* deux familles sommables $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(u_j)_{j\in \mathrm{J}}$, I et J disjoints, la famille indexée par $\mathrm{I}\cup \mathrm{J}$ est sommable...

Si E est complet, on peut formuler un critère de Cauchy, nécessaire et suffisant pour la sommabilité, et on peut alors montrer qu'une famille sommable peut être partitionnée : si I est la réunion disjointe des sous-ensembles $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$, et si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable, il en résulte que les sous-familles $(u_i)_{i\in \mathrm{I}_\alpha}$ sont sommables et

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i = \sum_{\alpha\in \mathrm{A}} \Big(\sum_{i\in \mathrm{I}_\alpha} u_i\Big).$$

Familles sommables de réels positifs

Lemme 1. *Une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de nombres réels positifs est sommable si et seulement si*

$$m := \sup\Big\{\sum_{j\in \mathrm{J}} x_j : \mathrm{J}\subset \mathrm{I}, \mathrm{J} \textit{ fini}\Big\} < +\infty,$$

et quand cette famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est sommable on a

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} x_i = m.$$

Preuve. — Supposons que la famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ soit sommable, de somme S, et prenons un ensemble A_0 qui garantisse $(*)$ quand $\varepsilon = 1$. Pour tout sous-ensemble fini $\mathrm{J}\subset \mathrm{I}$, on a en prenant $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \cup \mathrm{J}$ que

$$\Big|\mathrm{S} - \sum_{j\in \mathrm{A}} x_j\Big| \le 1, \quad \text{donc } \sum_{j\in \mathrm{J}} x_j \le \sum_{j\in \mathrm{A}} x_j \le \|\mathrm{S}\| + 1,$$

par conséquent $m \le |\mathrm{S}| + 1 < +\infty$. Inversement, quand m est fini, on associe à $\varepsilon > 0$ un sous-ensemble fini $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{I}$ tel que $\sum_{j\in \mathrm{A}_0} x_j > m - \varepsilon$ et on vérifie facilement $(*)$: pour tout $\mathrm{A}\subset \mathrm{I}$ fini contenant A_0,

$$m - \varepsilon < \sum_{j\in \mathrm{A}_0} x_j \le \sum_{j\in \mathrm{A}} x_j \le m, \quad \text{donc } \Big|m - \sum_{j\in \mathrm{A}} x_j\Big| < \varepsilon.$$

Familles sommables et séries

Lemme 2. *Si* I *est un ensemble dénombrable (infini) et si la famille* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *de vecteurs de* E *est sommable, on a, pour toute énumération* $\mathrm{I} = \{i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots\}$ *de l'ensemble* I, *la convergence de la série* $\sum u_{i_n}$ *et l'égalité*

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}.$$

Preuve. — Désignons par S la somme de la famille sommable, soit $\varepsilon > 0$ donné et soit A_0 un sous-ensemble fini de I vérifiant $(*)$; il existe un entier N tel que

$$\mathrm{A}_0 \subset \{i_0, i_1, \ldots, i_{\mathrm{N}}\}\,;$$

pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$, l'ensemble $\mathrm{A} = \{i_0, \ldots, i_n\}$ contient A_0, donc

$$\Big\|\mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} u_{i_k}\Big\| = \Big\|\mathrm{S} - \sum_{j\in \mathrm{A}} u_j\Big\| < \varepsilon.$$

Remarque. Si une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, on a donc que toutes les séries permutées convergent, vers la même somme : on dit que la série *est commutativement convergente*, ou *inconditionnellement convergente*. Inversement, si une série de vecteurs converge pour toute permutation des entiers, alors la somme est toujours la même, et la famille de ces vecteurs est sommable (nécessairement de même somme, par le lemme 2).

Familles orthogonales dans un espace de Hilbert

Proposition. *Si* I *est un ensemble dénombrable (infini) et si les vecteurs* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *sont deux à deux orthogonaux dans l'espace de Hilbert* H, *la famille* $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i\in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$. *Quand la famille est sommable, la somme vérifie*

$$\Big\|\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i\Big\|^2 = \sum_{i\in \mathrm{I}} \|u_i\|^2.$$

Pour toute énumération $\mathrm{I} = \{i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots\}$ *de l'ensemble* I, *on a donc par le lemme précédent*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n} = \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i.$$

Preuve. — Supposons d'abord que $\sum_{i\in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$. Pour prouver l'existence de S, fixons une énumération $\mathrm{I} = \{i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots\}$ de l'ensemble dénombrable I. Pour des nombres réels positifs, on sait que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_{i_n}\|^2 = \sup\Big\{\sum_{j\in \mathrm{J}} \|u_j\|^2 : \mathrm{J} \subset \mathrm{I} \text{ fini } \Big\} = \sum_{i\in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty.$$

Sous cette hypothèse, on peut définir d'après le théorème

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n} \in \mathrm{H}, \quad \text{avec} \quad \|\mathrm{S}\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_{i_n}\|^2 = \sum_{i\in \mathrm{I}} \|u_i\|^2,$$

et il s'agit de montrer que S vérifie la propriété $(*)$ qui définit les familles sommables. Pour chaque sous-ensemble fini A de I, posons

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{A}} u_i \in \mathrm{H}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné et choisissons l'ensemble fini $\mathrm{A}_0 = \{i_0, i_1, \ldots, i_\mathrm{N}\}$ avec un N assez grand pour que

$$\sum_{i \notin \mathrm{A}_0} \|u_i\|^2 = \sum_{n > \mathrm{N}} \|u_{i_n}\|^2 < \varepsilon^2/4.$$

On a alors

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_{i_n} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_{i_n} = \mathrm{S}(\mathrm{A}_0) + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_{i_n},$$

donc

$$\|\mathrm{S} - \mathrm{S}(\mathrm{A}_0)\|^2 = \Big\| \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_{i_n} \Big\|^2 = \sum_{n > \mathrm{N}} \|u_{i_n}\|^2 < \varepsilon^2/4,$$

et on a $\|\mathrm{S} - \mathrm{S}(\mathrm{A}_0)\| < \varepsilon/2$. Soit A un sous-ensemble fini de I, plus grand que A_0 ; cet ensemble A est obtenu en *ajoutant* à A_0 des éléments $i_{n_1}, \ldots, i_{n_p}$, où les indices n_j sont donc $> \mathrm{N}$, et où on peut supposer que $\mathrm{N} < n_1 < n_2 < \ldots < n_p$; on a

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}) - \mathrm{S}(\mathrm{A}_0) = \sum_{j=1}^{p} u_{i_{n_j}},$$

donc par Pythagore

$$\big\|\mathrm{S}(\mathrm{A}) - \mathrm{S}(\mathrm{A}_0)\big\|^2 = \sum_{j=1}^{p} \|u_{i_{n_j}}\|^2 \leq \sum_{n > \mathrm{N}} \|u_{i_n}\|^2 < \varepsilon^2/4,$$

donc $\|\mathrm{S}(\mathrm{A}) - \mathrm{S}(\mathrm{A}_0)\| < \varepsilon/2$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient que $\|\mathrm{S} - \mathrm{S}(\mathrm{A})\| < \varepsilon$ pour tout sous-ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$ plus grand que A_0, ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, supposons la famille $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sommable, prenons l'ensemble fini A_0 qui correspond à $\varepsilon = 1$ dans la propriété $(*)$. Pour tout sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, on a en prenant $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \cup \mathrm{J}$ que $\|\mathrm{S} - \mathrm{S}(\mathrm{A})\| \leq 1$, donc

$$\|\mathrm{S}(\mathrm{A})\| \leq \|\mathrm{S}\| + 1, \quad \sum_{j \in \mathrm{J}} \|u_j\|^2 \leq \sum_{j \in \mathrm{A}} \|u_j\|^2 = \|\mathrm{S}(\mathrm{A})\|^2 \leq (\|\mathrm{S}\| + 1)^2.$$

On a bien $\sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$ puisque les sommes finies sont bornées par $(\|\mathrm{S}\| + 1)^2$.

Remarques.

1. La théorie L^2 des séries de Fourier fera intervenir des familles indexées par $\mathbb{Z}$. La notion de famille sommable permettra de poser, quand les coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont de carré sommable,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e_n,$$

au sens des familles sommables dans $\mathrm{L}^2(0, 2\pi)$, sans se poser de questions inutiles sur des façons d'énumérer l'ensemble $\mathbb{Z}$.

2. L'hypothèse que l'ensemble d'indices I soit dénombrable ne sert qu'à rester dans le cadre défini par le programme (actuel : 2011) de l'agrégation. De toute façon, l'hypothèse

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$$

entraîne qu'il y a une quantité *au plus dénombrable* d'indices $i \in \mathrm{I}$ tel que $u_i \neq 0$.

Commentaire : *convergence suivant un ensemble ordonné flirtant (d'après Bourbaki)*
En définissant la notion de famille sommable, on a remplacé l'ensemble (totalement) ordonné des entiers par l'ensemble ordonné (mais pas totalement) $\mathcal{I}$ des parties finies J de l'ensemble infini I, ordonné par

$$\mathrm{J}_1 \leq \mathrm{J}_2 \Longleftrightarrow \mathrm{J}_1 \subset \mathrm{J}_2.$$

La propriété importante pour développer une notion raisonnable de convergence est que cet ensemble est *filtrant croissant* : étant donnés deux éléments $\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2 \in \mathcal{I}$, il existe $\mathrm{J} \in \mathcal{I}$ qui les majore (tout simplement $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_2$, si on veut).

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble ordonné filtrant, sans élément maximal, on définira la convergence d'une « suite généralisée » $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ d'éléments d'un espace métrique X par un changement millimétrique de la définition usuelle : la « suite » converge vers $x \in \mathrm{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathcal{A}, \qquad \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow d(x_\alpha, x) < \varepsilon.$$

L'unicité de la limite découle du caractère filtrant de $\mathcal{A}$.

Dans le cas des familles sommables, on pose pour tout $\mathrm{J} \in \mathcal{I}$

$$\mathrm{S}_\mathrm{J} = \sum_{j\in\mathrm{J}} u_j,$$

et la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ équivaut à dire que la suite généralisée $(\mathrm{S}_\mathrm{J})_{\mathrm{J}\in\mathcal{I}}$ des sommes partielles converge suivant l'ordonné filtrant $\mathcal{I}$.