Séminaire BOURBAKI Novembre 2003
56ème année, 2003-2004, n° 928

INÉGALITÉ DE BRUNN-MINKOWSKI-LUSTERNIK, ET AUTRES INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES ET FONCTIONNELLES

par **Bernard MAUREY**

INTRODUCTION

La théorie des corps convexes a commencé à la fin du 19ème siècle avec l'inégalité de Brunn, généralisée ensuite en inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik qui s'applique à des ensembles non nécessairement convexes. Ce thème a depuis longtemps des contacts avec les problèmes isopérimétriques et avec des inégalités d'Analyse, telles que celles qui traduisent les plongements de Sobolev. Nous allons développer quelques aspects plus récents des inégalités géométriques, dont certains sont liés à la technique du transport de mesure, notamment le transport dit «de Brenier». On ne trouvera pas ici l'approche d'un résultat faramineux, mais des pistes vers un ensemble convergent de techniques qui ont prouvé leur applicabilité.

L'essentiel de notre travail sera fait dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; on notera le produit scalaire par $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et la norme par $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$. On notera $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ ou bien $\int_{\mathbb{R}^n} f$ l'intégrale d'une fonction f pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On notera $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, et $A + B$ la somme de Minkowski de deux sous-ensembles A, B de $\mathbb{R}^n$, égale à $\{a + b : a \in A, b \in B\}$.

1. BRUNN-MINKOWSKI ET INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES

L'inégalité de Brunn-Minkowski *sans dimension* se formule ainsi : si A, B sont deux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, et si on note $|A|, |B|$ leurs volumes (pour la mesure de Lebesgue), on a

$$\Big|\frac{A+B}{2}\Big| \geq |A|^{1/2}|B|^{1/2}.$$

En réalité, l'inégalité $|(1-t)A + tB| \geq |A|^{1-t}|B|^t$ est valable pour tout $t \in [0,1]$, et elle se transforme facilement par des arguments d'homogénéité en la forme classique pour l'inégalité de Brunn-Minkowski dans $\mathbb{R}^n$,

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}.$$

Si A est convexe et si B est un translaté d'un homothétique de A, l'inégalité devient une égalité. Appliquée en prenant pour B une boule euclidienne de rayon tendant vers 0, cette inégalité conduit à une démonstration de l'inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$. Démontrée d'abord par Brunn (1887) en dimension 2 ou 3 pour deux convexes, reprise par Minkowski au tout début du 20ème siècle, l'inégalité a été étendue par Lusternik à des compacts quelconques de $\mathbb{R}^n$; curieusement, le nom de Lusternik est rarement associé de nos jours à cette extension considérable (voir [Lus], [HeM]). Hadwiger et Ohmann [HaO] en donnent une démonstration assez simple, en approchant A et B par des réunions finies de rectangles, et en réalisant une association bien choisie entre parties de A et B de même mesure ; la preuve finit par l'inégalité entre moyennes arithmétiques et géométriques. Ces deux ingrédients se retrouvent dans la plupart des autres preuves.

L'article récent de Richard Gardner [Gar] couvre presque tous les thèmes traités dans cet exposé, et bien d'autres qui ne seront pas abordés ici.

1.1. **Prékopa-Leindler**

On attribue généralement à Prékopa le résultat suivant : si $\varphi(x, t)$ est convexe sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{e}^{-\Phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varphi(x,t)}\, dx$$

est convexe (on admettra les valeurs infinies). L'inégalité de Prékopa-Leindler a un rapport plus direct avec Brunn-Minkowski-Lusternik : on se donne $0 < \theta < 1$ et trois fonctions réelles s.c.i. f_0, f_θ, f_1 sur $\mathbb{R}^n$ qui vérifient pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité

$$(H_{PL}) \qquad f_\theta\big((1-\theta)x_0 + \theta x_1\big) \le (1-\theta) f_0(x_0) + \theta f_1(x_1)$$

et on obtient l'énoncé qui suit.

Théorème 1.1 (Prékopa, Leindler). — *Si les fonctions f_0, f_θ, f_1 satisfont (H_{PL}), on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-f_\theta(x)}\, dx \ge \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-f_0(x)}\, dx\Big)^{1-\theta} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-f_1(x)}\, dx\Big)^{\theta}.$$

En attribuant ce résultat aux seuls Prékopa [Pre] et Leindler [Lei], nous faisons un choix de simplicité qui n'est sans doute pas historiquement tout à fait correct ; en effet, la paternité de ce type de résultat a été revendiquée par deux groupes différents (voir Das Gupta [DaG] pour une autre vision de l'histoire). Le théorème 1.1 redonne immédiatement Brunn-Minkowski-Lusternik en prenant les fonctions f_0, f_θ, f_1 égales à 0 sur les ensembles A_0, $A_\theta = (1-\theta)A_0 + \theta A_1$, A_1, et égales à $+\infty$ en dehors, de sorte que pour $j = 0, \theta, 1$ on ait l'égalité $\mathbf{1}_{A_j} = \mathrm{e}^{-f_j}$.

Pour éviter ces valeurs infinies, il est souvent plus agréable d'écrire l'hypothèse sous la forme suivante : trois fonctions réelles positives s.c.s. g_0, g_θ, g_1 sur $\mathbb{R}^n$ vérifient pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité

$$(H_{PL2}) \qquad g_\theta\big((1-\theta)x_0 + \theta x_1\big) \ge g_0(x_0)^{1-\theta}\, g_1(x_1)^{\theta}$$

et on déduit que $\int g_\theta \geq (\int g_0)^{1-\theta}(\int g_1)^\theta$. Cette inégalité est adaptée à l'étude des mesures log-concaves. Une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ à densité log-concave s'écrit $d\mu(x) = \mathrm{e}^{-\varphi(x)}\,dx$, avec φ convexe sur $\mathbb{R}^n$; on voit facilement que le triplet $g_j = \mathbf{1}_{A_j}\,\mathrm{e}^{-\varphi}$, $j = 0, \theta, 1$ avec $A_\theta = (1-\theta)A_0 + \theta A_1$ vérifie l'hypothèse (H_{PL2}), ce qui conduit à l'inégalité

$$\mu\big((1-\theta)A_0 + \theta A_1\big) \geq \mu(A_0)^{1-\theta}\mu(A_1)^\theta. \tag{1}$$

Appliquée à une mesure log-concave symétrique (c'est-à-dire invariante par $x \to -x$), cette inégalité donne le résultat de T.W. Anderson (en fait, le résultat d'Anderson [And] est un peu plus général que le théorème 1.2, et il a été montré directement à partir de Brunn-Minkowski) : si $\theta = 1/2$, si $A_0 = C + v$ et $A_1 = C - v$, où C est un convexe symétrique et v un vecteur quelconque, on trouve que $(A_0 + A_1)/2 = C$, pendant que $\mu(A_0) = \mu(A_1)$ par la symétrie de μ ; ainsi, on obtient

$$\mu(C) = \mu\big((A_0 + A_1)/2\big) \geq \mu(A_0)^{1/2}\mu(A_1)^{1/2} = \mu(C + v),$$

ce qui signifie ceci : parmi les translatés d'un convexe symétrique, le convexe centré a la plus grande mesure.

Théorème 1.2 (Anderson). — *Si μ est une mesure log-concave symétrique sur $\mathbb{R}^n$, si C est un convexe symétrique et v un vecteur quelconque, on a*

$$\mu(C + v) \leq \mu(C).$$

Un cas particulier important est celui de la mesure gaussienne. Désignons par γ_n la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$, dont la densité est $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$. Elle est bien sûr log-concave, symétrique. Le principe précédent s'applique donc à γ_n, et il joue un rôle important dans certaines questions de statistique.

1.2. **Isopérimétrie gaussienne**

Le problème isopérimétrique gaussien a été résolu par Christer Borell [Bo1], Vladimir Sudakov et Boris Tsirelson [SuT]. Plus tard, Antoine Ehrhard [Ehr] a donné une autre démonstration et apporté d'autres informations, que nous discuterons plus loin. Si A est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, on désigne par A_ε son épaississement de taille $\varepsilon > 0$ pour la distance euclidienne,

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Théorème 1.3. — *Parmi les ensembles fermés A de mesure gaussienne $\gamma_n(A) = a$ fixée, les demi-espaces affines minimisent l'accroissement de mesure $\gamma_n(A_\varepsilon) - \gamma_n(A)$, ou ce qui revient au même, minimisent la mesure $\gamma_n(A_\varepsilon)$.*

Par exemple, lorsque $\gamma_n(A) = a = 1/2$, un demi-espace affine B de même mesure que A est donné par $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}$, et on peut énoncer en passant aux complémentaires

$$\gamma_n(A_\varepsilon^c) \le \gamma_n(B_\varepsilon^c) = \gamma_n\big(\{x_1 > \varepsilon\}\big) = \int_\varepsilon^{+\infty} d\gamma_1(t).$$

Si f est une fonction 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ (vérifiant $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ pour tous x, y) possédant une *valeur médiane* m, c'est-à-dire une valeur telle que $\gamma_n(f \le m) = 1/2$, on voit que f reste inférieure ou égale à $m + \varepsilon$ sur l'épaissi A_ε de $A = \{f \le m\}$, donc

$$\gamma_n\big(\{f > m + \varepsilon\}\big) \le \gamma_n(A_\varepsilon^c) \le \int_\varepsilon^{+\infty} d\gamma_1(t)\,;$$

on a la même majoration pour $\gamma_n\big(\{f < m - \varepsilon\}\big)$, ce qui donne une bonne borne pour la probabilité $\gamma_n\big(\{|f - m| > \varepsilon\}\big)$ que f dévie de plus de ε de sa valeur médiane m,

$$\gamma_n\big(\{|f - m| > \varepsilon\}\big) \le \gamma_1\big(\{t \in \mathbb{R} : |t| > \varepsilon\}\big) \le \mathrm{e}^{-\varepsilon^2/2}\,.$$

Cette propriété de concentration a eu de nombreuses applications en *théorie asymptotique*, la théorie des espaces normés de dimension tendant vers l'infini, voir par exemple le fameux théorème de Dvoretzky dans le livre de Gilles Pisier [Pis]. Cependant, il est suffisant pour ce type d'applications d'avoir un résultat moins précis, de la forme

$$\gamma_n\big(\{|f - m_1| > \varepsilon\}\big) \le 2\ \mathrm{e}^{-\varepsilon^2/4}$$

par exemple, où m_1 peut désigner la moyenne de f au lieu de sa médiane, et ce type d'inégalité peut être obtenu de bien des manières (intégrale stochastique, méthodes d'espace gaussien, voir [Led]), mais aussi à partir de Prékopa-Leindler comme ci-dessous.

Proposition 1.4. — *Pour toute fonction f réelle 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ et pour tout nombre réel t, on a*

$$\int \mathrm{e}^{tf(x) - tf(y)}\ d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \le \mathrm{e}^{t^2}\,.$$

Sous cette forme le résultat est optimal, puisque l'inégalité ci-dessus est une égalité pour les fonctions linéaires. À partir de cette estimation de transformée de Laplace, on obtient les inégalités de concentration par Markov, comme il est habituel.

Preuve. — Posons

$$g_t(x) = \min\{tf(x+h) + |h|^2/4 : h \in \mathbb{R}^n\}.$$

Le triplet de fonctions $\varphi_0(x) = -g_t(x) + |x|^2/2$, $\varphi_{1/2}(z) = |z|^2/2$, $\varphi_1(y) = tf(y) + |y|^2/2$ vérifie l'hypothèse de Prékopa-Leindler (H_{PL}), car pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(y) \ge -tf(y) - |x - y|^2/4 + |x|^2/2 + tf(y) + |y|^2/2 = 2\,\varphi_{1/2}\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

On en déduit que

$$\Big(\int \mathrm{e}^{g_t(x)}\ d\gamma_n(x)\Big)\Big(\int \mathrm{e}^{-tf(y)}\ d\gamma_n(y)\Big) \le \Big(\int d\gamma_n(z)\Big)^2 = 1.$$

Comme $tf(x+h) \geq tf(x) - |th|$ par la condition de Lipschitz, et que $tf(x) - |th| + |h|^2/4 \geq tf(x) - t^2$ pour tout h, on a $tf(x) \leq g_t(x) + t^2$, donc

$$\int \mathrm{e}^{tf(x)-tf(y)}\ d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) = \Big(\int \mathrm{e}^{tf(x)}\ d\gamma_n(x)\Big)\Big(\int \mathrm{e}^{-tf(y)}\ d\gamma_n(y)\Big) \leq \mathrm{e}^{t^2}\ .$$

□

Avec une preuve apparentée à la précédente mais nettement plus subtile, Sergueï Bobkov et Michel Ledoux ont obtenu une démonstration d'une inégalité Log-Sobolev pour γ_n ([BoL]).

1.3. **Une inégalité de Brascamp-Lieb**

Une inégalité de Brascamp et Lieb [BrL] a trouvé des applications nombreuses en convexité ; on va l'énoncer sous une forme particulière due à Keith Ball [Ba2]. On se place dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace euclidien E de dimension n. Désignons par $v \otimes v$ l'opérateur de rang un $x \to (x \cdot v)\, v$, et supposons que

$$(J) \qquad \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{N} c_j\, v_j \otimes v_j,$$

avec des vecteurs v_j de norme un et des scalaires $c_j > 0$, qui satisfont $\sum_{j=1}^N c_j = n$ par un calcul de trace immédiat. Il en résulte que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{N} c_j\, (x \cdot v_j)\, (y \cdot v_j), \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^{N} c_j\, (x \cdot v_j)^2.$$

Cette décomposition de l'identité est fortement liée à une notion géométrique importante, *l'ellipsoïde de John*, et à ses propriétés remarquables ; l'ellipsoïde de John pour un corps convexe symétrique C est l'ellipsoïde maximal contenu dans C ; Fritz John a montré que lorsque cet ellipsoïde est égal à la boule euclidienne unité B, l'identité de $\mathbb{R}^n$ admet la décomposition (J) avec des v_j choisis parmi les points de contact de B et du bord de C.

Théorème 1.5 (Brascamp-Lieb, version Ball). — *Si les vecteurs (v_j) et les nombres (c_j) vérifient la relation (J), on a pour toutes les fonctions positives (f_j) intégrables sur $\mathbb{R}$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^{N} f_j(x \cdot v_j)^{c_j}\Big)\, dx \leq \prod_{j=1}^{N} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)\, dt\Big)^{c_j}.$$

Le cas trivial est celui d'une base orthonormée $v_1, \ldots, v_n$, avec des (c_j) égaux à 1 : on trouve simplement Fubini dans ce cas, et on a bien sûr égalité. La méthode utilisée par Brascamp et Lieb est assez compliquée, et consiste à montrer que si on fixe $\int f_j = 1$, le maximum du terme de gauche est atteint pour des fonctions gaussiennes. On peut remarquer que si $f_j(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, la relation

$$\prod_{j=1}^{N} f_j(x \cdot v_j)^{c_j} = \exp\Big(-\sum_{j=1}^{N} c_j (x \cdot v_j)^2\Big) = \exp\big(-\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)$$

montre qu'on a égalité dans Brascamp-Lieb. Le théorème 1.5 a été généralisé par Lieb [Lie] au cas où l'identité de $\mathbb{R}^n$ est représentée sous la forme $\sum_{j=1}^{N} c_j P_j$, où les P_j sont des projecteurs orthogonaux sur $\mathbb{R}^n$.

Frank Barthe a trouvé une preuve simple du théorème 1.5, et sa preuve lui a permis de montrer en même temps une inégalité inverse, qui avait été conjecturée par Ball. Cette inégalité inverse a elle aussi des applications géométriques intéressantes.

Théorème 1.6 (Barthe, [Bar]). — *Si les vecteurs (v_j) et les nombres (c_j) vérifient la relation (J), on a pour toutes les fonctions positives (f_j) intégrables sur $\mathbb{R}$ et pour toute fonction mesurable F sur $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$F(x) \geq \prod_{j=1}^{N} f_j(a_j)^{c_j} \text{ chaque fois que } x = \sum_{j=1}^{N} a_j c_j v_j$$

l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\, dx \geq \prod_{j=1}^{N} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)\, dt\Big)^{c_j}.$$

Si on applique le théorème précédent avec $n = 1$, $N = 2$, $v_1 = v_2 = 1$ et $c_1 = 1 - \theta$, $c_2 = \theta$, on retrouve Prékopa-Leindler sur $\mathbb{R}$ (qui entraîne assez facilement le cas général par Fubini et itération).

En appliquant l'inégalité de Brascamp-Lieb, Ball a montré le résultat qui suit sur les sections des cubes N-dimensionnels. Le résultat n'est optimal que lorsque la dimension k de la section divise N, mais il donne toujours une information non triviale. Lorsque $k = N - 1$, on trouve une majoration des volumes des sections hyperplanes par $\mathrm{e}^{1/2}$, alors que le résultat optimal (dû également à Ball, [Ba1]) est $\sqrt{2}$. Mentionnons la méthode d'unimodalité de Kanter, qui donne d'autres informations dans des problèmes de volumes de sections ([Kan], voir [MeP]). Le lecteur consultera avec profit le bel article de Ball [Ba4] dans le *Handbook of the Geometry of Banach spaces*.

Théorème 1.7 (K. Ball, [Ba2]). — *Toutes les sections k-dimensionnelles d'un cube N-dimensionnel de volume 1 ont un volume (k-dimensionnel) majoré par*

$$\Big(\frac{N}{k}\Big)^{k/2}.$$

Preuve. — La démonstration va mettre en lumière la parfaite adéquation de la version de Ball de l'inégalité de Brascamp-Lieb. Prenons pour cube C de volume 1 l'ensemble $[-1/2, 1/2]^N$ dans $\mathbb{R}^N$; soit $(e_j)_{j=1}^{N}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, soit E un sous-espace de dimension k ; en projetant sur E l'identité évidente $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N} = \sum_{j=1}^{N} e_j \otimes e_j$, on obtient

$\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^N c_j v_j \otimes v_j$, où $c_j^{1/2} v_j$ est la projection orthogonale de e_j sur E et $|v_j| = 1$. Les points x de $E \cap C$ sont caractérisés par les inégalités $|x \cdot (c_j^{1/2} v_j)| \leq 1/2$, $j = 1, \ldots, N$, donc l'indicatrice de $E \cap C$ est le produit des fonctions $f_j(x \cdot v_j)$, où $f_j(t) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(c_j^{1/2} t)$. D'après le théorème 1.5,

$$|E \cap C|_k = \int_E \prod_{j=1}^N f_j(x \cdot v_j)^{c_j} \, dx \leq \prod_{j=1}^N \Bigl(f_j(t)\, dt \Bigr)^{c_j} = \prod_{j=1}^N c_j^{-c_j/2}.$$

Sachant que $\sum_{j=1}^N c_j = k$, l'expression est maximale quand les c_j sont égaux, ce qui donne le résultat. □

2. TRANSPORT OPTIMAL

On trouve Gaspard Monge à l'origine lointaine de la théorie du transport optimal ; dans [Mon], il pose le problème du transport optimal d'une masse de terre vers un emplacement de même volume ; pour Monge, le coût du transport est mesuré dans L_1, c'est-à-dire que l'élément de coût dc du transport d'un élément de masse dm placé au point x et transporté au point Tx est $dc = |x - Tx| \, dm$. La théorie devient beaucoup plus agréable lorsqu'on cherche à minimiser le coût quadratique $|x - Tx|^2 \, dm$: étant données deux mesures finies μ et ν de même masse sur $\mathbb{R}^n$, on cherche à réaliser

$$\min \Bigl\{ \int_{\mathbb{R}^n} |x - Tx|^2 \, d\mu(x) \Bigr\},$$

l'inf étant pris sur toutes les transformations T telles que $T(\mu) = \nu$ (l'image de μ par T est ν). Au milieu du 20ème siècle, Kantorovitch exprime la question du transport optimal comme un problème de programmation convexe ; on parle alors du problème de Monge-Kantorovitch. Cette théorie a une histoire riche qui ne sera pas évoquée ici.

À la fin des années 90, Yann Brenier [Bre] montre que, sous certaines hypothèses, le transport optimal T d'une mesure finie à densité $f(x)\, dx$ sur $\mathbb{R}^n$ vers une autre mesure à densité $g(y)\, dy$ de même masse est donné par le gradient d'une fonction convexe u, fonction unique à une constante près. Robert McCann a assoupli les conditions d'existence.

Théorème 2.1 (McCann [MC1]). — *Si μ et ν sont deux probabilités sur $\mathbb{R}^n$, et si μ ne charge aucun ensemble borélien de dimension de Hausdorff $n - 1$, il existe une fonction u convexe sur $\mathbb{R}^n$ telle que l'image de μ par l'application μ-presque partout définie ∇u soit égale à ν. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, la différence $\nabla u_1 - \nabla u_2$ est nulle μ-presque partout.*

Quelques commentaires s'imposent ; la fonction convexe u est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; elle est continue dans l'intérieur de l'ensemble convexe $\mathrm{dom}(u) = \{x : u(x) < +\infty\}$, et on sait qu'elle y est différentiable, sauf sur un sous-ensemble de dimension de Hausdorff $\leq n - 1$; pour pouvoir définir la mesure image ν en posant $\nu(B) = \mu\bigl((\nabla u)^{-1}(B)\bigr)$ pour tout borélien B, il suffit que ∇u soit défini μ-presque partout. Le résultat de McCann est très général, mais il oblige à travailler avec des notions de calcul différentiel généralisé, telles que le Hessien au sens d'Alexandrov. Une autre approche, initiée par Luis Caffarelli immédiatement après l'article de Brenier, est d'utiliser des théorèmes de régularité de solutions d'une équation de Monge-Ampère pour pouvoir affirmer que le transport de Brenier est régulier sous certaines conditions (on est content quand u est C^2, ce qui donne un transport C^1).

En dimension un, il n'y a qu'une façon raisonnable de définir ce transport optimal : pour transporter la probabilité $f(x)\,dx$ sur la probabilité $g(y)\,dy$, on introduit la fonction croissante $T(t)$ définie par

$$(T_1) \qquad \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{T(t)} g(y)\,dy.$$

La fonction convexe u n'apparaît pas naturellement, mais il suffit de prendre une primitive quelconque de la fonction croissante T pour obtenir u, et l'étude de la régularité de u est évidente. Passons au cas multi-dimensionnel ; notons $\nabla_x u$ le gradient de u au point x, et de même pour le hessien $H_x u$. Supposons que la mesure $f(x)\,dx$ soit envoyée sur $g(y)\,dy$ par le changement de variable régulier $y = \nabla_x u$. Alors

$$g(\nabla_x u)\det(H_x u) = f(x),$$

donc u satisfait l'équation de Monge-Ampère

$$\det H_x u = \frac{f(x)}{g(\nabla_x u)}.$$

Si on a une propriété minimale de régularité pour ∇u, un argument de bootstrap et les résultats de régularité connus pour l'équation de Monge-Ampère entraînent que u est régulière quand f et g le sont, sous une certaine condition géométrique sur les supports (Caffarelli, [Ca1]).

Faisons un commentaire élémentaire sur cette condition géométrique. Il est évident que la régularité de l'application u est rompue si on doit transporter, par exemple, la mesure de $[-1, 1]$ sur la mesure de l'ensemble non connexe $[-2, -1] \cup [1, 2]$; mais c'est la convexité de l'image qui est le véritable enjeu. Si on transporte une mesure dont le support est $\mathbb{R}^n$ sur une autre mesure par le gradient d'une fonction convexe régulière u, l'application gradient donnera de $\mathbb{R}^n$ une image dont l'intérieur est convexe. Ainsi, il n'est pas possible de transporter de façon *régulière* la mesure de Gauss γ_n sur la mesure de Lebesgue d'un ouvert non convexe, par un transport de la forme ∇u, avec u convexe. Les bons résultats de régularité sont obtenus lorsque la mesure image est portée par un ensemble convexe C, et qu'elle possède une densité g, régulière et bornée inférieurement sur C.

McCann [MC2] a généralisé le transport de Brenier au cas des variétés riemanniennes. Il s'agit encore d'un transport optimal pour le coût quadratique. Pour appréhender cette généralisation, il faut reformuler le transport de Brenier par un gradient ∇u en termes de *déplacement* : à chaque point x, on associe le vecteur $V_x = \nabla_x u - x$; on obtient le point Tx en se déplaçant à partir de x sur la géodésique tangente à V_x, dans le sens donné par V_x, et d'une longueur égale à $|V_x|$; on peut voir ce vecteur V_x comme le gradient d'une nouvelle fonction $v(x) = u(x) - |x|^2/2$. C'est sous cette forme que le résultat est généralisé : *il existe une fonction v sur la variété telle que $Tx = \exp_x(\nabla_x v)$ pour μ-presque tout x*, mais nous n'entrerons pas dans les détails.

L'inégalité de Prékopa-Leindler a été généralisée dans [CMS] au cas des variétés riemanniennes, mais à ma connaissance, elle attend encore à ce jour des applications qui soient au niveau des applications de l'inégalité classique.

2.1. Quelques applications du transport

On va donner quelques exemples simples, où on mettra en avant la grande simplicité de l'idée, en laissant malhonnêtement de côté les précautions techniques nécessaires. On va aussi laisser de côté un grand nombre d'autres aspects, qu'on pourra trouver dans la monographie de Cédric Villani [Vil].

2.1.1. *Preuve de l'inégalité de Prékopa-Leindler par transport* (McCann). Supposons que le triplet (g_0, g_θ, g_1) satisfasse les hypothèses de Prékopa-Leindler (H_{PL2}), que $\int g_0 = \int g_1$ et que le gradient ∇u d'une fonction convexe transporte la mesure $g_0(x)\,dx$ sur la mesure $g_1(y)\,dy$. Alors, en effectuant le changement de variable $z = (1-\theta)x + \theta\,\nabla_x u$, en utilisant l'équation de transport $g_1(\nabla_x u)\det H_x u = g_0(x)$, le fait que le Hessien de u est positif et la concavité de la fonction $A \to \ln\det A$ sur le convexe des matrices réelles symétriques définies positives, on obtiendra la chaîne d'inégalités

$$\int g_\theta(z)\,dz \geq \int g_\theta\big((1-\theta)x + \theta\,\nabla_x u\big)\det\big((1-\theta)I_n + \theta\,H_x u\big)\,dx \geq$$

$$\geq \int g_0(x)^{1-\theta} g_1(\nabla_x u)^\theta (\det H_x u)^\theta\,dx = \int g_0(x)\,dx = \Big(\int g_0(x)\,dx\Big)^{1-\theta}\Big(\int g_1(y)\,dy\Big)^\theta.$$

Avec Knothe [Kno] on avait déjà en 1957 une preuve de Brunn-Minkowski par une sorte de transport, qui est certainement moins élégante que celle obtenue par le transport de Brenier, mais où les problèmes de régularité ne se posent pas. L'application de Knothe peut se décrire ainsi en dimension deux : on se donne deux probabilités $d\mu(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$ et $d\nu(y_1, y_2) = g(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2$; on transporte $f_1(x_1)\,dx_1$, où $f_1(x_1) = \int f(x_1, x_2)\,dx_2$ sur $g_1(y_1)\,dy_1$, définie de façon analogue, par un transport 1-dimensionnel T_1 ; on transporte ensuite la section en x_1 de μ, renormalisée en probabilité par produit avec $f_1(x_1)^{-1}$, sur la section en $T_1(x_1)$ de ν, renormalisée, par un transport 1-dimensionnel T_2 dépendant de x_1 ; la matrice jacobienne de l'application de Knothe est triangulaire.

2.1.2. *Preuve de l'inégalité de Sobolev par transport* (Gromov). Supposons que f soit une fonction ≥ 0 régulière à support compact sur $\mathbb{R}^n$, et que $\int f^{n/(n-1)} = |B_n|$, le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. La mesure $f(x)^{n/(n-1)}\,dx$ est envoyée sur la mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ par une application de la forme ∇u, avec u convexe. Il en résulte que $|\nabla u| \le 1$ sur le support de f. En utilisant l'équation de transport et l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$|B_n| = \int f^{n/(n-1)} = \int f\, f^{1/(n-1)} = \int f\, (\det Hu)^{1/n} \le$$

$$\le \frac{1}{n} \int f\, \Delta u = -\frac{1}{n} \int \nabla f \,.\, \nabla u \le \frac{1}{n} \int |\nabla f|.$$

Si on rétablit l'homogénéité, on retrouve l'inégalité de Sobolev optimale

$$\Bigl(\int_{\mathbb{R}^n} f^{n/(n-1)} \Bigr)^{(n-1)/n} \le \frac{1}{n|B_n|^{1/n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|.$$

On peut aussi obtenir par transport les inégalités de Sobolev L_p avec constantes optimales (voir [CNV]).

2.1.3. *Preuve de l'inégalité de Brascamp-Lieb par transport.* La preuve de Barthe pour le théorème 1.5 utilise le transport dans son cas élémentaire, celui de la dimension un, mais Barthe montre aussi dans [Bar] l'inégalité plus générale de Lieb, qui demande d'utiliser le transport en plusieurs dimensions. On considère $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$, on suppose que $\int f_j = \int g$ pour chaque $j = 1, \ldots, N$ et on suppose aussi $f_j > 0$. On définit $T_j(t)$ par l'équation

$$\int_{-\infty}^{t} f_j(x)\, dx = \int_{-\infty}^{T_j(t)} g(y)\, dy\,;$$

on a $f_j(t) = g(T_j(t))\, T_j'(t)$. Désignons par u_j la fonction (strictement) convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $u_j' = T_j$ et $u_j(0) = 0$. On définit une fonction convexe u sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j(x \cdot v_j),$$

où les (v_j), (c_j) vérifient la relation (J). On va s'intéresser à la transformation T de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$x \in \mathbb{R}^n \to Tx = \sum_{j=1}^{N} c_j T_j(x \cdot v_j) v_j = \nabla_x u$$

et l'utiliser comme changement de variable dans $\mathbb{R}^n$; en effet, la stricte convexité de u et sa croissance à l'infini garantissent que ∇u est bijective sur $\mathbb{R}^n$; la matrice jacobienne de T au point x est

$$T'x = \sum_{j=1}^{N} c_j T_j'(x \cdot v_j) v_j \otimes v_j\,;$$

on utilisera la majoration

$$(2) \qquad \Bigl| \sum_{j=1}^{N} a_j c_j v_j \Bigr|^2 \le \sum_{j=1}^{N} c_j\, a_j^2$$

et l'estimation

$$\det\Big(\sum_{j=1}^{N} a_j c_j v_j \otimes v_j\Big) \ge \prod_{j=1}^{N} a_j^{c_j}, \tag{3}$$

où les (a_j) sont des réels positifs. On aura donc en posant $\xi_j = x \cdot v_j$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, en utilisant les équations pour les transports T_j et les inégalités (2) et (3)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{N} f_j(\xi_j)^{c_j}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{N} g(T_j(\xi_j))^{c_j} \prod_{j=1}^{N} T_j'(\xi_j)^{c_j}\, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\sum_{j=1}^{N} c_j (T_j(\xi_j))^2\Big) \prod_{j=1}^{N} T_j'(\xi_j)^{c_j}\, dx \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-|Tx|^2) \det\Big(\sum_{j=1}^{N} T_j'(\xi_j) c_j v_j \otimes v_j\Big)\, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|Tx|^2} \det(T'x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|y|^2}\; dy = \Big(\int_{\mathbb{R}} g\Big)^n = \prod_{j=1}^{N} \Big(\int_{\mathbb{R}} f_j\Big)^{c_j}.$$

Revenons aux inégalités (2) et (3) ; l'inégalité (2) résulte du fait que les vecteurs $c_j^{1/2} v_j$ peuvent être vus comme les projections d'une base orthonormée $w_1, \ldots, w_N$ de $\mathbb{R}^N$: si $(w_{j,k})_{k=1}^n$ désigne les coordonnées de $c_j^{1/2} v_j$, la relation (J) montre que les colonnes $(w_{j,k})_{j=1}^N$, $k = 1, \ldots, n$ sont orthonormées, et on peut par conséquent les compléter en une matrice orthogonale qui fournit les vecteurs $w_1, \ldots, w_N$.

Prouvons (3) : si $(e_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, si Det désigne le déterminant de n vecteurs par rapport à cette base et si $M = \sum_{j=1}^N M_j$ est une somme de matrices $n \times n$ de rang 1, on voit que $\det M$ est égal à

$$\mathrm{Det}\Big(\sum_{j=1}^{N} M_j\, e_1, \ldots, \sum_{j=1}^{N} M_j\, e_n\Big) = \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{N} \mathrm{Det}\big(M_{j_1}\, e_1, \ldots, M_{j_n}\, e_n\big) = \sum_I \det M_I$$

où la somme est étendue à tous les sous-ensembles I à n éléments de $\{1, \ldots, N\}$, et où on a posé $M_I = \sum_{j \in I} M_j$; comme les M_j sont de rang 1, les $j_1, \ldots, j_n$ qui donnent une contribution non nulle dans le terme central sont des entiers deux à deux distincts ; on obtient la dernière égalité en regroupant selon les valeurs de $I = \{j_1, \ldots, j_n\}$. Si $A = \sum_{j=1}^N a_j M_j$, le même développement montre que $\det A = \sum_I a^I \det M_I$, où on a posé $a^I = \prod_{j \in I} a_j$; si $M_j = c_j v_j \otimes v_j$, on a $M = I_n$ donc $\sum_I \det M_I = 1$. L'inégalité arithmético-géométrique donne alors

$$\det A \ge \prod_I (a^I)^{\det M_I} = \prod_{j=1}^{N} a_j^{\sum_{I:\, j \in I} \det M_I}. \tag{4}$$

Mais $\sum_{j\neq i} c_j v_j \otimes v_j$ est égal à $I_n - c_i v_i \otimes v_i$, dont le déterminant est

$$\sum_{I:\, i\notin I} \det M_I = 1 - c_i,$$

ce qui montre que $\sum_{I:\, i\in I} \det M_I = c_i$ pour tout $i = 1,\ldots,N$, et donne le résultat voulu (3) à partir de l'inégalité (4).

2.1.4. *Questions gaussiennes.* Caffarelli [Ca2] a remarqué que le transport de Brenier est contractant quand on transporte la probabilité gaussienne γ_n sur une probabilité μ de la forme $\mathrm{e}^{-|x|^2/2-\varphi(x)}\, dx$, φ convexe. Le caractère contractant de T peut être utilisé pour transporter certaines inégalités vraies pour γ_n en inégalités pour μ. On peut aussi utiliser ce résultat dans le problème de la corrélation gaussienne ([Co1], voir aussi [Ha2] pour un résultat connexe). La conjecture de la *corrélation gaussienne* prévoit que

$$\gamma_n(A\cap B) \ge \gamma_n(A)\,\gamma_n(B)$$

lorsque A, B sont deux convexes symétriques dans $\mathbb{R}^n$. Elle est prouvée dans $\mathbb{R}^2$ [Pit], mais seuls quelques cas particuliers sont connus en dimension plus grande (voir par exemple Gilles Hargé [Ha1]).

3. QUELQUES RÉSULTATS EN GÉOMÉTRIE GAUSSIENNE

L'inégalité isopérimétrique gaussienne du théorème 1.3 peut se montrer à partir de l'isopérimétrie sur la sphère (Borell, Sudakov-Tsirelson), par des techniques de symétrisation (Ehrhard) ou par des méthodes de semi-groupes. Posons pour tout x réel

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} d\gamma_1 = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt\,;$$

la *fonction isopérimétrique gaussienne* I est définie par $I(t) = \varphi\circ\Phi^{-1}(t)$ pour tout $t\in[0,1]$, c'est-à-dire qu'on a $I(t) = (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-s^2/2}$ exactement quand $t = \int_{-\infty}^{s} d\gamma_1$. Le résultat du théorème 1.3 se reformule ainsi : pour tout fermé $A\subset\mathbb{R}^n$, on a

$$\gamma_n^+(A) := \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\big(\gamma_n(A_\varepsilon) - \gamma_n(A)\big) \ge I(\gamma_n(A)), \tag{5}$$

où A_ε est le ε-épaississement de A pour la distance euclidienne. Autrement dit, si on définit $s\in\mathbb{R}$ par l'équation $\gamma_n(A) = \int_{-\infty}^{s} d\gamma_1$, on a $\gamma_n^+(A) \ge (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-s^2/2}$. Il est clair que cette inégalité est une égalité pour les demi-espaces affines de $\mathbb{R}^n$.

Bobkov [Bob] a montré une forme fonctionnelle pour l'isopérimétrie gaussienne : pour toute fonction f localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $[0,1]$, on a

$$I\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,d\gamma_n\right) \le \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I^2(f) + |\nabla f|^2}\; d\gamma_n. \tag{6}$$

On voit que ce résultat contient l'information isopérimétrique précédente en prenant pour f une fonction égale à 1 sur A, et décroissant vers 0 autour de A, pour s'annuler hors de A_ε. Bobkov déduit ce résultat d'une *inégalité à deux points* : pour tous $a, b \in [0,1]$,

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{I^2(a) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I^2(b) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}. \tag{7}$$

Utilisant les propriétés de tensorisation de cette inégalité et le théorème central limite, Bobkov montre que (7) implique (6). Comme il est noté dans [Bob], l'inégalité (6) pour $\mathbb{R}^n$ peut aussi se déduire de (5) pour $\mathbb{R}^{n+1}$ en choisissant pour $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ le sous-graphe de $\Phi^{-1} \circ f$; en fait cette remarque est déjà chez Ehrhard, mais le point remarquable de l'article [Bob] est que (6) y est déduite de l'inégalité élémentaire pour deux points ; on peut aussi transcrire la preuve de Bobkov dans le langage des semi-groupes ou des martingales browniennes (voir [CHL]).

Ehrhard a montré dans [Ehr] un renforcement de l'inégalité de Brunn-Minkowski gaussienne (1) : si A, B sont deux ensembles convexes fermés non vides dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\Phi^{-1}\big(\gamma_n((1-t)A + tB)\big) \geq (1-t)\,\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t\,\Phi^{-1}(\gamma_n(B))$$

pour tout $t \in [0,1]$. Cette propriété est plus forte que celle de l'inégalité (1), car pour tous $a, b \in [0,1]$ on a $(1-t)\,\Phi^{-1}(a) + t\,\Phi^{-1}(b) \geq \Phi^{-1}\big(a^{1-t}b^t\big)$; cette dernière inégalité provient par exemple de l'inégalité de Brunn-Minkowski gaussienne (1) dans $\mathbb{R}$, appliqué aux deux intervalles $]-\infty, \Phi^{-1}(a)]$ et $]-\infty, \Phi^{-1}(b)]$. Donnons une interprétation plus géométrique de l'inégalité d'Ehrhard : si H_A et H_B sont deux demi-espaces affines limités par deux hyperplans parallèles, et si $\gamma_n(H_A) = \gamma_n(A)$, $\gamma_n(H_B) = \gamma_n(B)$, la mesure gaussienne de $(1-t)A + tB$ est au moins celle du demi-espace $(1-t)H_A + tH_B$.

La question de savoir si la convexité de A et B est nécessaire dans l'inégalité d'Ehrhard est restée longtemps ouverte. Rafał Latała [Lat] a généralisé au cas où un seul des ensembles A, B est convexe et très récemment Borell [Bo2] a étendu le résultat à deux fermés quelconques ; sa méthode se formule en termes de semi-groupes ou d'équation d'évolution. Elle aura probablement d'autres retombées : on a déjà pu montrer [BaC] qu'elle donne une preuve stochastique de l'inégalité Brascamp-Lieb inverse (théorème 1.6).

Les mesures des dilatés d'un convexe symétrique C ont également un comportement intéressant ; il résulte de Prékopa-Leindler que $t \to \ln \gamma_n(tC)$ est concave sur $]0, +\infty[$. La *B-conjecture*, démontrée récemment [CFM], dit plus : la fonction $t \to \ln \gamma_n(\mathrm{e}^t\, C)$ est concave sur $\mathbb{R}$. Latała et Oleszkiewicz [LaO] ont montré la *S-conjecture*, dont la seule preuve connue à ce jour est très compliquée ; elle emprunte dans son début des idées d'Ehrhard. Le résultat est le suivant : si on envisage l'accroissement de volume gaussien produit en passant d'un convexe symétrique C à un homothétique tC, $t > 1$, l'accroissement est minimal pour une bande symétrique $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq b\}$ telle que $\gamma_n(B) = \gamma_n(C)$,

$$\forall t \geq 1, \quad \gamma_n(tC) \geq \gamma_n(tB).$$

4. DÉVELOPPEMENTS PLUS RÉCENTS AUTOUR DE PRÉKOPA

Ball, Barthe et Naor [BBN] ont récemment donné une expression utile pour la dérivée seconde en 0 de la fonction Φ définie par

$$\mathrm{e}^{-\Phi(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varphi(x,t)}\, dx$$

sur un intervalle réel contenant 0. Ils montrent (dans un langage équivalent) le résultat suivant : désignons par $\mathcal{H}_{\mathbf{y}}\varphi$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par le Hessien de φ au point $\mathbf{y} = (y, 0)$ et par $H_y v$ la matrice hessienne au point y d'une fonction v définie sur $\mathbb{R}^n$; on a

$$\mathrm{e}^{-\Phi(0)}\, \Phi''(0) = \inf\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\varphi(y,0)} \Big((\mathcal{H}_{\mathbf{y}}\varphi)(\nabla_y v, 1) + \mathrm{tr}((H_y v)^2) \Big)\, dy \Big\}, \tag{8}$$

où l'inf est pris sur l'ensemble des fonctions v.

Si φ est convexe du couple (x, t), le résultat sera bien sûr ≥ 0, ce qui redonne le résultat de Prékopa. On a déjà pu trouver une application de cette formule, où la présence du terme positif $\mathrm{tr}((H_y v)^2)$ permet d'obtenir la convexité de Φ dans des cas où φ n'est pas convexe [CFM].

Artstein, Ball, Barthe et Naor [ABBN] utilisent cet ingrédient pour montrer la croissance avec n de l'entropie de la suite des variables $Z_n = n^{-1/2}(X_1 + \cdots + X_n)$ qui apparaissent dans le théorème central limite (les (X_i) sont des variables aléatoires indépendantes de carré intégrable, de même loi). Auparavant, on ne savait établir la croissance de l'entropie que sur la sous-suite (Z_{2^n}).

Une approche heuristique pour le résultat sur $\Phi''(0)$ est la suivante : pour t tendant vers 0, on peut introduire la fonction convexe u_t sur $\mathbb{R}^n$, nulle en 0, dont le gradient transporte la probabilité $\mathrm{e}^{\Phi(0)}\, \mathrm{e}^{-\varphi(x,0)}\, dx$ sur $\mathrm{e}^{\Phi(t)}\, \mathrm{e}^{-\varphi(x,t)}\, dx$; la fonction $v = \dot{u}_0$, dérivée par rapport à t au point $t = 0$, est un bon candidat pour minimiser l'expression ci-dessus. En fait, cette approche est difficile à mettre en œuvre, et il est plus facile de traiter directement l'équation obtenue comme limite de l'équation de Monge-Ampère satisfaite par u_t, ce qui conduit à un opérateur linéaire du type Ornstein-Uhlenbeck.

Supposons que $\Phi(0) = 0$, de sorte que $d\mu(x) = \mathrm{e}^{-\varphi(x,0)}\, dx$ soit une probabilité, et supposons qu'on puisse dériver deux fois sous le signe somme qui définit Φ. Le calcul direct de la dérivée seconde $\ddot{\Phi}(0)$ donne

$$\ddot{\Phi}(0) = \Big(\int \dot{\varphi}_0\, d\mu \Big)^2 + \int (\ddot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_0^2)\, d\mu, \tag{9}$$

où $\dot{\varphi}_0$ représente la fonction $x \to \dot{\varphi}(x, 0)$; de même $\ddot{\varphi}_0$, φ_0 représentent dans ce qui suit les fonctions sur $\mathbb{R}^n$ obtenues en fixant $t = 0$. La proposition qui suit ne prétend pas donner le résultat le plus général. On remarquera que si on veut prouver la convexité de Φ dans un intervalle autour de 0, on peut se permettre de modifier φ de façon à vérifier les hypothèses ci-dessous, et d'obtenir Φ comme limite simple de fonctions convexes, si les fonctions modifiées $\widetilde{\varphi}$ donnent des $\widetilde{\Phi}$ à dérivée seconde positive.

Proposition 4.1. — *On suppose que φ_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, que $\dot\varphi_0 \in L_2(\mu)$ et $\ddot\varphi_0 \in L_1(\mu)$, et que $\ddot\Phi(0)$ est donné par la formule (9). Dans ce cas, $\ddot\Phi(0)$ est donné aussi par la formule (8), où l'inf est pris sur l'ensemble des fonctions v de classe C^2 à support compact.*

Preuve. — Considérons l'opérateur différentiel $L = \Delta - (\nabla\varphi_0)\cdot\nabla$, agissant sur l'espace C^2_{comp} des fonctions à support compact de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$. Il est bien connu et facile à vérifier que la transformation isométrique U de $L_2(\mu)$ sur $L_2(\mathbb{R}^n)$ définie par $Uf = \mathrm{e}^{-\varphi_0/2} f$ transforme l'opérateur $-L$ en l'opérateur $S = -\Delta + V$, avec $V = \frac14|\nabla\varphi_0|^2 - \frac12\Delta\varphi_0$; si $g = Uf$, on voit facilement que

$$\langle -Lf, f\rangle = \int |\nabla f|^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(|\nabla_x g|^2 + V(x)\,|g(x)|^2\Bigr)\, dx = \langle -\Delta g + Vg, g\rangle.$$

On va montrer que l'image par L de C^2_{comp} est dense dans le sous-espace H_0 de $L_2(\mu)$ formé des fonctions h telles que $\int h\, d\mu = 0$. Sinon, il existerait une fonction $f \in H_0$ non nulle orthogonale à toutes les Lh, ce qui implique que $g = Uf$ est orthogonale à toutes les $-\Delta\psi + V\psi$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a donc $\Delta g = Vg$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ce qui entraîne que $g \in H^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ par la théorie classique. Si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a $\theta g \in H^2(\mathbb{R}^n)$ et on note (en utilisant la nullité de l'intégrale de la divergence de $\theta^2 g\nabla g$) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(|\nabla(\theta g)|^2 + \theta^2 g\Delta g\Bigr) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta|^2 g^2.$$

En supposant que $\theta = 1$ dans un voisinage de 0, en introduisant $\theta_k(x) = \theta(x/k)$ pour tout $k \ge 1$, et en utilisant la relation $\Delta g = Vg$, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Bigl(|\nabla(\theta_k g)|^2 + V\,|\theta_k g|^2\Bigr) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\theta_k|^2 g^2 \xrightarrow[k]{} 0,$$

ce qui implique en revenant à f que $\int |\nabla f|^2\, d\mu = 0$; la fonction f est par conséquent constante, donc nulle puisqu'elle est d'intégrale nulle. On atteint une contradiction qui montre que l'image de L est dense dans H_0 (on pourra trouver l'origine du calcul précédent chez Christian Simader [Sim]). On en déduit que

$$\Bigl(\int \dot\varphi_0\, d\mu\Bigr)^2 = \min\Bigl\{\int (h - \dot\varphi_0)^2\, d\mu \,:\, h \in H_0\Bigr\} = \inf_v \Bigl\{\int (Lv - \dot\varphi_0)^2\, d\mu\Bigr\},$$

où v varie dans C^2_{comp}. On a déjà observé que $-\int (Lv)\,\dot\varphi_0\, d\mu = \int \nabla v\cdot\nabla\dot\varphi_0\, d\mu$; en intégrant par parties, et avec la relation formelle $\nabla L = L\nabla - \nabla^2\varphi\cdot\nabla$, on trouve

$$\int (Lv)^2\, d\mu = -\int (\nabla Lv)\cdot\nabla v\, d\mu = \int \bigl(\nabla^2 v\cdot\nabla^2 v + (\nabla^2\varphi_0\cdot\nabla v)\cdot\nabla v\bigr)\, d\mu.$$

On voit que $\nabla^2 v \cdot \nabla^2 v$ est le carré de la norme Hilbert-Schmidt du Hessien Hv de v, égal à $\mathrm{tr}((Hv)^2)$. Ainsi, on a montré que $\ddot\Phi(0)$ est l'inf en v de

$$\int (Lv - \dot\varphi_0)^2 \, d\mu + \int (\ddot\varphi_0 - \dot\varphi_0^2) \, d\mu = \int \big((Lv)^2 - 2(Lv)\,\dot\varphi_0 + \ddot\varphi_0\big) \, d\mu =$$

$$\int \big((\nabla^2\varphi_0 \cdot \nabla v) \cdot \nabla v + 2\,\nabla\dot\varphi_0 \cdot \nabla v + \ddot\varphi_0 + \mathrm{tr}((Hv)^2)\big) \, d\mu,$$

qui coïncide avec l'expression attendue. □

4.1. **Le cas complexe**

Les ensembles pseudo-convexes jouent dans une certaine mesure en analyse complexe le rôle des ensembles convexes, et les fonctions pluri-sous-harmoniques celui des fonctions convexes. On pourrait se demander si la fonction Φ définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\mathrm{e}^{-\Phi(z)} = \int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{e}^{-\varphi(x,z)} \; dx$$

est sous-harmonique lorsque φ est pluri-sous-harmonique sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, mais on sait depuis longtemps que cet énoncé trop général n'est pas vrai. Bo Berndtsson [Ber] a trouvé certaines conditions qui garantissent néanmoins ce résultat, et Dario Cordero [Co2] a remarqué que ce résultat de Berndtsson s'applique à certaines quantités géométriques liées à l'interpolation complexe en dimension finie. Par exemple, le volume de la boule unité de l'espace A_θ de la théorie de Calderon est log-concave par rapport à $\theta \in [0,1]$. Ce résultat donne une preuve de l'inégalité de Santaló dans le cas d'espaces normés complexes.

L'inégalité de Santaló dit que le produit des volumes $|C|\,|C^{\mathrm{o}}|$ d'un convexe symétrique C de $\mathbb{R}^n$ et de son polaire C^{o} est maximal pour la boule euclidienne. Si on se place dans $\mathbb{C}^n$, si C est la boule unité de l'espace normé complexe $A_0 = X = (\mathbb{C}^n, \|.\|)$, on sait que la boule unité de X^* est le polaire C^{o}, et que l'interpolé de Calderon $(X, X^*)_{1/2}$ est isométrique à $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel. Le résultat précédent donne donc Santaló dans le cas de boules unité complexes, mais il donne aussi un résultat pour les volumes calculés avec certaines mesures log-concaves.

BIBLIOGRAPHIE

[And] T. W. Anderson, *The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 170–176.

[ABBN] S. Artstein, K. Ball, F. Barthe et A. Naor, *Solution of Shannon's problem on the monotonicity of entropy*, preprint (2002).

[Ba1] K. Ball, *Cube slicing in $\mathbb{R}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 465–473.

[Ba2] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric aspects of functional analysis (1987–88), 251–260, Lecture Notes in Math. 1376, Springer.

[Ba3] K. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. **44** (1991), 351–359.

[Ba4] K. Ball, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, vol 1, 161–194, North Holland 2001.

[BBN] K. Ball, F. Barthe et A. Naor, *Entropy jumps in the presence of a spectral gap*, Duke Math. J. **119** (2003), 41–63.

[Bar] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335–361.

[BaC] F. Barthe et D. Cordero-Erausquin, *Inverse Brascamp-Lieb inequalities along the Heat equation*, à paraître dans GAFA seminar.

[Ber] B. Berndtsson, *Prékopa's theorem and Kiselman's minimum principle for plurisubharmonic functions*, Math. Ann. **312** (1998), 785–792.

[Bob] S. G. Bobkov, *An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space*, Ann. Proba. **25** (1997), 206–214.

[BoL] S. G. Bobkov et M. Ledoux, *From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 1028–1052.

[Bo1] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. **30** (1975), 207–216.

[Bo2] C. Borell, *The Ehrhard inequality*, C. R. Acad. Sci. Paris **337** (2003), 663–666.

[BrL] H. J. Brascamp et E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Advances in Math. **20** (1976), 151–173.

[Bre] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375–417.

[Ca1] L. A. Caffarelli, *The regularity of mappings with a convex potential*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 99–104.

[Ca2] L. A. Caffarelli, *Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities*, Comm. Math. Phys. **214** (2000), 547–563. Erratum. Comm. Math. Phys. **225** (2002), 449–450.

[CHL] M. Capitaine, E. P. Hsu et M. Ledoux, *Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces*, Electron. Comm. in Proba. **2** (1997), 71–81.

[Co1] D. Cordero-Erausquin, *Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities*, Arch. Ration. Mech. Anal. **161** (2002), 257–269.

[Co2] D. Cordero-Erausquin, *Santaló's inequality on $\mathbb{C}^n$ by complex interpolation*, C. R. Acad. Sci. Paris **334** (2002), 767–772.

[CFM] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi et B. Maurey, *The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, à paraître dans J. Funct. Anal. (2004).

[CMS] D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger, *A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb*, Invent. Math. **146** (2001), 219–257.

[CNV] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret et C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Advances in Math. **182** (2004), 307–332.

[DaG] S. Das Gupta, *Brunn-Minkowski inequality and its aftermath*, J. Multivariate Anal. **10** (1980), 296–318.

[Ehr] A. Ehrhard, *Symétrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand. **53** (1983), 281–301.

[Gar] R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 355–405.

[HaO] H. Hadwiger et D. Ohmann, *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie*, Math. Z. **66** (1956), 1–8.

[Ha1] G. Hargé, *A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure*, Ann. Probab. **27** (1999), 1939–1951.

[Ha2] G. Hargé, *Inequalities for the Gaussian measure and an application to Wiener space*, C. R. Acad. Sci. Paris **333** (2001), 791–794.

[HeM] R. Henstock et A. M. Macbeath, *On the measure of sum-sets. I. The theorems of Brunn, Minkowski, and Lusternik*, Proc. London Math. Soc. **3** (1953), 182–194.

[Kan] M. Kanter, *Unimodality and dominance for symmetric random vectors*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 65–85.

[Kno] H. Knothe, *Contributions to the theory of convex bodies*, Michigan Math. J. **4** (1957), 39–52.

[Lat] R. Latała, *A note on the Ehrhard inequality*, Studia Math. **118** (1996), 169–174.

[LaO] R. Latała et K. Oleszkiewicz, *Gaussian measures of dilations of convex symmetric sets*, Ann. Probab. **27** (1999), 1922–1938.

[Led] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon, American Mathematical Society, 2001.

[Lei] L. Leindler, *On a certain converse of Hölder's inequality*, Acta Sci. Math. **33** (1972), 217–223.

[Lie] E. H. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, Invent. Math. **102** (1990), 179–208.

[Lus] L. Lusternik, *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen*, Doklady Akad. SSSR, 1935, No.3, 55-58.

[MC1] R. J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps*, Duke Math. J. **80** (1995), 309–323.

[MC2] R. J. McCann, *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 589–608.

[MeP] M. Meyer et A. Pajor, *Sections of the unit ball of ℓ_n^p*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 109–123.

[Mon] G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, pages 666–704, 1781.

[Pis] G. Pisier, The volume of convex bodies and Banach space geometry, Cambridge Tracts in Mathematics 94, Cambridge University Press, 1989.

[Pit] L. D. Pitt, *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*, Ann. Probability **5** (1977), 470–474.

[Pre] A. Prékopa, *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math. **34** (1973), 335–343.

[Sim] C. G. Simader, *Essential self-adjointness of Schrödinger operators bounded from below*, Math. Z. **159** (1978), 47–50.

[SuT] V. N. Sudakov et B. S. Tsirel'son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, J. Soviet Math. **9** (1978), 9–18 ; traduit de Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I. **41** (1974), 14–24.

[Vil] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics **58** Amer. Math. Soc. 2003.

Bernard MAUREY

Université Paris 7,

et

Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées
UMR 8050 du CNRS
Université de Marne la Vallée
Cité Descartes – Champs sur Marne
F-77454 MARNE LA VALLÉE Cedex 2
E-mail : `maurey@math.univ-mlv.fr`