EXCURSION AU CENTRE ET AUTOUR DES MATHÉMATIQUES DE JEAN-PIERRE KAHANE, AVEC QUELQUES ÉCARTS

par

Bernard Maurey

Le texte qui suit n'est pas rigoureusement identique à celui qui a paru dans le volume 33 de la revue *Séminaires et Congrès* de la SMF, consacré au Congrès 2018 de la SMF, à Lille. Outre des changements typographiques, quelques petites corrections ont été appliquées, le titre modifié. De plus, le texte dans la revue était en principe soumis à une contrainte de longueur qui n'existe pas ici ; en conséquence, certains passages vraiment trop compactés ont été développés dans cette version. En particulier, la section 7.3 sur le théorème de Marcus–Pisier a été récrite.

Montpellier, le 20 juin 2020

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 01, 01A70, 42A, 42A61, 42-03, 60, 60G15.

Mots clefs. — séries trigonométriques, analyse de Fourier, ensembles de Cantor, ensembles d'unicité, nombres de Pisot, séries aléatoires de fonctions, processus gaussiens.

Je remercie Hervé Queffélec, qui m'a confié ce travail ; j'y suis entré avec un peu de réticence, mais j'y ai rapidement trouvé un grand intérêt. Hervé a lu une version préliminaire, exprimé des remarques et indiqué des compléments qui ont notablement enrichi cet article. Gilles Godefroy m'a lui aussi fait part de suggestions judicieuses et d'informations utiles. Je remercie Nikolaï Nikolski qui s'est intéressé au projet, et m'a fourni des renseignements de première main sur les rapports de Kahane avec la Russie et Saint-Pétersbourg en particulier. Les observations éclairées et bienveillantes du rapporteur m'ont fourni un appréciable apport d'énergie pour conclure en mars 2019 une (trop) longue période de rédaction. Je remercie Internet, qui peut me transmettre dans mon fauteuil *La théorie analytique de la chaleur* de Fourier ou les articles de Dirichlet et Cantor, entre énormément d'autres. Enfin, Sorbonne Université et l'IMJ-PRG m'ont fourni les moyens d'effectuer ce travail.

Résumé. Ce texte développe le contenu d'une conférence donnée en juin 2018 au Congrès de la SMF à Lille. Dans l'exposé oral j'ai parlé de l'œuvre si diverse et de la carrière de Jean-Pierre Kahane, disparu au mois de juin 2017. Ses travaux conduisent naturellement à Joseph Fourier, né il y a 250 ans : par les séries de Fourier bien sûr, thème central des recherches de Kahane ; mais aussi par l'intérêt que Kahane a porté à l'histoire des mathématiques, et à Fourier en particulier. Je suivrai les livres de Kahane, qui dévoilent beaucoup des sujets qui l'ont passionné ; je parlerai encore ici de la thèse avec Szolem Mandelbrojt, du mouvement brownien, du théorème de Gleason–Kahane–Żelasko . . . cependant, je ne pourrai pas éviter de passer sous silence beaucoup d'autres aspects. Le prétexte du 50^{e} anniversaire de mai 68 me permettra de mentionner aussi Laurent Schwartz, qui d'ailleurs n'est pas étranger à l'histoire mathématique de Kahane.

En 2018, nous avons commémoré le 250^{e} anniversaire de la naissance de Joseph Fourier, et le premier anniversaire de la disparition de Jean-Pierre Kahane, survenue le 21 juin 2017 ; et aussi, un peu partout au début de l'année, le cinquantenaire de mai 68. Dans une *Notice* rédigée en 1981 dont je reparlerai [**KaNT**], Kahane a écrit : «La rédaction de cette notice m'a été proposée comme devoir de vacances. Elle s'est présentée pour moi comme une évocation de souvenirs. Le plan en est assez vague. Je pars de mes premiers travaux [...]». J'adopterai une attitude comparable pour répondre à la proposition qui m'a été faite par Hervé Queffélec de parler de l'œuvre de Kahane, et aussi de Fourier, au Congrès SMF à Lille. Outre les travaux de Kahane, je saisirai l'occasion d'évoquer des mathématiques qui l'intéressaient, certaines bien anciennes, et des mathématiciens qu'il a côtoyés. Je mentionnerai aussi quelques souvenirs qui me sont personnels. Et le plan sera vague.

1. Prologue

Dans cet article consacré à Jean-Pierre Kahane, on parlera presque exclusivement de mathématiciens qu'il a connus ou d'anciens qu'il a révérés, et de mathématiques qu'il a créées ou simplement rédigées dans ses livres. Je n'étais pour ma part, ni proche de lui personnellement, ni très proche de ses mathématiques, et je ne partageais pas non plus sa passion pour Fourier. Pour me rapprocher du sujet je suivrai un détour, en célébrant (pas beaucoup) un autre anniversaire, celui de mai 1968 ; je prendrai ce prétexte pour introduire une personnalité que j'ai mieux connue, Laurent Schwartz, que j'ai vu pour la première fois —heureux hasard— en 68. Entre Schwartz, Fourier, Kahane, je ferai des tentatives laborieuses pour tendre un fil, par endroit bien ténu.

1.1. Il y a cinquante ans, rencontre avec Laurent Schwartz. — C'était une époque splendide : j'avais 20 ans. Et c'était le printemps, commencé quand naissait le *Mouvement du 22 mars*. Dépourvu d'éducation politique, je n'ai pu avoir qu'une perception épidermique des événements. Je me souviens qu'à un certain point, en mai ou juin, il suffisait de lever le pouce dans une rue de Paris pour être pris en autostop par la première ou la deuxième voiture qui passait, et engager une conversation sympathique sur la situation générale. Il pouvait y avoir un peu d'attente pour voir la deuxième voiture arriver : les mouvements de grève, touchant l'approvisionnement, avaient réussi à réduire massivement la circulation automobile, bien mieux que la Mairie de Paris des années 2010, plutôt quelque chose comme le résultat du confinement de 2020. J'ai été tout de suite séduit et gravement contaminé par le dangereux *esprit de dérision*. Pourquoi se moquer des gens en place ? S'ils sont en place et importants, c'est sans doute qu'ils l'ont bien voulu : il est difficile de forcer quelqu'un à devenir important ; bien souvent, c'est qu'il s'est sensiblement écarté des principes vertueux d'égalité-fraternité qu'on nous inculquait alors à l'école élémentaire.

Élève de seconde année à l'École polytechnique, j'avais déjà eu un premier contact avec Fourier l'année précédente, en consultant la liste des professeurs d'Analyse inscrite sur l'un de deux longs panneaux verticaux dans l'amphi Poincaré de la Montagne Sainte-Geneviève, de part et d'autre de l'estrade, liste lue et relue à des moments d'ennui —les cours étaient obligatoires, à l'époque, dans cette école «militaire»—. Fourier nous avait aussi fait souffrir avec sa *transformation*, il avait bénéficié de la complicité de Schwartz et de ses distributions prétendument «tempérées». Schwartz n'était pas le professeur de notre promotion, mais nous étudiions les distributions sur ses fascicules de cours, proches je pense de ses enseignements de TMP ou MMP à la fac, *Techniques* et *Méthodes Mathématiques de la Physique*. Dans mon souvenir, on apprenait peu de choses sur les *séries* de Fourier à l'École polytechnique, en tout cas pas que Lennart Carleson (90 ans en 2018) venait de prouver [**Carl**] en 1966 la convergence presque partout de la série de Fourier des fonctions de $L^2[0, 2\pi]$ (nous savions tout de même ce que *presque partout* signifiait).

J'aurai à citer trop souvent l'École polytechnique au début de mon exposé, je dirai simplement «l'École», comme s'il n'y en avait qu'une, imitant en cela les anciens élèves d'une autre école bien connue. Cela fait ricaner beaucoup de gens, moi le premier (avouons qu'il y a beaucoup plus de personnes qui ont essayé, mais n'ont pas réussi à entrer à l'École normale supérieure, que d'anciens élèves de cette dernière).

Des élèves de l'École, donc, renouent en mai 68 —toute proportion gardée— avec son origine révolutionnaire, ou avec les journées de 1830 et 1848. Ils veulent dynamiter un enseignement à leurs yeux gravement sclérosé. À ce moment bizarre, le sans-grade peut accoster le général en chef et discuter avec lui le plan de bataille. C'est ainsi que je peux approcher Schwartz et des professeurs importants dans une petite salle où se tiennent les séances d'un «Comité de Salut Scientifique» ; «on» organise des cours sauvages, «l'École du Mois III» après mars 68. Parmi les cours ainsi organisés de but en blanc, je me souviens de ceux que j'ai suivis : Jean-Pierre Serre vient faire un cours d'Arithmétique, Jean-Louis Krivine un cours de Logique et Théorie des Modèles, chacun d'une dizaine de séances. Krivine venait de passer sa thèse en 1967, sous la direction de Kahane, au moins formellement. J'ai rédigé, sur une petite machine à écrire, des comptes rendus des cours de Serre, que je lui communiquais bien entendu pour approbation, avant reproduction et diffusion limitées. Il m'a envoyé une lettre où il expliquait, très gentiment et patiemment, que je n'avais pas compris grand-chose à ce qu'il avait dit ! J'ai malheureusement égaré cette lettre, qui serait assurément document historique aujourd'hui. Plus tard, j'ai fréquenté longtemps Krivine à Paris 7, j'ai même écrit un article avec lui. Il m'a prétendu un jour qu'il ne se rappelait pas être entré dans l'École en 68 ; je l'ai revu au mois de mai 2018, il m'a redit que ce souvenir n'est pas remonté du fond de sa mémoire.

Beaucoup parmi nos «vétérans» savent que les cours de Schwartz suivaient un strict cérémonial : aux chaudes journées du début de l'été, il enlevait d'abord la veste, plus tard dénouait la cravate, il pouvait aussi retrousser ses manches. Éventuellement, vers le milieu de la séance, la pause-plaisanterie. Et, en présence d'étudiants, d'un humour sérieux pour ainsi dire, par exemple : il n'avait pas pu monter dans l'autobus pour la place Banach à Varsovie, le bus était «complet» ! Schwartz a rapporté l'anecdote [**SchM**, ch. IX, p. 339], et je l'ai moi-même entendu, de mes propres oreilles, faire cette plaisanterie. Il était d'un abord bienveillant en général, comme je l'ai raconté sur le ton de la blague [**MauR**]. Il avait coutume de prononcer avec une certaine emphase les noms des mathématiciens qu'il appréciait ou respectait. Ainsi, et pour anticiper sur la suite, nous l'avons toujours entendu dire beaucoup de bien de Kahane, ou, pour n'en citer que deux, de Paul-André Meyer. Cependant, j'ai parfois cru discerner chez lui une aversion viscérale enfouie pour d'autres, à l'encontre desquels il avait, j'imagine, des griefs ineffaçables.

Schwartz, gendre de Paul Lévy, avait un penchant pour les probabilités, même si son style y était plutôt celui d'un analyste, qui venait de traiter dans les années 1965 des mesures de Radon sur les espaces topologiques [**SchR**] et se dirigeait vers sa période «radonifiante», celle du *séminaire rouge* [**MauR**]. Il avait aussi, quelques années auparavant, présenté en février 1958 le mouvement brownien au séminaire Bourbaki (vol. 4, exp. 161, p. 327–349). En 1968-69, j'ai suivi le cours de 3$^{\text{e}}$ cycle qu'il a donné à l'IHP sur les *désintégrations de mesures*. Ses Notes CRAS sur le sujet étaient parues une année avant à peine [**SchD**]. C'est sous son impulsion que j'apprends alors des rudiments de la théorie des martingales, en étudiant une petite partie du livre de P.-A. Meyer, *Probabilités et Potentiel* ; mouvement étrange et généreux, Schwartz laisse l'apprenti de 21 ans les exposer dans une séance de son cours, en guise de stage de DEA —c'était le M2 de l'époque— ; c'est grâce à lui aussi que j'ai connu puis utilisé les lois stables de Lévy, faciles à définir par leur transformée de Fourier $t \mapsto \mathrm{e}^{-c|t|^p}$, où $c > 0$ et $0 < p < 2$.

En 1969, je rejoins le Centre de Mathématiques de l'École, récemment créé par Schwartz et dirigé par lui, et je commence ma thèse d'État sous sa direction. L'esprit de dérision, Schwartz ne l'avait pas ; du moins s'abstenait-il toujours d'entrer dans cette voie, chaque fois que nous essayions de l'y pousser. L'appellation «séminaire

Maurey–Schwartz » est à 51% une plaisanterie *dérisionnelle* de ma part, et pour le reste c'était peut-être la marque d'un arrivisme plus ou moins inconscient, qui a — je dois l'avouer — assez bien fonctionné : en 1972-73, notre petit groupe d'analyse du Centre de Maths dispose de quelques résultats qui justifieraient bien de leur consacrer un séminaire local. Schwartz me demande : « Comment va-t-on l'appeler ? » Je lui réponds du tac au tac : « Y a qu'à l'appeler Maurey–Schwartz » (je connaissais bien sûr les fameux Cartan–Schwartz, entre autres séminaires dont le nom incluait celui de Schwartz) ; un peu pris de court, il a laissé passer, le Maître aurait dû répondre : « Oui, ça serait rigolo, mais il faut rester sérieux » ; à moins que, et je n'ai pas envie d'y croire, il ne m'ait vu venir et tendu une perche si grosse que je n'ai pas pu m'empêcher de la saisir. Dès les débuts du séminaire, Gilles Pisier a rejoint le Centre de Mathématiques, et très vite, ce séminaire aurait dû s'appeler « Maurey–Pisier–Schwartz ». Schwartz abolira en 1977 ce « culte des personnalités » [**SchM**, fin du ch. IX, p. 366] après le déménagement de l'École à Palaiseau ; le séminaire deviendra finalement *Séminaire d'analyse fonctionnelle* en 1978-79, avant de disparaître (de l'École) à l'automne 81.

Il était bon d'avoir un protecteur influent ; par la recommandation de Schwartz et le soutien local de son ancien élève Pierre Saphar, je deviens *assistant stagiaire* à Orléans en 1970. Je n'y reste pas longtemps, Schwartz me fait revenir quinze mois plus tard à l'École, sur un poste *ad hoc* d'assistant de recherche aux attributions fumeuses. J'exerçais une fonction surréaliste de mouche du coche (rapidement remise au format standard, un ou deux ans après) : en complément de l'enseignant officiel, dans la même salle et en même temps, je tournais autour des élèves dans les « petites classes » (les Travaux Dirigés *de luxe* de l'École) pour aiguillonner ceux qui voulaient bien se laisser faire. C'est là que j'ai aperçu pour la première fois Pisier, alors élève, dans la petite classe de François Combes attachée au cours d'option de Schwartz sur les *espaces vectoriels topologiques*. Les cours d'option, introduits après 68, permettaient aux enseignants — sinon aux élèves — de se faire plaisir : j'y ai vu Schwartz démontrer le théorème de graphe fermé de Marc de Wilde (pour les *espaces à réseaux absorbants*), un théorème de 1967 [**Wild**] applicable aux espaces de distributions. Par un trait de plume de Schwartz, biffant de la liste un autre nom (je l'ai appris plus tard de sources bien informées, proches du comité de sélection), je suis bombardé petit conférencier à l'ICM 1974 (Congrès international des mathématiciens) à Vancouver. Il a aussi une grosse part de responsabilité dans ma nomination comme Maître de Conférences à Paris 7 (c'était en 1977 ce qu'est aujourd'hui un professeur de deuxième classe).

J'ai été heureux et fier d'être appelé à faire le « bouffon du roi » [**MauR**] en presque-"prime time" au congrès organisé en 1983 à l'École, à l'occasion de la retraite universitaire de Schwartz (qu'il a prise à 68 ans). Mais je n'ai jamais fait partie de ses proches, il y avait je pense trop de « distance mentale » entre l'homme investi dans tant de missions, éducatives ou politiques, et le dilettante négligent. De temps en temps, cinq ou six fois peut-être en plus de vingt ans, il me passait un coup de téléphone, une fois par exemple pour l'aider sur un "reviewing" qu'il devait faire. Je garde un souvenir ému et un peu attristé d'un de ses derniers coups de fil où, l'âge commençant à peser, il me confiait qu'il lui devenait plus difficile d'arriver à rassembler par l'esprit tous les éléments d'une preuve mathématique complexe. Admiration, reconnaissance, sont les mots qui me viennent pour conclure ; de l'affection aussi, que je ne saurais exprimer sans un brin de moquerie.

1.2. Joseph Fourier et son époque. — Kahane a publié plusieurs articles sur Fourier, il a également écrit la première partie d'un livre avec Pierre Gilles Lemarié-Rieusset [**KLem**], *Séries de Fourier et ondelettes*, titre que nous abrégerons en *SFEO* ; cette première partie, de nature historique, contient un long développement sur Fourier (chapitres 1, 2 et 3). Avec le 250e anniversaire de sa naissance, c'est assez de raisons pour parler brièvement ici de Fourier, j'emprunterai à un exposé plus détaillé paru dans la *Gazette* [**MauG**], où j'ai pillé sans vergogne le livre de Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert [**DhRo**] —préfacé par Kahane—.

Jean Baptiste Joseph Fourier naît le 21 mars 1768 à Auxerre, dans une famille d'artisans. En 1790, il est enseignant au Collège d'Auxerre. D'abord réservé à l'égard de la Révolution, Fourier s'engage début 93 dans le *Comité de surveillance* d'Auxerre ; entré en conflit avec un Conventionnel pendant une mission à Orléans, il est inquiété, à la pire des époques : en juin 94, pendant la « Grande Terreur », peu avant la chute de Robespierre. Fin 1793, Pierre-Simon Laplace avait prudemment choisi de se mettre au vert du côté de Melun ; plusieurs de ses amis ou connaissances ont été guillotinés. Ces années étaient dangereuses, mais sans doute exaltantes ; dans *SFEO*, ch. 1, p. 8, Kahane cite une lettre de Fourier écrite en 1795 :

> « À mesure que les idées naturelles d'égalité se développèrent on put concevoir l'espérance sublime d'établir parmi nous un gouvernement libre exempt de rois et de prêtres, et d'affranchir de ce double joug la terre d'Europe depuis si longtemps usurpée. Je me passionnai aisément pour cette cause, qui est selon moi la plus grande et la plus belle qu'aucune nation ait jamais entreprise. »

Fin 94, Fourier est sélectionné pour être l'un des jeunes enseignants qui seront formés par la toute nouvelle « École Normale de l'an III » ; il s'y fait connaître de Gaspard Monge et suit les cours de Laplace. En mai 95, il devient *substitut* à l'École polytechnique sur la recommandation de Monge, puis instituteur-adjoint en octobre 95. Entretemps, la réaction thermidorienne l'a mis en prison pendant un bon mois, en juillet-août. Une fois cet épisode oublié, il s'installe à l'École et obtient une chaire en 97.

L'expédition d'Égypte est un épisode marquant de la vie de Fourier. Il quitte Paris pour l'Égypte en mars 98 ; en août 98, il est nommé Secrétaire perpétuel de l'Institut d'Égypte créé au Caire par Napoléon Bonaparte. Il joue un rôle politique, en particulier de négociateur avec les autorités locales ; après le retour de Bonaparte en France en août 99, il est l'un des principaux responsables civils de l'expédition. Il négocie encore à la fin de l'aventure, avec les Anglais, pour obtenir que les savants français puissent repartir dans les meilleures conditions possibles, avec l'essentiel de leurs notes et découvertes. L'activité de Fourier en Égypte ne se limite pas à la politique : il participe à des expéditions scientifiques et archéologiques, notamment en Haute-Égypte en septembre-octobre 99 ; il effectue des recherches mathématiques, entre autres un *Mémoire sur l'analyse indéterminée*, qu'on a pu voir comme une ébauche de ce que nous appelons la *programmation linéaire* (un thème qu'il reprendra dans les années 1820).

De retour d'Égypte, Fourier revient très brièvement à l'École, mais Bonaparte le nomme préfet de l'Isère en 1802. À Grenoble, Fourier commence à travailler sur la chaleur vers 1804. Fin 1807, il présente à l'Académie un premier mémoire sur la propagation de la chaleur. Les rapporteurs comprennent Joseph-Louis Lagrange, Laplace et Monge. Le mémoire n'est pas bien reçu par Lagrange, et de ce fait n'est pas «consacré» par l'Académie. En 1809, Fourier finit de rédiger la *Préface Historique* de l'ouvrage monumental *Description de l'Égypte* qui présente les découvertes de l'expédition ; la Préface, texte sensible de 90 pages, est soumise à la lecture de Napoléon. La même année, Laplace écrit à son tour sur la chaleur [**Lapl**]. Il en retrouve les équations, admet la priorité de Fourier : « Je dois observer que M. Fourier est déjà parvenu à ces équations, » il ajoute cependant «dont les véritables fondements me paraissent être ceux que je viens de présenter». Fourier remanie son texte en 1811 et obtient, enfin, un prix de l'Académie en janvier 1812, mais le rapport lui décernant le prix est loin d'être sans réserves. Plus tard, sous Louis XVIII, il est élu à l'Académie des Sciences en 1817 ; en 1822 il y devient secrétaire perpétuel, et il publie la version définitive de la *Théorie analytique de la chaleur* [**Four**]. À cette époque, il a l'occasion d'être en contact avec Sophie Germain, ils échangent une correspondance assez régulière entre 1820 et 1827.

Fourier a établi dès 1807 *l'équation de la chaleur* à l'intérieur d'un solide homogène,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \Delta v,$$

et il s'est servi de séries trigonométriques pour la résoudre dans des situations diverses ; il a calculé nombre de développements pour des fonctions 2π-périodiques non nécessairement continues, et systématisé la relation entre fonction et série «de Fourier». Nous allons insister sur un exemple qui a retenu l'attention de Kahane [**KLem**, 2.2, 2.4]. Fourier détermine la température d'équilibre $v(x, y)$ dans une lame rectangulaire d'équation $\{(x, y) : x \geqslant 0, |y| \leqslant \pi/2\}$ [**Four**, ch. III]. La température v est fixée au bord, égale à 1 quand $x = 0$ et $|y| < \pi/2$, égale à 0 quand $x \geqslant 0$ et $|y| = \pi/2$. L'équation d'équilibre à l'intérieur de la lame est $\Delta v = 0$. La condition au bord étant paire en y, Fourier envisage une solution combinaison de fonctions $\mathrm{e}^{-kx} \cos(ky)$, où la condition de nullité pour $|y| = \pi/2$ impose que k soit un entier impair ; il présente v sous la forme d'une série de fonctions

$$v(x, y) = a\,\mathrm{e}^{-x} \cos y + b\,\mathrm{e}^{-3x} \cos 3y + c\,\mathrm{e}^{-5x} \cos 5y + \cdots .$$

La condition $v = 1$ quand $x = 0$ lui fait rechercher un développement qui vérifie

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + \cdots \tag{1}$$

quand $|y| < \pi/2$. Pour résoudre, Fourier suppose d'abord qu'il n'y a que m inconnues $a, b, \ldots, r$. Il écrit alors m équations, la première provenant de (1) et les $m - 1$ suivantes étant obtenues en dérivant $2j$ fois la première, pour $j = 1, \ldots, m - 1$, ce qui donne

$$0 = a \cos y + b 3^{2j} \cos 3y + c 5^{2j} \cos 5y + \cdots + r(2m - 1)^{2j} \cos(2m - 1)y.$$

Fixant $y = 0$, il résout (« à la main », au long de quatre pages de calcul) un système de Vandermonde, et passe à la limite avec m en faisant appel à la formule du produit infini de Wallis qui fournit $a = 4/\pi$, puis $b = -a/3$, $c = a/5, \ldots$ dans l'équation (1). Kahane [**KLem**, 2.4] voit dans cette méthode peu orthodoxe la recherche de polynômes trigonométriques de plus en plus « plats » en 0, qui convergent vers la solution.

Fourier observe que la valeur à gauche de l'équation (1) devient -1 si on ajoute π à y. Il détermine ainsi la valeur pour tout y de la somme de sa série : il a obtenu le développement en série trigonométrique d'une fonction « en créneau »,

$$\operatorname{sign}(\cos y) = \frac{4}{\pi}\Big(\cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots\Big). \tag{2}$$

Ce n'est que plus loin dans le livre que Fourier donne les formules intégrales que nous connaissons pour le calcul des coefficients. Il les justifie de plusieurs façons, avant de proposer enfin à l'art. 221 la méthode qui restera, qu'il introduit d'abord pour une série de sinus : multiplier la somme $S(x) = \sum b_k \sin(kx)$ par $\sin nx$ et intégrer le produit terme à terme de 0 à π, en utilisant l'orthogonalité.

Fourier décrit plusieurs exemples « limités » dans l'espace : boule, anneau, cylindre ; son étude de la chaleur dans un cylindre de longueur infinie fait apparaître dès 1807 la fonction de Bessel J_0, presque dix ans avant son introduction par Friedrich Bessel. Enfin, le cas de l'espace entier voit arriver la transformation de Fourier sur la droite ainsi que « la formule d'inversion de Fourier », dans le dernier chapitre du livre de 1822.

Siméon Denis Poisson est un concurrent, on pourrait dire un *adversaire* de Fourier (Kahane [**KLem**, 3.5]). Du côté des partisans, on peut compter Peter Gustav Lejeune Dirichlet, né en 1805 à Düren, entre Cologne et Aix-la-Chapelle ; il est à Paris de 1822 à 1826, il y côtoie Fourier. Dans son célèbre article [**Diri**] de 1829, en français, Dirichlet reproduit la formule des coefficients qu'on trouve chez Fourier à la fin de l'article 233 [**Four**],

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(\alpha)\,\partial\alpha + \frac{1}{\pi}\left\{\begin{matrix} \cos x \displaystyle\int \varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha + \cos 2x \int \varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha \ldots . \\ \sin x \displaystyle\int \varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha + \sin 2x \int \varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha \ldots . \end{matrix}\right\}.$$

L'article [**Diri**] est repris dans la section 4.5 du livre *SFEO*, où Kahane affiche son intention de nous faire lire des textes originaux, du XIX^e siècle principalement.

On a pu dire que Fourier est resté méconnu, maltraité en France, en dépit de sa reconnaissance (tardive) par l'Académie. Pourtant, Dirichlet l'a célébré, en français, et il a dû transmettre à Bernhard Riemann sa haute appréciation des travaux de Fourier. La partie historique du mémoire d'habilitation de Riemann [**RieD**], qui est donnée par Kahane [**KLem**, 5.9] en allemand et en traduction française [**RieR**], affirme :

> « C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques. »

Fourier voulait œuvrer à la compréhension du monde, mettre en équation un phénomène naturel fondamental, comme Newton l'avait fait pour l'attraction des corps ; dans le *Discours préliminaire* [**Four**], repris dans *SFEO*, sec. 2.5, Fourier écrit :

> « La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers [...] Le but de notre ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Cette théorie formera désormais une des branches les plus importantes de la physique générale. »

Kahane a souligné l'opposition entre le point de vue de Fourier et celui de certains mathématiciens « purs » ; il a cité [**KLem**, 4.6] un extrait très connu d'une lettre de Carl Jacobi à Adrien-Marie Legendre :

> « Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain [...] »

Revenant sur le relatif oubli dans lequel Fourier est tombé en France dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle, Kahane (dans la *Gazette*, en 2014) croit en une convergence math-physique à l'époque moderne, qui rend caducs certains reproches faits à Fourier :

> « Cette méconnaissance de Fourier est maintenant datée. Elle ne s'est maintenue en France qu'à la faveur d'un divorce entre mathématiques et physique qui est aujourd'hui complètement résorbé. L'une des plus grandes universités françaises, à Grenoble naturellement, porte le nom de Joseph Fourier. »

1.3. Jean-Pierre Kahane. — Je viens d'un petit village mathématique, un peu primitif, un peu sauvage, appelé « Géométrie des Espaces de Banach ». Schwartz s'en est approché, il a même relaté des faits qui s'y passaient [**SchG**], mais sans jamais y entrer vraiment ; Jean Bourgain, trop tôt et douloureusement disparu fin 2018, l'a traversé dans sa jeunesse ; le village l'a senti passer : en plusieurs places, l'herbe ne repousse plus ! Je me suis demandé pourquoi le paysan que je suis était appelé, même au bénéfice de l'âge, à parler des travaux de Kahane, dont il ignorait quasi-tout. Il y a quand même un point de contact : au village, tout le monde connaît les *inégalités de Khintchine–Kahane* qui généralisent au cadre vectoriel normé les inégalités, dues à Alexandre Khintchine, sur les sommes (scalaires) de variables de Bernoulli — si on préfère, les sommes de fonctions de Rademacher —. J'y reviendrai à la section 3.3.

Jean-Pierre Kahane est né le 11 décembre 1926 à Paris, il est entré à l'École normale supérieure en 1946 ; après sa thèse d'État en 1954 sous la direction de Szolem Mandelbrojt [**KaPU**], il devient professeur à Montpellier, et en 1961, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, centre d'Orsay, qui deviendra Université Paris XI (Paris-Sud). Il délivre une conférence plénière au Congrès International des Mathématiciens à Stockholm en 1962. Il a été le deuxième président de l'Université Paris-Sud, de 1975 à 1978, correspondant de l'Académie des Sciences en 1982, puis membre à partir de 1998.

Revenons aux débuts. Kahane prépare sa thèse à partir de 1949 en tant qu'attaché de recherche au CNRS rénové de frais. Paul Malliavin, né en 1925, agrégé en 1946, est lui aussi thésard de Mandelbrojt, en même temps. Les premiers intérêts mathématiques de Malliavin sont proches de ceux de Kahane, à un décalage près dans le temps : la première Note de Malliavin porte sur les séries trigonométriques [**MalT**], il y mentionne un résultat d'Arnaud Denjoy, les travaux de Raphaël Salem et les ensembles parfaits symétriques, des sujets traités par Kahane par la suite. Malliavin passe sa thèse en 54, *Sur quelques procédés d'extrapolation*. La thèse de Kahane est aussi de 54 ; elle est publiée aux *Annales de l'Institut Fourier* en 55 [**KaPU**]. Tous deux sont invités au Congrès de Stockholm en 1962. Kahane y donne une conférence d'une heure, *Transformées de Fourier des fonctions sommables*, Malliavin un exposé d'une demi-heure intitulé *Ensembles de résolution spectrale*, dans la section Analyse. Yitzhak Katznelson, né en 1934, est un autre élève de Mandelbrojt, qui commence sa thèse dans la proximité scientifique de Kahane ; Katznelson et Kahane écriront de nombreux articles ensemble.

Kahane a dit que pour Fourier, Augustin Louis Cauchy « n'était pas un ami » (dans *SFEO*, ch. 1, p. 11). Un biographe écrivant sur Kahane trouverait-il la même formule, s'agissant de Malliavin ? Les deux hommes avaient traversé les années de guerre de façons bien différentes, et ils sont restés situés à des coins opposés de l'échiquier politique. Dans son hommage à la mort de Paul Malliavin, Jean-Michel Bismut parle cependant d'une complicité continue entre les deux mathématiciens (dans la *Gazette* 134 en 2012, p. 111–115). Les deux « complices » ont co-rédigé un appendice à la traduction française du livre *Les anneaux normés commutatifs* de Gelfand, Raikov et Shilov (1964). Cet appendice présente le contre-exemple de Malliavin à la synthèse spectrale et la réciproque de Katznelson au théorème de Wiener–Lévy, deux sujets qu'on abordera plus loin. Kahane a exposé les travaux d'Arne Beurling et Malliavin au séminaire Bourbaki (exp. 225, 1961-62). Il a écrit un article dans la *Gazette* à la mort de Malliavin ; ce texte reflète une profonde admiration pour l'œuvre mathématique, je n'y ai vu toutefois aucun élément d'ordre personnel ou amical.

Dans sa « Notice sur les Titres et Travaux scientifiques » de 1981 [**KaNT**], écrite pour se présenter aux académiciens —Notice qu'il faut compléter par son discours de 99 à l'Académie [**KaDA**]—, Kahane livre son propre point de vue sur ses travaux et sur sa trajectoire mathématique. Il se rappelle sa première impression des mathématiques de Mandelbrojt, son directeur de thèse, comme celle d'une forêt vierge à la richesse luxuriante, difficile à pénétrer ; puis il corrige : «le plus étrange avec cette forêt vierge est qu'elle n'est pas vierge du tout ; c'est l'œuvre croisée de cent jardiniers». En 99, entrant à l'Académie comme membre, il parle encore de jardin à propos de Mandelbrojt [**KaDA**], et dans un texte intitulé *Le plaisir des mathématiques* [**KaPM**], il écrit en 2005 : «Comme chercheur, je me suis senti jardinier plus qu'architecte».

On voit défiler dans la Notice ses très nombreuses missions à l'étranger, pourtant limitées à l'année 1981 : Tunis, Bucarest, Bombay, Buenos-Aires, Brésil, Jérusalem, Pologne (Varsovie, Jabłonna, Wisła), États-Unis (Stanford, Princeton, Chicago, Boston), Canada (Montréal, Vancouver), Suède, Chine (Wuhan), URSS (Erevan)... Plusieurs de ces missions ont été l'occasion de publier des "Lecture Notes".

Apportons une attention spéciale à la mission à Erevan (aujourd'hui en Arménie) : il s'agit, autant que je sache, de la première visite de Kahane en URSS, pour un grand congrès en 1965, le premier colloque international d'analyse organisé en URSS. Kahane y a établi un contact privilégié avec Victor Havin, membre éminent de l'équipe d'analyse de Léningrad/Saint-Pétersbourg ; il a visité la Russie plusieurs fois après 1981, il est resté en rapport avec Havin —échanges de lettres, coups de téléphone— ; on peut les voir ensemble (avec Nikolaï Nikolski, élève de Havin) sur une photo de 1989, dans un article consacré à la vie, à la carrière et aux mathématiques de Havin [**BKNH**, p. 38]. Kahane a inclus des résultats des élèves de Havin dans un de ses livres [**KaAC**]. En 1978, il a contribué au recueil "99 unsolved problems of linear and complex analysis" (Zap. Nauch. Sem. LOMI, vol. 81) par une page (16.5) de questions, "Two problems on trigonometric series" ; il a écrit en 1981 une Note CRAS avec Sergeï Hruščev et Katznelson.

Dès le début de sa *présentation des travaux*, Kahane indique dans sa Notice :

> «En 1950, il était permis à un étudiant en mathématiques d'être incroyablement ignorant. C'était mon cas et il m'en reste une grande naïveté dans beaucoup de domaines importants».

Ce n'est vraiment pas l'impression qu'on a en lisant *SFEO*, on a plutôt le sentiment d'avoir affaire à un Encyclopédiste d'un professionnalisme méticuleux. Kahane a parcouru tant de chemins mathématiques que je n'aurai pas la capacité de les apprécier tous, et pour beaucoup d'entre eux, pas la place ni le temps de rapporter sérieusement. J'en choisirai quelques-uns, et fidèle au modèle que m'a donné l'enseignement oral de Schwartz, j'expliquerai soigneusement les points les plus faciles...

Un recueil d'Œuvres choisies de Kahane a été publié en 2009 ; pour ne pas allonger à l'excès la bibliographie, je renverrai autant que possible à ce volume [**KaSW**]. Kahane a écrit trois livres de recherche, *EPST* (avec Salem) : *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, 1963, 1994 [**KSal**] ; *SFAC* : *Séries de Fourier absolument convergentes*, 1970 [**KaAC**] ; *SRSF* : *Some random series of functions*, 1968, avec une seconde édition $SRSF_2$ en 1985, très largement enrichie [**KaRS**] ; enfin, *SFEO* avec Lemarié : *Séries de Fourier et ondelettes* [**KLem**], déjà mentionné. Ces livres permettent de suivre et de regrouper ses intérêts scientifiques. On y décèle une fidélité aux thèmes qu'il a pu étudier à un moment donné, son appétence à inclure dans les nouvelles éditions les progrès accomplis, pas par lui le plus souvent. Dans *SFEO*, écrivant sur l'histoire des séries de Fourier, Kahane ne se limite pas aux Antiques ; il présente dans ses chapitres de 9 à 12 des résultats contemporains, avec preuves pour certains : par exemple, pour un résultat de 1994 dû à Rafał Latała et Krzysztof Oleszkiewicz [**LaOl**], qu'on décrira plus loin. Kahane a publié plusieurs rapports de recherche à la suite des congrès où il s'est rendu et des visites qu'il a effectuées ; jointes aux Lectures Notes, aux livres, la quantité de ses publications signalées par *MathSciNet* atteint début 2019 le nombre intimidant de 288 ! Et il a aussi écrit 182 “reviews” pour *Math. Reviews*.

Kahane a rédigé, notamment après sa retraite universitaire, de nombreux articles destinés à un public plus large ou différent, sur Fourier, sur l'enseignement des maths, sur des questions de politique scientifique : pour la *Gazette*, pour la *Revue de Mathématiques Spéciales*, les IREM, l'Université de tous les savoirs, une conférence donnée à l'École polytechnique, un article dans *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, pour l'Académie des Sciences, la SMF, l'INRP, l'article *Zahl* pour *Enzyclopädie der Philosophie*... Mais il a aussi continué à publier des textes de recherche, après la parution de ses Œuvres choisies ! Entre autres, un article avec Bourgain, *Sur les séries de Fourier des fonctions continues unimodulaires*, en 2010 ; le presque dernier, écrit avec Éric Saias, est consacré aux *fonctions complètement multiplicatives de somme nulle* et aux nombres premiers généralisés de Beurling (article annoncé par une Note [**KSai**] en 2016).

2. Unicité du développement en série trigonométrique

C'est une question qui accompagne l'histoire des séries trigonométriques et je vais y insister lourdement, bien qu'on la trouve bien développée en beaucoup d'endroits, en particulier chez Kahane [**KLem**, chap. 6] ou chez Roger Cooke [**Cook**]. Quand on s'intéresse aux origines de la question, on marche tous sur le même chemin, comme pour un pèlerinage : on parcourt l'étape Cantor, passage chez Riemann, peut-être un détour vers Dirichlet ; plus tard, Lebesgue, Young, de la Vallée-Poussin, et on «visite» pour finir les développements apparus au cours de la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle.

2.1. Le lemme de Cantor. — Deux des premières publications de Georg Cantor, écrites à un mois d'intervalle et parues l'une à la suite de l'autre [**CanT, CanE**], concernent cette unicité du développement. Dans les premières lignes de l'article [**CanT**], Cantor indique qu'Eduard Heine, son collègue à l'Université de Halle, l'a introduit dans ce monde mathématique ; il poursuit en annonçant qu'il va essayer d'étendre les résultats de Heine en évitant toute hypothèse sur le type de convergence de la série. Heine en effet a publié en 1870 un article [**HeiT**] où il a montré l'unicité du développement quand la série trigonométrique converge « uniformément en général » sur $[0, 2\pi]$, ce qui signifie qu'il existe un ensemble fini F tel que la convergence soit uniforme sur $[0, 2\pi] \setminus V$, pour tout voisinage V de F.

L'article [**CanT**] commence par « le lemme de Cantor » : *si pour tout x d'un segment $[u, v]$, $u < v$, la suite numérique*

$$A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad \text{où} \ \ a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

tend vers 0 *quand $n \to +\infty$, alors $a_n^2 + b_n^2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Il en résulte que *si pour tout x d'un segment $[u, v]$, $u < v$, la série numérique réelle*

$$(f(x) = \ ) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{4}$$

converge, alors $a_n^2 + b_n^2 \to 0$.

On nous a enseigné les bons principes qui nous permettent d'imaginer une preuve de (3) en quelques lignes. On écrit $A_n(x) = r_n \cos(nx - \varphi_n)$, $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant 0$. Si r_n ne tend pas vers 0, il existe un ensemble infini M d'indices m tels que $r_m \geqslant \delta > 0$. Si $J \subset I = [u, v]$ est un segment de longueur $|J| \geqslant 2\pi/m$, $\cos(mx - \varphi_m)$ prend quand x décrit J toutes les valeurs entre -1 et 1. Si $I_k \subset I$, $|I_k| > 0$ et $m_k \in M$ sont donnés, on peut par conséquent trouver $m_{k+1} > m_k$, avec $m_{k+1} \in M$ assez grand pour que $|I_k| \geqslant 2\pi/m_{k+1}$, et un segment I_{k+1} emboîté dans I_k sur lequel $A_{m_{k+1}}(x) \geqslant \delta/2$. Les segments emboîtés $I = I_0 \supset \ldots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \ldots$ ont un point commun y. On a alors $A_{m_k}(y) \geqslant \delta/2$ pour tout k et la suite initiale (3) ne converge pas vers 0 au point $y \in I$. Notons que tous les multiples $m_k y$ sont « bien situés » mod 2π.

La preuve de Cantor ne va pas si vite, elle s'étend sur sept pages [**CanT**]. Il énonce d'abord, en notation modernisée : *étant donnée une suite d'entiers positifs $(q_k)_{k \geqslant 0}$ vérifiant $q_{k+1} > 2^{k+2} q_k$ pour tout $k \geqslant 0$, il existe un nombre Ω tel qu'on puisse écrire $q_k \Omega = (2n_k + 1) + \epsilon_k$, avec n_k entier pour tout k, et $\epsilon_k \to 0$ quand $k \to \infty$.*

Cantor choisit un entier p_1 tel que $|2p_1 + 1 - q_1/q_0| \leqslant 1$, en prenant (ici et après) pour p_1 la plus petite solution en cas d'ambiguïté, puis p_2 tel que $|2p_2 + 1 - (2p_1 + 1)q_2/q_1| \leqslant 1$ et plus généralement $|2p_k + 1 - (2p_{k-1} + 1)q_k/q_{k-1}| \leqslant 1$, pour tout $k \geqslant 1$. La suite

$$x_0 = \frac{1}{q_0}, \ x_1 = \frac{2p_1 + 1}{q_1}, \ x_2 = \frac{2p_2 + 1}{q_2}, \ \ldots$$

converge vers un nombre Ω. Pour le prouver, Cantor note que $|x_{k+1} - x_k| \leqslant 1/q_{k+1} \leqslant 2^{-k-2}$, puis il majore la différence entre x_k et x_ℓ, $\ell > k$, par la somme des $1/q_j$ entre k et ℓ : il montre ainsi que la suite est de Cauchy (Cauchy n'est pas nommé), ce qu'il admet comme condition suffisante pour définir Ω. La construction est algorithmique : un programme saurait calculer les p_k à partir d'une donnée algorithmique des q_k. Cantor prouve que Ω vérifie les propriétés annoncées : c'est pour étudier $q_k \Omega$ que la condition de croissance $q_{k+1} > 2^{k+2}q_k$ intervient. Il montre ensuite qu'il pourrait modifier la construction pour faire tomber Ω dans un segment I donné à l'avance.

Pour finir, Cantor écrit $A_n(x) = r_n \cos(nx - \varphi_n)$ et montre que toute sous-suite des (r_n) contient une sous-sous-suite (r_{q_k}) qui tend vers 0, ce qui entraîne la convergence vers 0 de toute la suite, comme il l'a expliqué en détail auparavant. Il extrait d'une sous-suite arbitraire d'indices une nouvelle sous-suite (q_k) telle que les phases φ_{q_k} se concentrent dans un segment de longueur $\leqslant \pi/4$ et que les indices q_k vérifient la condition de croissance $q_{k+1} > 2^{k+2}q_k$; il termine en garantissant $|\cos(q_k\pi\Omega - \varphi_{q_k})| \geqslant \epsilon > 0$ ou bien $|\cos(q_k\pi\Omega/2 - \varphi_{q_k})| \geqslant \epsilon$, selon la position dans $[0, 2\pi]$ des phases $(\varphi_{q_k})_k$. Il en résulte que (r_{q_k}) tend vers 0, comme attendu.

Ça n'était pas banal alors de définir une quantité (le nombre Ω) par un tel procédé de suite de Cauchy formée d'éléments non explicites. Cantor présente un peu plus tard une construction des nombres réels, essentiellement par les classes d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels [**CanA**] (article reproduit par Kahane dans *SFEO*, en allemand et avec une traduction française de l'époque, sec. 6.10) ; les diverses constructions (Charles Méray, Cantor, Richard Dedekind) sont apparues autour de 1870. Dans un article célèbre, Heine [**HeiE**], après une présentation des réels — qui doit beaucoup à son collègue Cantor à Halle, nous dit-il—, introduit les fonctions continues, prouve leurs propriétés, et démontre pour finir le « théorème de Heine » sur la continuité uniforme. Cependant, dans son introduction, il attribue à Karl Weierstrass tout le mérite d'avoir établi ces propriétés des fonctions continues.

On peut faire dire plus à notre preuve du lemme de Cantor et produire, quand r_n ne tend pas vers 0, un ensemble « de Cantor » de points x de I où $r_n \cos(nx - \varphi_n)$ ne tend pas vers 0 : si $m|I| > 4\pi$, on aura deux périodes de $\cos(mx - \varphi_m)$ dans I, on pourra trouver dans I *deux* segments disjoints I_1 et I_2 sur lesquels $A_m(x) \geqslant \delta/2$, puis deux segments disjoints $I_{1,1}$, $I_{1,2}$ dans I_1, deux segments dans I_2 et construire par itération un ensemble de Cantor formé de points y tels que $A_n(y)$ ne converge pas vers 0. Cantor introduit un peu après 1880 le terme *ensemble parfait* pour désigner un ensemble fermé sans point isolé. Les exemples intéressants pour nous sont ceux qui sont d'intérieur vide, comme l'ensemble triadique qu'il présente en 1883 [**CanF**]. En réalité, ce type d'ensemble a été considéré avant Cantor, comme l'a indiqué Thomas Hawkins [**Hawk**, 2.2, p. 37 et suiv.], par l'anglais Henry John Stephen Smith — plus connu pour ses travaux en algèbre— : pour infirmer des affirmations de Hermann Hankel [**Hank**], Smith [**Smit**] construit deux *ensembles de Cantor*, nulle part denses, l'un de mesure nulle (Smith bien sûr ne s'exprime pas ainsi) qui n'influencera pas les questions d'intégration, et l'autre, tout autant nulle part dense mais de mesure non nulle et qui ne peut pas être « négligé ». L'article anglais de Smith est apparemment passé inaperçu sur le continent. Paul du Bois-Reymond lui aussi a décrit de tels ensembles « de Cantor » un peu avant Cantor [**Bois**, III.51, p. 188].

En s'inspirant de René Baire, on voit que par une légère modification de la première procédure, il serait possible de trouver notre point $y \in I$ tout en évitant pas à pas une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Axel Harnack [**HarV, HarT**] énonce un théorème mentionné par Ernest Hobson [**Hobs**], qu'on pourrait sans peine démontrer à partir de l'argument qu'on a donné pour le lemme de Cantor. Posons

$$(5)\quad S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad \operatorname{osc}(x) = \lim_N \sup_{p,q \geqslant N} |S_p(x) - S_q(x)|.$$

Harnack [**HarV**, p. 251], revu par Hobson [**Hobs**], énonce :

(6) *si dans un intervalle (u, v) il existe pour chaque $\delta > 0$ un intervalle ouvert non vide $(c, d) \subset (u, v)$ tel que $\operatorname{osc}(x) \leqslant \delta$ pour tout $x \in (c, d)$, alors les coefficients a_n, b_n tendent vers 0.*

Harnack énonce aussi un théorème faux [**HarV**, Lehrsatz 3], sur lequel il s'appuie dans la suite ; dès lors, beaucoup de résultats de cet article sont à prendre avec précaution. L'énoncé faux dit en substance que :

(7) si f est continue sur $[a, b]$ et y possède une dérivée nulle, sauf éventuellement aux points d'un fermé de mesure nulle, alors f est constante sur $[a, b]$.

L'erreur vient de ce que Harnack n'a pas pu concevoir le phénomène produit (quelque temps plus tard) par la *fonction de Cantor* : l'image continue d'un fermé de mesure nulle peut être égale à $[0, 1]$! Donnons le passage-clé (dans sa version française [**HarT**]) : la *masse discrète* ci-dessous est, en termes modernes, un ensemble dont l'adhérence est de mesure nulle, et ε est la valeur *image* d'une certaine correspondance ; Harnack écrit :

> *[...] mais, comme ε prend toutes les valeurs entre 0 et η d'une manière continue, les points correspondants $x + \Delta' x$* doivent *aussi parcourir des intervalles continus, dans lesquels il y a des points qui n'appartiennent pas à la masse discrète [...]*

Autrement dit, si une correspondance, ici $x + \Delta' x \mapsto \varepsilon$, définie sur les points d'un ensemble E de la droite a pour *image* un intervalle non vide, il est proprement *inimaginable* que E lui-même ne contienne pas un intervalle. La vision géométrique est impuissante, seule l'arithmétisation sera capable d'éclairer la question. Harnack se rétracte deux ans plus tard [**HarA**, p. 231], et remplace le mot *discret* par *dénombrable*. La preuve corrigée fonctionne ainsi : si E est dénombrable, l'image de E ne peut pas être un intervalle (on peut encore invoquer Cantor) ! Plusieurs énoncés comportant un ensemble «exceptionnel» dénombrable vont apparaître à cette époque.

2.2. Ensembles d'unicité : Bernhard Riemann et Cantor. — Si Cantor en 1870 tient tant à ce que les coefficients tendent vers 0, c'est pour se raccrocher aux résultats de Riemann [**RieD**] sur les séries trigonométriques, connus depuis 1867 seulement avec le début de la publication des œuvres de ce dernier après sa mort en 1866. Ces résultats faisaient partie de son mémoire d'habilitation de 1854, qui n'avait pas été publié de son vivant. Cantor va faire appel à l'étude de la fonction

$$F(x) = a_0 \frac{x^2}{4} - \sum_{n>0} \frac{1}{n^2}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{8}$$

attachée par Riemann à la série (4), où on suppose $a_n, b_n \to 0$. Formellement, F est une double primitive de la somme f de la série (4). On revoit cette fonction continue F chez presque tous les auteurs trigonométriques avant 1950, chez Antoni Zygmund [**Zygm**], Nina Bary [**BarT**], aussi chez Kahane–Salem [**KSal**], et bien sûr, dans le récit historique de Kahane [**KLem**, 5.4]. Pour une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, convenons de poser

$$\Delta^2 g(x,h) := g(x-h) + g(x+h) - 2g(x), \quad x, h \in \mathbb{R}.$$

Si g est régulière, le rapport $\Delta^2 g(x,h)/h^2$ tend vers la dérivée seconde $g''(x)$ quand h tend vers 0, mais la limite, qu'on notera $\mathcal{D}^2 g(x)$, peut exister sans que $g''(x)$ existe : c'est la *dérivée seconde généralisée* de g au point x.

On désigne par $\mathbb{T}$ le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, qu'on identifie si on veut au cercle unité U du plan complexe : à $t \in \mathbb{T}$ on associe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in U$; on notera m la probabilité $\mathrm{d}t/(2\pi)$ sur le «cercle» $\mathbb{T}$ de longueur 2π, et on posera $\mathbf{e}_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$; on peut aussi considérer $\mathbf{e}_n$ comme une fonction sur $\mathbb{T}$. Sous l'hypothèse que les coefficients a_n, b_n de la série (4) tendent vers 0, Riemann montre que :

(R)

i. — *en tout point x, le quotient $\Delta^2 F(x,h)/h$ tend vers 0 avec h ;*

ii. — *en tout point x* où la série (4) converge, *$\mathcal{D}^2 F(x)$ existe et sa valeur est égale à $f(x)$;*

iii. — [en termes modernisés :] *soit φ une fonction régulière, à support dans (u,v) avec $0 < v-u \leqslant 2\pi$, égale à 1 au voisinage de $x \in (u,v)$, et soit D_n le n-ème noyau de Dirichlet, $D_n = \sum_{k=-n}^{n} \mathbf{e}_k$. Pour que la série (4) converge au point x, il faut et il suffit que la suite*

$$\int_u^v F(t)\varphi(t) D_n''(x-t)\,\mathrm{d}m(t)$$

converge quand $n \to \infty$, et sa limite est alors égale à la somme $f(x)$ de la série (4).

D'après *iii*, la série (4) converge vers 0 sur tout intervalle I non vide où F est affine : dans ce cas, supposons $x \in (u,v) \subset I$, appliquons deux intégrations par parties en t au produit $(F\varphi)(t)D_n''(x-t)$, ce qui nous ramène à l'intégrale en $\mathrm{d}m(t)$ de $(F\varphi)''(t)D_n(x-t)$, qui tend d'après Dirichlet vers $(F\varphi)''(x) = 0$. Ce fait sera utilisé par des générations d'analystes de séries trigonométriques (pour des coefficients seulement *bornés* également, chez Kahane–Salem [**KSal**, app. II.5], dans le cas du développement d'une distribution périodique).

Cantor [**CanE**] emploie ces résultats pour démontrer son théorème d'unicité : *si deux séries trigonométriques convergent en tout point, et vers la même valeur, elles ont les mêmes coefficients.* Il doit aussi se servir d'un lemme dû à Hermann Schwarz, qu'il remercie dans l'article. Schwarz était alors en poste à l'ETH Zürich, après un poste non-titulaire (extraordinarius) à Halle de 1867 à 69, où Cantor est arrivé comme *Privatdozent* en 1869 ; ils s'étaient connus pendant leurs études à Berlin. La langue allemande distingue le *tu* du *vous* : parmi les multiples correspondants mathématiciens figurant dans le recueil de lettres de Cantor [**CanB**], Schwarz est le seul que Cantor tutoie (cependant d'autres étudiants à Berlin, Wilhelm Thomé particulièrement, sont plus proches de Cantor). Schwarz a communiqué à Cantor le lemme suivant : *si* $\mathcal{D}^2F(x) = 0$ *en tout point* x *d'un intervalle* I*, alors* F *est affine sur* I. Cantor en reproduit la preuve, fondée sur le fait que toute fonction continue sur un segment atteint son maximum ; à ce sujet, il mentionne les leçons de Weierstrass à Berlin, et dans une lettre à Schwarz [**CanB**, lettre 3], l'opposition de Leopold Kronecker aux idées de Weierstrass.

Cantor considère par différence une série (4) qui convergerait vers 0 en tout point. D'après le *lemme de Cantor*, on sait déjà que $a_n, b_n \to 0$. Alors, d'après *ii*-(R), on déduit que $\mathcal{D}^2F(x) = 0$ en tout point. D'après le lemme de Schwarz, F est affine. La partie série trigonométrique $T(x) = F(x) - a_0x^2/4$ dans (8) est par conséquent de la forme $T(x) = -a_0x^2/4 + bx + c$. La périodicité de T implique $a_0 = b = 0$, donc $T(x)$ est constante égale à c. Mais la série $T(x)$ est absolument convergente, on peut calculer ses coefficients par les formules de Fourier ; il en résulte que tous les coefficients a_n et b_n, $n \geqslant 1$, sont nuls eux aussi, ce qui termine la preuve.

Ensuite, Cantor [**CanN**] considère une série qui convergerait vers 0 sauf aux points d'un ensemble exceptionnel E fini ; les coefficients tendent encore vers 0. La fonction F correspondante, continue, vérifie $\mathcal{D}^2F = 0$ sur tout intervalle I sans point exceptionnel, donc F sera affine sur I. Il s'agit de voir qu'il n'y a pas de point anguleux au passage des points de E : cela provient du point *i*-(R), et on conclut comme avant.

Pour bien fixer les termes : on dit que $E \subset [0, 2\pi]$ est un *ensemble d'unicité* ou *ensemble de type* (U) si toute série trigonométrique de la forme (4) qui converge vers 0 en tout point $x \in [0, 2\pi]$ *extérieur* à E a tous ses coefficients nuls. Ainsi, le premier résultat d'unicité de Cantor s'exprime en disant que l'ensemble vide est d'unicité ! Pour éviter de répéter « modulo 2π » trop souvent, si $F \subset \mathbb{R}$, posons

$$F^{(2\pi)} = F + 2\pi\mathbb{Z}, \tag{9}$$

réunion des translatés de F par les multiples entiers de 2π. Un ensemble d'unicité E ne contient aucun intervalle I non vide : sinon, soit φ une fonction régulière 2π-périodique non nulle, à support dans $I^{(2\pi)}$, sa série de Fourier n'est pas la série nulle, mais elle converge vers $\varphi(x) = 0$ quand $x \notin I^{(2\pi)}$ (d'après Dirichlet par exemple), donc en tout point x hors de $E^{(2\pi)}$, et il en résulte que E n'est pas d'unicité.

En résumé, Cantor a montré qu'*un ensemble fini E est un ensemble d'unicité* [**CanN**]. En 1872, il présente la première version de sa théorie des ensembles dérivés [**CanA**] ; il ne s'agit encore que d'un nombre fini de dérivés ; ni l'intersection d'une infinité de dérivés, ni les ordinaux ne sont encore là. Cantor montre que les ensembles dénombrables dont un dérivé d'ordre fini est vide sont des ensembles d'unicité. Quand la notion de dérivé sera étendue aux ordinaux quelconques autour de 1880, on saura montrer *par récurrence ordinale* que les ensembles *réductibles* (ceux dont un dérivé d'ordre ordinal dénombrable est vide, par exemple, les compacts dénombrables de la droite) sont des ensembles d'unicité.

2.3. Après Cantor. — William Henry Young indique en 1909 que *tous les ensembles dénombrables sont des ensembles d'unicité* [**Youn**]. Cette partie de son article, une page et demie assez décevante, contient une preuve de dix lignes qui, d'une part, utilise des arguments d'ensembles de première ou seconde catégorie au sens de Baire, renvoie d'autre part à ses propres écrits (*Theory of Sets of Points*, 1906) pour justifier qu'il suffit d'enlever dans le traité de Hobson de 1907, à la section sur l'unicité, le mot «réductible» qui vient de Cantor :

> «We have now merely to omit the words "reducible and therefore" [...] and the proof given [*par Hobson*] applies, as it stands, to "countable".»

Supposons que la série (4) converge vers 0 en dehors d'un ensemble dénombrable D, et prenons $\delta > 0$; avec les définitions de (5), écrivons $\{|S_p - S_q| \leqslant \delta\}$ pour abréger la notation $\{x : |S_p(x) - S_q(x)| \leqslant \delta\}$. Chaque point où la série converge est contenu dans un des ensembles fermés $F_N = \bigcap_{p,q \geqslant N} \{|S_p - S_q| \leqslant \delta\}$, pour un $N \geqslant 1$. Si on considère un intervalle (u, v), $u < v$, il est d'après l'hypothèse contenu dans la réunion dénombrable des fermés F_N et des singletons d'intérieur vide $\{d\}$, $d \in D$. D'après la propriété de Baire de (u, v), l'un des $F_N \cap (u, v)$ a un intérieur non vide, et contient donc un intervalle non vide (c, d) sur lequel on aura $\operatorname{osc} \leqslant \delta$. Les coefficients tendent vers 0 d'après le lemme de Cantor modifié (6). On est ramené à la «théorie de Riemann», il reste du chemin à faire, mais il était tracé dans le livre de Hobson.

La preuve du théorème de Young est détaillée dans les éditions ultérieures du livre de Hobson (1921, 1925) ; elle y utilise un résultat démontré entre-temps par Charles-Jean de la Vallée-Poussin. On suppose que la série (4) a pour somme $f(x) = 0$ en dehors d'un ensemble dénombrable D. Une fois ramené à la situation de Riemann, on raisonne ainsi [**VPou**] : ajoutons à la fonction F de (8) une fonction linéaire ax de façon que la somme $\widetilde{F}(x) = F(x) + ax$ vérifie $\widetilde{F}(\pi) = \widetilde{F}(-\pi)$, et montrons que $\widetilde{F}$ est constante sur $[-\pi, \pi]$; le point *iii*-(R) impliquera que la série trigonométrique converge vers 0 *partout* sur $(-\pi, \pi)$, et aura donc des coefficients nuls d'après Cantor.

Si $\widetilde{F}$ n'était pas constante, il y aurait un point y_0 de $(-\pi, \pi)$ où $\widetilde{F}(y_0) > \widetilde{F}(\pi)$ par exemple. Posons $F_\epsilon(x) = \widetilde{F}(x) - \epsilon x + ux^2/2 = F(x) + (a - \epsilon)x + ux^2/2$. Pour

$\epsilon_0, u > 0$ petits fixés et $|\epsilon| < \epsilon_0$, on a encore $F_\epsilon(y_0) > F_\epsilon(\pi)$. Considérons un point maximum de F_ϵ, et pour ne pas faire intervenir l'axiome du choix, désignons par $x_\epsilon \in (-\pi, \pi)$ le point maximum de F_ϵ le plus à droite dans $[-\pi, \pi]$. D'après i-(R) on sait que

$$\frac{\Delta^2 F_\epsilon(x_\epsilon, h)}{h} = \frac{F_\epsilon(x_\epsilon - h) + F_\epsilon(x_\epsilon + h) - 2F_\epsilon(x_\epsilon)}{h} = \frac{\Delta^2 F(x_\epsilon, h)}{h} + uh$$

tend vers 0 quand $h \to 0$, et on voit que $\Delta^2 F_\epsilon(x_\epsilon, h)$ est la somme des deux expressions $F_\epsilon(x_\epsilon \pm h) - F_\epsilon(x_\epsilon)$ négatives ou nulles. Il en résulte que $F'_\epsilon(x_\epsilon) = 0$, soit encore $F'(x_\epsilon) = \epsilon - a - ux_\epsilon$, ce qui implique que les points x_ϵ sont distincts, donc en *quantité continue*. Il existe par conséquent des points x_ϵ hors de l'ensemble dénombrable D, et quand $x \notin D$, on a $f(x) = 0$ par hypothèse, de plus $\mathcal{D}^2 F(x)$ existe et vaut $f(x)$ d'après ii-(R). Si $x_\epsilon \notin D$, on a donc $\mathcal{D}^2 F(x_\epsilon) = 0$ et $\mathcal{D}^2 F_\epsilon(x_\epsilon) = u > 0$, ce qui contredit le caractère maximal pour F_ϵ du point x_ϵ. On retrouve l'argument chez Zygmund [**Zygm**, IX, (3·20)] ou Bary [**BarT**, XIV.2] : c'est le lemme de Schwarz «version convexe» avec ensemble exceptionnel dénombrable. Pour la fonction 2π-périodique impaire en dent de scie F_0 qui vaut $\min(x, \pi - x)$ sur $[0, \pi]$ (et qui est la primitive nulle en 0 du créneau (2) de Fourier), l'argument ne fournirait qu'un seul point maximum $x_\epsilon = \pi/2$ pour toutes les pentes ϵ telles que $|\epsilon| < 1$: bien sûr, les coefficients de Fourier de F_0 ne sont pas $o(n^{-2})$, ils sont $O(n^{-2})$ et pas mieux.

La méthode de la «pente variable», produisant une famille continue de points, se trouve déjà dans un article de Ludwig Scheeffer [**ScZT**, II, Satz IV] «signé» en avril 1884 à Meran (Merano, au Tyrol italien de nos jours). Il y montre un théorème *d'accroissements finis* qu'aimera Bourbaki :

(S) | *si f est continue sur un segment $[a, b]$, $a < b$, et y admet une dérivée > 0 sauf peut-être sur un sous-ensemble dénombrable D, alors $f(a) < f(b)$.*

Le résultat est très proche du «théorème corrigé» de Harnack. Ce dernier n'a pas tort d'écrire, en avril 84 lui aussi [**HarA**], qu'il suffisait de remplacer «masse discrète» par «dénombrable» pour que son théorème [**HarV**] de 82 devienne vrai, mais il a eu tort de se tromper : le théorème est resté à Scheeffer. Esquissons l'argument *modifié* de Harnack pour prouver (S) : si $f(a) > f(b)$, on peut pour tout $\epsilon \in (0, f(a) - f(b))$ considérer le *plus grand* réel $x_\epsilon \in [a, b]$ tel que $f(x_\epsilon) - f(b) = \epsilon$; on voit alors que $f'_d(x_\epsilon) \leqslant 0$, donc tous les x_ϵ sont dans l'ensemble D, ce qui est impossible puisque D est dénombrable.

En fait Scheeffer suppose seulement qu'un des quatre nombres dérivés de Dini de f a cette propriété de positivité —chez Bourbaki, c'est la dérivée à droite—. Henri Lebesgue connaît cet article de Scheeffer, qu'il cite [**LebI**, V.III, 1904, p. 75 et suiv.], et de la Vallée-Poussin connaît bien Lebesgue mais ne cite pas Scheeffer. Lebesgue donne la preuve de Scheeffer, puis une preuve «ordinale» par *chaîne d'intervalles* qui utilise la récurrence transfinie. Cette preuve ordinale a été transformée en argument de borne supérieure et «fonction de saut» auxiliaire chez Bourbaki [**Bour**, I.23].

Scheeffer correspond avec Cantor, notamment à propos de l'ensemble triadique. On parlera encore des *ensembles de Cantor symétriques* dans la suite de cet exposé : si $0 < \xi < 1/2$, on construit à partir d'un segment initial, par exemple $[0, 1]$, un *ensemble parfait symétrique* en gardant à chaque étape de la «dissection cantorienne» les deux «ξ-fractions» initiale et finale de chaque segment restant : de $[0, 1]$, on garde $[0, \xi]$ et $[1-\xi, 1]$ en ayant enlevé $(\xi, 1-\xi)$, puis on itère. Les points x de E_ξ sont de la forme

$$x = (1-\xi) \textstyle\sum_{n \geqslant 0} \eta_n \xi^n \tag{10}$$

où $\eta_n = 0, 1$. Quand au lieu de $[0, 1]$ on utilise $[0, 2\pi]$, on multiplie la formule précédente pour x par 2π. Cet ensemble sera désigné par E_ξ, l'ensemble triadique étant $E_{1/3}$. Il est clair que E_ξ est homéomorphe à $E_{1/3}$ —associer à $x \in E_\xi$ le point $y \in E_{1/3}$ obtenu en faisant $\xi = 1/3$ dans (10)—. C'est quand il travaille sur les cardinalités que Cantor s'intéresse particulièrement à l'ensemble triadique. On trouve sa première description dans une lettre à Gösta Mittag-Leffler en juin 1882 [**CanB**, lettre 28] ; à cette époque, il a aussi élaboré sa théorie des ordinaux. Plus tard, fin 83 [**CanB**, lettres 57 et 58], Cantor invente une fonction continue Φ, croissante au sens large, qui reste constante sur chaque intervalle extérieur à $E_{1/3}$. Il en trace un «croquis» dans la lettre 57 et dans la lettre 58, il écrit la formule $\Phi(x) = \sum_{n \geqslant 0} \eta_n 2^{-n-1}$, si x est donné par (10) et $\xi = 1/3$ (à voir aussi dans *Acta Math.* [**CanP**]). La même formule définit la fonction de Cantor Φ sur E_ξ quand $0 < \xi < 1/2$: elle vérifie $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) = \Phi(1-\xi) = 1/2$ et $\Phi(1) = 1$. De son côté, Scheeffer [**ScAU**], qui travaille à étendre la notion de longueur de courbe, introduit une «pure fonction de saut» s,

$$s(x) = \sum_{n\,:\,a_n < x} s_n, \quad x \in [0, 1],$$

croissante, où les a_n sont denses dans $(0, 1)$ et les $s_n > 0$ sommables ; avec sa définition, la longueur du graphe de s est $1 + \sum_n s_n$. Il présente un cas spécial dont il explique [**ScAU**, p. 67] que la fonction «réciproque» est... la fonction Φ de Cantor ! Cette fonction s présente un saut de hauteur $1/3$ au point $x = 1/2$, deux sauts de hauteur $1/9$ aux points $1/4$ et $3/4$, et plus généralement un saut de hauteur 3^{-n} aux points $(2k+1)2^{-n}$, $0 \leqslant k < 2^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 1$. C'est semble-t-il Scheeffer [**ScAU**, note p. 68], [**ScZT**, I, note p. 189] qui observe que la fonction de Cantor contredit le «théorème» de Harnack —notre numéro (7)—, et l'indique à Cantor [**CanP**, p. 387]. La mort précoce de Scheeffer a certainement attristé Cantor ; il a écrit une nécrologie [**CanW**, IV 2, p. 368], dans laquelle il a mis en avant le théorème d'Accroissements Finis (S) mentionné ci-dessus.

2.4. Ensembles d'unicité au début du XX^e siècle. — Lebesgue [**LebS**] applique sa notion d'intégrale à la théorie des séries trigonométriques, elle lui permet de compléter et de simplifier des résultats de Riemann, Ulisse Dini et Fejér. La convergence vers 0 des coefficients de Fourier, due à Riemann pour les fonctions

Riemann-intégrables, devient lemme de Riemann–Lebesgue, le théorème de Lipót Fejér devient théorème de Fejér–Lebesgue (voir *SFEO*, sec. 8.2, 8.3). Par le lemme de Riemann–Lebesgue, on sait que $2\int_A \cos^2(\lambda x - \varphi_\lambda)\,\mathrm{d}x$ tend vers la mesure $|A|$ de l'ensemble A quand $\lambda \to \infty$: le lemme de Cantor reste vrai —par convergence dominée—, quand on suppose seulement la convergence vers 0 de la suite (3) pour tout x d'un ensemble A de mesure > 0, il devient ainsi *lemme de Cantor–Lebesgue* [**Zygm**, IX (1·2)]. Dmitrii Menchoff («Menchoff» orthographié ici comme dans sa Note française [**Menc**]), Aleksander Rajchman, Nina Karlovna Bary (qui a travaillé avec Menchoff), Zygmund (qui déclare que Rajchman était son maître), Salem, Ilya Piatetski-Shapiro (qui a débuté avec Bary), font beaucoup progresser la connaissance de la propriété (U). Selon J. J. O'Connor et E. F. Robertson dans *MacTutor*, Bary a dû à la révolution russe de 1917 d'avoir pu entrer à l'Université de Moscou en 1918, à l'âge de 17 ans, université qui n'admettait pas les femmes auparavant. Comme la plupart des anglophones, O'Connor et Robertson écrivent «Bari», mais elle-même a écrit des articles en français qu'elle a signés «Bary», nous la suivrons donc sur ce point. Chercheuse déjà reconnue, elle a passé deux ans à Paris en 1927-29, en partie financés par une bourse Rockefeller. Elle est devenue professeur titulaire à l'Université de Moscou en 1932.

Comme pour la révolution française avec Laplace par exemple, la transmission mathématique a pu passer à travers les années de la révolution russe. Dmitri Egorov, établi bien avant 1917, a formé Nicolas Lusin, qui a obtenu une chaire à Moscou en 1917 et qui a eu pour élèves, entre beaucoup d'autres devenus célèbres en mathématiques, Menchoff et Bary (et Mikhail Souslin, mort prématurément en 1919, et Khintchine). Ainsi, continuant de maître à élève, on arrive au temps présent, en quittant la Russie à la fin : Petr Ul'yanov, élève de Bary, a eu Aleksander Olevskiĭ comme élève, et ce dernier a formé Gady Kozma à Tel Aviv ; nous reparlerons d'eux.

Les ensembles mesurables et de mesure non nulle ne sont pas d'unicité : si K est compact de mesure positive, la série de Fourier de l'indicatrice $\mathbf{1}_K$, non nulle, converge vers 0 hors de K. À l'inverse, le résultat de Young laisse penser que les ensembles «petits» sont d'unicité. Dès lors, on s'est demandé si les fermés de mesure nulle étaient d'unicité : ceci est infirmé par Menchoff en 1916. Il construit un parfait P de mesure nulle et une fonction Φ du type Cantor, constante sur les intervalles extérieurs à P, croissante sur $[0, \pi]$ puis décroissante sur $[\pi, 2\pi]$, $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, dont les coefficients de Fourier complexes $\widehat{\Phi}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, sont $o(1/n)$ (voir Bary [**BarT**, XIV.12]). La dérivée-distribution de Φ est une mesure réelle μ portée par P, dont les coefficients de Fourier–Stieltjes

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{i}n \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}n\widehat{\Phi}(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

tendent vers 0 quand $|n| \to +\infty$; on fait appel à la «théorie de Riemann» : la série de Fourier–Stieltjes $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mu}(n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ de μ converge vers 0 en dehors de P, sans être la série nulle ; le fermé de mesure nulle P n'est donc pas un ensemble d'unicité.

Le parfait P de Menchoff n'est pas un des E_ξ de (10) : il est «plus gros», la *proportion enlevée* de chacun des 2^n segments restant à l'étape n n'est pas constante égale à $1-2\xi$, elle tend vers 0 comme $1/n$. On retiendra de la preuve de Menchoff que si les coefficients de Fourier de la «mesure de Cantor» de E_ξ (dérivée de la fonction Φ de Cantor pour E_ξ) tendent vers 0, alors E_ξ n'est pas d'unicité. À l'opposé, Aleksander Rajchman travaille avec la propriété (H) pour un ensemble E, et montre qu'elle implique que E est d'unicité. Selon Rajchman [**RajU**], la lettre "H" est pour Hardy–Littlewood et Hugo Steinhaus, qui ont prouvé que les ensembles (H) sont de mesure nulle.

(H) On dit que $E \subset [0, 2\pi]$ vérifie la propriété (H) s'il existe un intervalle ouvert non vide $I \subset [0, 2\pi]$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant 0}$ tels que les multiples $n_k E$ ne rencontrent pas $I^{(2\pi)}$ —qui a été défini à l'équation (9)—.
La propriété (H) pour l'ensemble E implique que E est de type (U), on le prouvera plus loin.

L'ensemble E vérifie (H) s'il existe c (le centre de I) et $\delta > 0$ tels que $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_k x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,c}\,| \geqslant \delta$ pour tous $k \geqslant 0$ et $x \in E$; clairement, la propriété (H) passe à l'adhérence de E. Pour l'ensemble triadique $E_{1/3}$ sur $[0, 2\pi]$, on voit que la suite $n_k = 3^k$ et le tiers médian $I = (2\pi/3, 4\pi/3)$ conviennent à (H), donc $E_{1/3}$ est d'unicité ; de même, si $\xi = 1/q$ où q est un entier $\geqslant 3$, on voit avec $n_k = q^k$ que $E_{1/q}$ est d'unicité. Mais la situation est complexe : les ensembles E_ξ ne sont pas tous de même nature. Ainsi Bary [**BarD**] (voir aussi Richard Kershner [**Kers**]) démontre en 1936 que si ξ est une fraction irréductible p/q, alors E_ξ est d'unicité seulement si $p = 1$, un prélude au théorème de Salem–Zygmund discuté plus loin. Bary se sert de la répartition modulo 1 des suites $(n\theta^k)_{k\geqslant 1}$, $\theta = 1/\xi$, quand n varie : $\epsilon > 0$ étant fixé, on veut savoir si le nombre des entiers k tels que $((n\theta^k)) > \epsilon$ tend vers l'infini avec n, en désignant par $((x))$, ici et après, la distance à $\mathbb{Z}$ de $x \in \mathbb{R}$.

Par compacité, on peut remplacer l'intervalle fixe I dans la définition (H) par une suite (I_k), pourvu que les longueurs $|I_k|$ soient minorées par un $\rho > 0$: il y aura une sous-suite des (n_k) pour laquelle un intervalle fixe J, un peu plus court, vérifiera la propriété d'origine. On peut encore «relaxer» d'une autre façon [**BarT**, XIV.8] :

(H_*) *On suppose que E est contenu dans $[0, 2\pi]$; s'il existe des nombres* réels *(t_k) tendant vers l'infini, et des intervalles $(I_k) \subset [0, 2\pi]$, tous de longueur $\geqslant \rho > 0$ et tels que $t_k E$ soit disjoint de $I_k^{(2\pi)}$, alors l'ensemble E est d'unicité.*

On a ici $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_k x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}c_k}\,| \geqslant \delta > 0$ pour tout k et tout $x \in E$, c_k étant le centre de I_k ; on peut supposer E fermé. Écrivons $t_k = n_k + u_k$, avec n_k entier et $|u_k| \leqslant 1/2$. Soit E_* une «portion» de E de longueur $\leqslant \delta$, et soit x_0 un point de E_*. Alors, on a que $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u_k x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u_k x_0}\,| \leqslant \delta/2$ pour tout $x \in E_*$, d'où $|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n_k x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(c_k - u_k x_0)}\,| \geqslant \delta - \delta/2$, par conséquent E_* est un ensemble (H), de type (U) d'après Rajchman. On peut découper E en un nombre fini de portions E_* fermées disjointes de longueurs $\leqslant \delta$: on en déduit que E est d'unicité car Bary a montré qu'une union dénombrable d'ensembles *fermés* de type (U) est de type (U) ; ce résultat n'est pas évident [**Zygm**, IX (6·15)], mais il sera facile pour l'union de deux ensembles (U) fermés disjoints E_1 et E_2 : soient φ_1, φ_2 régulières et 2π-périodiques, $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ et φ_i nulle sur E_j si $i \neq j$; si S est une série trigonométrique de somme nulle hors de $(E_1 \cup E_2)^{(2\pi)}$, la série produit $\varphi_j S$ est de somme nulle hors de $E_j^{(2\pi)}$ par ce qui va suivre en (11), donc ses coefficients sont nuls par la propriété (U) de E_j, ainsi que ceux de $S = \varphi_1 S + \varphi_2 S$.

Le résultat d'union dénombrable de Bary utilise des méthodes de Baire. D'une certaine façon, c'est une extension du résultat de Young, qui considérait une réunion dénombrable de singletons, tous d'unicité.

Rajchman [**RajM**] introduit la *multiplication formelle* de séries, une méthode élémentaire mais efficace, un peu oubliée, dépassée par l'usage de la théorie des distributions de Schwartz (ou des *hyperdistributions*, chez Kahane–Salem [**KSal**, app.]). Elle permet à Rajchman de démontrer que $(H) \Rightarrow (U)$. On veut étendre la formule

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\sum_{j+k=n} \alpha_j \beta_k \Bigr) = \Bigl(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \Bigr) \Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \Bigr)$$

dans un cas où on demande moins aux (α_j) et plus aux (β_k). Précisément,

on suppose que α_j tend vers 0 quand $|j| \to +\infty$ et que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k\beta_k| < +\infty$; on pose $\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k$ et $\gamma_n = \sum_{j+k=n} \alpha_j \beta_k$, $n \in \mathbb{Z}$; si une des deux séries ci-dessous converge, l'autre converge aussi et a la même somme,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta \alpha_j. \tag{11}$$

Il s'agit de convergence symétrique, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} = \lim_N \sum_{-N}^{N}$. Une raison d'écrire ainsi la formule (11) est de voir que la série de gauche converge, avec somme nulle, dès que $\beta = 0$. Les sommes partielles symétriques de même ordre N des deux séries sont les sommes respectives des produits $\alpha_j \beta_k$ dans deux bandes de largeur horizontale égale à $2N + 1$, $C_N = \{(j, k) : |j + k| \leqslant N\}$ et $D_N = \{(j, k) : |j| \leqslant N\}$. Pour comparer les deux sommes, il suffit de montrer que la somme des $|\alpha_j \beta_k|$ sur la différence symétrique de C_N et D_N tend vers 0 avec N ; on y arrive par un découpage en morceaux qui doit faire apparaître les $k\beta_k$, et qui par ailleurs procède par des méthodes usuelles.

On applique (11) à une série trigonométrique $U(x) \sim \sum u_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ à coefficients tendant vers 0 et à $V(x) = \sum v_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ «très convergente». Soit W leur produit formel,

$$W(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\sum_{j+k=n} u_j \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\, v_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \Bigr) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\sum_{j+k=n} u_j v_k \Bigr) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} .$$

Si la série U converge vers 0 en dehors d'un ensemble $E^{(2\pi)}$ et si V est nulle sur E, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} V(x) u_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = 0$ en tout point x réel, et d'après (11) la série trigonométrique W converge vers 0 partout. Ses coefficients sont donc tous nuls d'après Cantor ; en particulier, retenons que $w_0 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j v_{-j} = 0$.

Montrons que la propriété (H) pour un ensemble E entraîne la propriété (U) : soit U une série trigonométrique qui converge vers 0 hors de $E^{(2\pi)}$; on a $u_n \to 0$ par Cantor–Lebesgue. Soit V régulière 2π-périodique telle que $v_0 = \int_{\mathbb{T}} V(t)\,\mathrm{d}m(t) = 1$, à support dans $I^{(2\pi)}$, où I est l'intervalle dans la définition de la propriété (H). D'après l'hypothèse sur E et sur I faite dans (H), la fonction $x \mapsto V(n_k x)$ est nulle sur E, donc $\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_{jn_k} v_{-j} = 0$ d'après ce qui précède. On déduit $0 = u_0 v_0 = u_0$ en faisant tendre k vers l'infini, puis $u_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ en multipliant $U(x)$ par $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$ (la convergence *symétrique* de la série produit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,U(x)$ subsiste parce que $u_n \to 0$).

Très près de nous, en 2018, on trouve encore des résultats surprenants qui parlent d'unicité : Kozma et Olevskiĭ [**KoOl**] ont produit une série trigonométrique non nulle dont les coefficients tendent vers 0 et dont une sous-suite (S_{N_k}) des sommes partielles symétriques (5) converge vers 0 *en tout point.*

3. Plus ou moins aléatoires

3.1. Vous avez dit «randon» ? Comme c'est étrange ! — Dans *SFEO*, Kahane s'est amusé (je pense) à titrer «Lacunes et randon» son chapitre 9 sur les séries aléatoires. J'ai pu constater que tout le monde n'a pas apprécié cette excentricité pourtant modérée. À l'article «random», le Webster New Universal Unabridged Dictionary de 1983 que j'avais sous la main indique :

random [OFr. *à randon*, at random ; *randon*, an impetuous course or efflux, vivacity, violence ; *randoner, randir*, to run rapidly.]

«OFr.» est pour *Old French*. Le *Dictionnaire du Moyen Français* (consulter par exemple *www.cnrtl.fr/definition/dmf/randon*) ne confirme pas le hasard pour le mot «randon» :

A. - “Jet impétueux (d'une flamme, du sang qui gicle...)” [...]
B. - [À propos du jet d'un liquide] “Abondance, force”
- À/par grand randon. “En abondance” : [...] Et quant Remondin vit la playe et le sang qui en yssoit a grant randon, il fu moult doulens (ARRAS, c.1392-1393, 22). Les fonteines y sont sourdans, Dont les rus en vont espandans Par tout le monde, a grant randon. (CHR. PIZ., M.F., I, 1400-1403, 118). [...]
C. - “Impétuosité, rapidité, violence” [...]

Un collègue digne de foi m'a indiqué que des personnes nées dans les Ardennes dans les années 1895 utilisaient encore le mot *randon*, dans le sens d'élan : sa grand-mère devait prendre «un grand randon» pour atteindre l'étagère du haut dans sa cuisine. Et il n'était certainement pas question en l'occurrence de se lancer au hasard !

3.2. Inégalités de Khintchine. — Dans son exposé sur le brownien au séminaire Bourbaki en 1958, Schwartz a estimé qu'il devait commencer par introduire tout le vocabulaire des probabilités, les événements, les variables aléatoires, etc.

Jusqu'aux années 1960 certains mathématiciens «purs» et français, travaillant pour l'honneur de l'esprit humain, affectaient d'ignorer les notions de base des probabilités, les probabilités n'étant assurément pas de vraies mathématiques. À plus forte raison, bien des années auparavant, ceux qui voulaient se servir de choix aléatoires de «signes» ± 1 préféraient certainement parler des *fonctions de Rademacher*,

$$r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t), \quad n \geqslant 1,\ t \in [0,1],$$

plutôt que de variables aléatoires indépendantes. De nos jours la tendance s'est suffisamment inversée, nous pourrons nous permettre de désigner par (ε_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs ± 1 et *centrées* (toujours dans cet article), définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, nous dirons : *des variables de Bernoulli* ; la suite de Rademacher en est un exemple. Si X est une variable aléatoire à valeurs réelles ou à valeurs dans un espace vectoriel V de dimension finie, c'est-à-dire que X est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans V, la *loi* de X est la mesure μ sur la tribu borélienne de V définie en posant $\mu(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$, pour tout borélien A de V (c'est la mesure *image de P par l'application X*). Les probabilistes appellent *espérance* de X, notée $\mathrm{E}\, X$, ce que les analystes appellent *intégrale de X* : on a $\mathrm{E}\, X = \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}P(\omega)$.

Une suite (ε_n) de variables de Bernoulli indépendantes et centrées est orthonormée dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. À cause de l'orthogonalité additionnelle de la famille des $\varepsilon_\ell \varepsilon_n$, $\ell < n$, complétée par la constante $\mathbf{1}$, on obtient pour tous les coefficients réels (a_n) de carrés sommables les égalités suivantes,

$$(K_4) \quad \left| \begin{aligned} &\int \Bigl(\sum a_n \varepsilon_n\Bigr)^4 \mathrm{d}P = \int \Bigl(\sum a_n^2 + 2 \sum_{\ell<n} a_\ell a_n \varepsilon_\ell \varepsilon_n\Bigr)^2 \mathrm{d}P \\ &= \Bigl(\sum a_n^2\Bigr)^2 + 4 \sum_{\ell<n} a_\ell^2 a_n^2 = \sum a_n^4 + 6 \sum_{\ell<n} a_\ell^2 a_n^2 = 3\Bigl(\sum a_n^2\Bigr)^2 - 2\sum a_n^4. \end{aligned} \right.$$

Cela implique $\bigl\|\sum a_n \varepsilon_n\bigr\|_{L^4} \leqslant 3^{1/4}\bigl(\sum a_n^2\bigr)^{1/2} = 3^{1/4}\bigl\|\sum a_n \varepsilon_n\bigr\|_{L^2}$, et pour une probabilité on a aussi $\|\cdot\|_{L^2} \leqslant \|\cdot\|_{L^4}$: sur l'espace vectoriel engendré par les (ε_n), les normes L^4 et L^2 sont équivalentes. Les *inégalités de Khintchine* étendent le résultat à toutes les normes L^p, $2 \leqslant p < +\infty$; la constante $3^{1/4}$, valable pour $p = 4$, est remplacée par une constante B_p en $O(\sqrt{p})$ quand $p \to +\infty$; la valeur optimale est difficile à déterminer, elle a été établie en 1981 par Uffe Haagerup [**Haag**]. Cette constante B_p doit tendre vers l'infini avec p : en effet, de façon évidente, on a dans le cas limite $p = \infty$ l'égalité

$$(K_\infty) \qquad \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \bigl|\sum a_n \varepsilon_n\bigr| = \sum |a_n|.$$

Pour obtenir $B_p = O(\sqrt{p})$, on peut généraliser à tous les entiers pairs —en plus compliqué— le développement fait pour $p = 4$ dans (K_4) et conclure, mais la façon la plus rapide d'obtenir le résultat utilise la transformation de Laplace et l'indépendance ; si $\sum a_n^2 = 1$, on calcule pour tout nombre réel s l'espérance suivante :

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} \mathrm{E}\exp(s{\textstyle\sum} a_n\varepsilon_n) &= \mathrm{E}({\textstyle\prod} \mathrm{e}^{sa_n\varepsilon_n}) = {\textstyle\prod} \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{sa_n\varepsilon_n} \\ &= {\textstyle\prod} \mathrm{ch}(sa_n) \leqslant {\textstyle\prod} \mathrm{e}^{s^2a_n^2/2} = \mathrm{e}^{s^2/2}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité de Markov fournit alors une décroissance de type «sous-gaussien» pour la «queue de la loi» de la combinaison linéaire $S = \sum a_n\varepsilon_n$, à savoir $P(S > t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2/2}$ pour tout $t > 0$; on trouve cette appellation *sous-gaussienne* chez Kahane [**KaFA**, IV.II, p. 75]. Si $\sum a_n^2 = 1$, on montre sans trop de peine que $\bigl\|\sum a_n\varepsilon_n\bigr\|_{L^p} \leqslant \sqrt{p}$ quand $p \geqslant 2$, à partir de (12) pour $s^2/2 = p$ et de $|\,\mathrm{e}\,u/p|^p \leqslant \mathrm{e}^{|u|} \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}$, $u \in \mathbb{R}$, appliqué à $u = s\sum a_n\varepsilon_n$. La même borne $\sqrt{p}$ reste valable quand les coefficients (a_n) sont complexes [**LiQu**, 0.IV.1, p. 29].

En procédant par Fubini à une intégrale double sur le produit du cercle $\mathbb{T}$ et de l'espace de probabilité, on déduit avec $\mathbf{e}_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ et pour tout $p > 2$ que

$$\text{(13)} \quad \begin{aligned} \Bigl(\int \bigl\|{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}} \varepsilon_n c_n \mathbf{e}_n\bigr\|_{L^p(\mathbb{T})}\,\mathrm{d}P\Bigr)^p &\leqslant \int \bigl\|{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}} \varepsilon_n c_n \mathbf{e}_n\bigr\|_{L^p(\mathbb{T})}^p\,\mathrm{d}P \\ = \int \bigl|{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}} \varepsilon_n c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\bigr|^p\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}m(x) &\leqslant p^{p/2}\bigl\|{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}} c_n\mathbf{e}_n\bigr\|_{L^2(\mathbb{T})}^p. \end{aligned}$$

On obtient à partir de là des informations sur le comportement presque sûr de séries trigonométriques dont les coefficients sont affectés de signes aléatoires. Sur ce thème —comme sur presque tous les sujets trigonométriques— le livre de Zygmund [**Zygm**] est une mine d'informations ; il nous faut également citer le livre de Stefan Kaczmarz et Steinhaus [**KaSt**]. Celui de Bary [**BarT**] est une autre mine, le livre plus moderne de Thomas Körner [**Körn**] complétera —magistralement— notre collection.

Une série de Fourier aléatoire est (par exemple) de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pm c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, avec des signes $\pm$ choisis au hasard ; on demande dans ce cas si telle ou telle propriété de la série trigonométrique est vraie pour presque tous les choix de signes. Ainsi, Paley et Zygmund ont montré que sous la condition $\sum_n |c_n|^2 \ln^{1+\epsilon}(|n|+1) < +\infty$, où $\epsilon > 0$, la somme de la série aléatoire $\sum \pm c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ est presque sûrement continue [**Zygm**, V (8·34)] ; la preuve utilise la décroissance sous-gaussienne de la loi des sommes de Bernoulli, exploitée aussi par Salem–Zygmund [**SalW**, p. 501]. Kahane énonce nombre de résultats dans *SRSF* ; à l'origine de ce livre, on trouve un cours qu'il donne en 1963 à Montréal [**KaFA**], où une place notable est tenue par les résultats de Pierre Billard, son élève à Montpellier. Ce dernier a montré que pour des «séries de Steinhaus», la somme est presque sûrement continue sur $\mathbb{T}$ dès qu'elle est presque sûrement bornée [**Bill**]. La preuve de Billard constitue une bonne part du chapitre 5 de *SRSF*, en 1968 ; dans *SRSF*$_2$, les avancées des années 80 enrichiront ce thème des séries trigonométriques aléatoires, on en reparlera à la section 7.3.

Les inégalités de Khintchine comportent aussi un côté minoration, intéressant pour $p < 2$. Quand $p = 1$ par exemple, on sait depuis Khintchine (et peut-être même depuis Abraham de Moivre si les coefficients a_j ci-dessous sont tous égaux à 1) qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tous les (a_i) réels, on ait

$$\mathrm{E}\,|a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n| \geqslant \delta\bigl(\textstyle\sum_{j=1}^n a_j^2\bigr)^{1/2} \tag{14}$$

pour des Bernoulli indépendantes $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. En effet, si $f = \sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j$, Hölder implique $\|f\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^1}^{1/3}\|f\|_{L^4}^{2/3}$ et avec (K_4) on a $\|f\|_{L^2} \leqslant 3^{1/6}\|f\|_{L^1}^{1/3}\|f\|_{L^2}^{2/3}$, puis

$$\|f\|_{L^2} \leqslant 3^{1/2}\|f\|_{L^1}, \tag{15}$$

ce qui équivaut à l'inégalité (14) annoncée, avec $\delta = 1/\sqrt{3}$. La valeur optimale est $\delta = 1/\sqrt{2}$ (en examinant $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, on constate déjà que $\delta \leqslant 1/\sqrt{2}$) ; cette borne longtemps conjecturée a été établie par Stanisław Szarek en 1976 [**Szar**].

3.3. Inégalité de Khintchine–Kahane. — Si on s'intéresse à la continuité sur $\mathbb{T}$ de la somme de la série $f_\omega \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_n(\omega)c_n\mathbf{e}_n$, où (ε_n) est une suite de variables de Bernoulli indépendantes, on peut voir f_ω comme somme d'une série $\sum \varepsilon_n u_n$ de vecteurs de l'espace $C(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$. La question générale est l'étude de séries de la forme (le numéro d'équation «(1)» est dans l'article original [**KaSV**], nous l'emballons entre deux crochets)

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(\omega)u_n \tag*{$[(1)]_k$}$$

où les u_n sont des vecteurs d'un espace de Banach B. En 1964, Kahane [**KaSV**] prouve pour les sommes de ce type une *inégalité exponentielle* qu'on exprimera comme suit : désignant par $\|X\|$ la variable aléatoire $\omega \in \Omega \mapsto \|X(\omega)\|_B$,

(16) *il existe une constante* $\beta > 0$ *telle que si* $\mathrm{E}\,\|X\| \leqslant \beta$, *alors* $\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\|X\|} \leqslant \mathrm{e}\,.$

Le résultat provient d'une estimation de la queue de la loi de $\|X\|$. Cette Note si marquante pour ma famille mathématique n'a pas été retenue dans les Œuvres choisies ! Kahane [**KaSV**], repris en anglais dans *SRSF*, sec. II.5, énonce : étant donné $r > 0$,

> *si* $[(1)]_k$ *est presque sûrement (p. s.) convergente et si* $P(\|X\| > r) < \alpha/2$, *on a* $P(\|X\| > 2r) < \alpha^2$.

La preuve de ce résultat utilise un *principe de réflexion* que Kahane attribue à Paul Lévy ; ce principe permet de contrôler la loi du maximum de la norme d'une «trajectoire» $0 \leqslant k \mapsto S_k := \sum_{j=1}^k \varepsilon_j u_j$ à partir de celle de la position finale $S_\infty = X$. On doit affiner une remarque imprécise : pour que la norme de la somme X dépasse $2r$, il faut d'abord atteindre la sphère de rayon r, puis repartir de façon indépendante du passé, et faire à nouveau un trajet de longueur au moins r. L'indépendance fera passer de α à α^2. Dans le cas d'un processus à trajectoires continues, si on a dépassé le niveau $2r$, on est passé *exactement* au niveau r, alors qu'ici on a pu «sauter» le niveau r : c'est un petit désagrément du cas discret, qu'il va falloir gérer.

On fixe n entier «grand» et $r > 0$, on désigne par $\tau(\omega)$ le premier indice $j \geqslant 1$ tel que $s_j(\omega) := \|S_j(\omega)\| > r$ (on dit en théorie des probabilités que τ est un *temps* *d'arrêt*) ; on pose $A_k = \{\tau = k\}$, $E_u = \{s_n > u\}$ pour $u = r$ ou $u = 2r$. Comme $\tau(\omega) \leqslant n$ quand $\omega \in E_r$, les événements E_r (ou E_{2r}) sont réunion des ensembles disjoints $E_r \cap A_k$ (ou $E_{2r} \cap A_k$), $k = 1, \ldots, n$; on pose aussi $A_k^{\pm} = A_k \cap \{\varepsilon_k = \pm 1\}$, $T_k = S_n - S_{k-1}$ et $t_k = \|T_k\|$. Par définition de τ on sait que $s_{k-1} \leqslant r$ sur A_k, et puisque la norme s_n de la somme S_n dépasse $2r$ sur E_{2r}, on voit par exemple que

$$E_{2r} \cap A_k^- \subset C_k^- := \{\| -u_k + \textstyle\sum_{k<j\leqslant n} \varepsilon_j u_j\|_B > r\} = \{\| -u_k + T_{k+1}\|_B > r\},$$

pour $1 \leqslant k \leqslant n$. L'événement C_k^- est indépendant de A_k^- (c'est là qu'on a *géré*), et il a la même probabilité que $\{t_k > r\}$ par symétrie et indépendance des (ε_j). Il en résulte que $P(E_{2r} \cap A_k^-) \leqslant P(A_k^- \cap C_k^-) = P(A_k^-)P(C_k^-) = P(A_k^-)P(t_k > r)$, et de même avec A_k^+. On déduit et on retient que $P(E_{2r}) \leqslant \sum_{k=1}^n P(A_k)P(t_k > r)$.

Voici l'argument (double) de réflexion, pour k fixé tel que $1 \leqslant k \leqslant n$: sur $\{t_k > r\}$, l'un au moins de $S_n = S_{k-1} + T_k$ ou $S'_n := S_{k-1} - T_k$ a une norme $> r$ par l'inégalité triangulaire, et donc $P(t_k > r) \leqslant P(s_n > r) + P(s'_n > r)$, avec $s'_n = \|S'_n\|$; de la même façon, puisque $s_k > r$ sur A_k, l'un au moins de $S_n = S_k + T_{k+1}$ ou de $S''_n := S_k - T_{k+1}$ a une norme $> r$ sur l'ensemble A_k, et par conséquent on obtient que $P(A_k) \leqslant P(A_k \cap \{s_n > r\}) + P(A_k \cap \{s''_n > r\})$, où $s''_n = \|S''_n\|$.

On a que $P(s_n > r) = P(s'_n > r)$ et $P(A_k \cap \{s_n > r\}) = P(A_k \cap \{s''_n > r\})$ par symétrie et indépendance (avec une vision « géométrique », on pourra constater que $A_k \cap \{s_n > r\}$ et $A_k \cap \{s''_n > r\}$ sont échangés par la transformation R_k qui modifie les signes de $\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n$ sans changer $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$, et R_k préserve la mesure produit sur $\{-1, 1\}^n$). Rappelant le paragraphe précédent et le fait que $E_r = \{s_n > r\}$, on écrit que $P(t_k > r) \leqslant 2P(E_r)$, $P(A_k) \leqslant 2P(A_k \cap E_r)$ et

$$P(E_{2r}) \leqslant \textstyle\sum_{k=1}^n P(A_k)P(t_k > r) \leqslant 4\sum_{k=1}^n P(A_k \cap E_r)P(E_r) = 4P(E_r)^2, \quad \textit{cqfd.}$$

De cet énoncé résulte la décroissance exponentielle de la queue de la loi de la variable aléatoire $\|X\|$, et la propriété (16) ; dans le cas scalaire cependant, la décroissance résultant de Khintchine est meilleure qu'exponentielle, elle est *sous-gaussienne*. Ce « défaut » a été corrigé par Stanisław Kwapień en 1975 [**Kwap**]. Restant attaché aux thèmes qui l'ont intéressé auparavant, Kahane expose l'argument dans la seconde édition *SRSF*$_2$ en 85. On se sert d'abord d'un principe simple qu'on trouve déjà dans les Notes de Montréal [**KaFA**, p. 58], qui conduit à une inégalité L^p que Kahane utilise [**KaRS**, 2.7, (30)] et attribue à Pisier, à l'époque jeune mathématicien (il avait 24 ans —pendant 10 mois— en 1975) ; plutôt que par L^p, nous passerons par une inégalité exponentielle, tout en utilisant ce même principe : si Y est une variable aléatoire réelle possédant une loi symétrique et si ε est une variable de Bernoulli indépendante de Y, alors Y possède, clairement, la même loi que $|Y|\varepsilon$; plus généralement, on voit que la suite $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de variables réelles indépendantes symétriques a la même loi que $(|Y_1|\varepsilon_1, \ldots, |Y_n|\varepsilon_n)$, où les Bernoulli $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sont indépendantes entre elles et indépendantes des (Y_j).

Pour poursuivre on va utiliser la transformée de Laplace, un peu comme en (12). On fixe un nombre réel $s > 0$ et on estime $\mathrm{E}\exp(s\|X\|)$. Soit $n \geqslant 1$ l'entier tel que $s^2/2 < n \leqslant 1 + s^2/2$; on prend une variable aléatoire X «somme de Bernoulli vectorielles», $X = \sum_j \varepsilon_j u_j$. Supposons que $\mathrm{E}\,\|X\| = \beta$, où β est celui du théorème exponentiel (16) de Kahane. Considérant des Bernoulli $(\varepsilon_{j,i})$, toutes indépendantes, on obtient des *copies* de la variable X, indépendantes, en écrivant $X_i = \sum_j \varepsilon_{j,i} u_j$ pour $i = 1, \ldots, n$. Alors

$$X_1 + \cdots + X_n = \sum_j \Bigl(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{j,i} u_j\Bigr) = \sum_j B_j^{(n)} u_j, \quad \text{avec} \quad B_j^{(n)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{j,i},$$

et $B_j^{(n)}$ a une loi symétrique. Introduisons d'autres variables de Bernoulli (ε'_j), indépendantes des $(\varepsilon_{j,i})$. La somme $X_1 + \cdots + X_n$ a la même loi que $\sum_j |B_j^{(n)}| \varepsilon'_j u_j$ d'après le «principe» préliminaire, tandis que X a la même loi que $\sum_j \varepsilon'_j u_j$. Par (14) avec la constante optimale $\delta = 1/\sqrt{2}$, écrivons pour chaque indice j que

$$\gamma := \mathrm{E}\,|\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n| = \mathrm{E}_x\,|B_j^{(n)}(x)| \geqslant \delta\sqrt{n} > \delta s/\sqrt{2} = s/2.$$

Par croissance et convexité de l'exponentielle, puis d'après (16), on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\exp(s\|\tfrac12 X\|) \leqslant \mathrm{E}\exp(\|\gamma X\|) = \mathrm{E}_y \exp\bigl(\bigl\|\bigl(\textstyle\sum_j \gamma\varepsilon'_j(y) u_j\bigr)\bigr\|\bigr) \\ &= \mathrm{E}_y \exp\bigl(\bigl\|\mathrm{E}_x\bigl(\textstyle\sum_j |B_j^{(n)}(x)| \varepsilon'_j(y) u_j\bigr)\bigr\|\bigr) \leqslant \mathrm{E}_y\,\mathrm{E}_x \exp\bigl(\bigl\|\textstyle\sum_j |B_j^{(n)}(x)| \varepsilon'_j(y) u_j\bigr\|\bigr) \\ &= \mathrm{E}\exp(\|X_1 + \cdots + X_n\|) \leqslant \mathrm{E}\exp\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^n \|X_i\|\bigr) = \bigl(\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\|X\|}\bigr)^n \leqslant \mathrm{e}^n \leqslant \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{s^2/2}. \end{aligned}$$

Markov revient se charger du reste, donnant $P\bigl(\|\frac12 X\| > t\bigr) \leqslant \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ pour tout $t > 0$. D'autres preuves existent pour l'estimation sous-gaussienne de Kwapień, notamment une preuve de Christer Borell [**Bore**], relayée par Pisier [**PisK**] dans le *Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach* de l'École polytechnique, en 1977-78. La preuve part d'une inégalité pour deux points introduite par Aline Bonami et William Beckner indépendamment, vers 1971. Jørgen Hoffmann-Jørgensen [**Hoff**] a montré en 1974 un résultat général qui implique des équivalences de normes $L^{q_1}(B)$–$L^{q_2}(B)$ pour les sommes de vecteurs d'un espace normé affectés de coefficients p-stables indépendants, quand $0 < q_1, q_2 < p < 2$. On peut avancer que ce thème des équivalences de normes pour les variables aléatoires vectorielles a été, pour une bonne part, influencé par le travail de Kahane [**KaSV**] (j'ai été du nombre : un de mes premiers articles après thèse, avec Pisier, est consacré aux sommes de Bernoulli vectorielles ; les inégalités de Kahane–Khintchine y jouent un rôle conséquent).

Comme dans le cas scalaire, on a aussi —automatiquement— une minoration, pour les mêmes raisons. Ce qui est surprenant est que la constante optimale dans le cas vectoriel est la même que dans le cas scalaire, et la preuve plus courte ; Latała et Oleszkiewicz [**LaOl**] ont obtenu ce résultat, qui ne pouvait qu'intéresser Kahane : son nom est dans le titre ! Il faut maintenant écrire l'inégalité sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\bigl(\mathrm{E}\,\|X\|^2\bigr)^{1/2} \leqslant \mathrm{E}\,\|X\|, \tag{17}$$

la forme (14) n'étant pas possible ici. Kahane reproduit dans *SFEO*, sec. 11.2, cette belle preuve qui dit-il, lui a été communiquée par Kwapień.

Cette preuve est un véritable tour de magie. Sur le groupe fini $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ muni de la probabilité uniforme, on définit d'abord sur Ω_n les n fonctions projections ε_j, pour $j = 1, \ldots, n$, en posant $\varepsilon_j(\omega) = \omega_j$ si $\omega = (\omega_j)_{j=1}^n \in \Omega_n$, puis les 2^n *fonctions de Walsh* $w_J = \prod_{j\in J} \varepsilon_j$, pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \ldots, n\}$, y compris $w_\emptyset = \mathbf{1}$ (et $w_{\{j\}} = \varepsilon_j$). Les (w_J) forment une base orthonormée de $L^2(\Omega_n)$. Pour chaque $k = 1, \ldots, n$ désignons par $\omega^{(k)}$ le point de Ω_n obtenu à partir de ω en remplaçant la coordonnée ω_k d'indice k par $-\omega_k$, les autres coordonnées ω_j, $j \neq k$, restant inchangées. En se plaçant dans $\mathbb{R}^n$ on constate que $\sum_{k=1}^n \omega^{(k)} = (n-2)\omega$. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs d'un espace normé B et si $n \geqslant 2$, considérons $g(\omega) = \|\sum_{j=1}^n \omega_j u_j\|_B$; parce que g provient d'une norme, on a

$$\sum_{k=1}^n g(\omega^{(k)}) \geqslant g\big(\sum_{k=1}^n \omega^{(k)}\big) = (n-2)g(\omega). \tag{18}$$

Si f est une fonction sur Ω_n et $1 \leqslant k \leqslant n$, posons $(\partial_k f)(\omega) = \frac{1}{2}\big(f(\omega) - f(\omega^{(k)})\big)$. Soit $Df = \sum_{k=1}^n \partial_k f$; on voit que $2(Df)(\omega) = nf(\omega) - \sum_{k=1}^n f(\omega^{(k)})$, et lorsque $f = g$ on déduit de (18) que $Dg \leqslant g$. En calculant l'intégrale de $g - Dg \geqslant 0$ contre la fonction $g \geqslant 0$, il vient $\int gDg \leqslant \int g^2$, que nous gardons en mémoire.

Revenons aux ∂_k ; on a $\partial_k w_J = w_J$ si $k \in J$ et $\partial_k w_J = 0$ sinon, donc $Dw_J = |J| w_J$, où $|J|$ désigne le cardinal de J. Si on décompose la fonction g sur la base de Walsh, sous la forme $g = \sum_J a_J w_J$, on obtient $Dg = \sum_J |J| a_J w_J$. Comme g est paire, et c'est là le miracle, on a $a_J = 0$ quand $|J| = 1$, et grâce au miracle on obtient la première inégalité ci-dessous,

$$2\sum_{J\neq\emptyset} a_J^2 \leqslant \sum_{J\neq\emptyset} |J| a_J^2 = \sum_J |J| a_J^2 = \int gDg \leqslant \int g^2 = \sum_J a_J^2 = a_\emptyset^2 + \sum_{J\neq\emptyset} a_J^2.$$

Et pffuitt ! On déduit $\sum_{J\neq\emptyset} a_J^2 \leqslant a_\emptyset^2$ puis $\sum_J a_J^2 \leqslant 2a_\emptyset^2$, l'inégalité est là, sous la forme $\int g^2 \leqslant 2(\int g)^2$ équivalente à (17), on a aussi retrouvé de cette façon le résultat de Szarek [**Szar**].

3.4. Le théorème de de Leeuw–Kahane–Katznelson. — Ce théorème dit qu'il n'y a pas de règle particulière de majoration à laquelle obéiraient les coefficients de Fourier des fonctions continues sur le cercle, autre que leur caractère de carré sommable qui résulte de l'appartenance à $L^2(\mathbb{T})$. Précisément : *étant donnée une suite* $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geqslant 1}$ *à termes positifs ou nuls dans* $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, *on peut trouver une fonction* f *continue sur* $\mathbb{T}$ *de la forme*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \quad \textit{avec} \quad |a_n| \geqslant u_n \quad \textit{pour tout} \quad n \geqslant 1\,; \tag{19}$$

de plus, il existe une constante C *telle qu'on puisse choisir la fonction* f *vérifiant* (19) *de façon qu'elle satisfasse aussi la majoration* $\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{\ell^2}$.

Ce thème avait été exploré par Salem dans ses *Essais sur les séries trigonométriques* [**SalW**, p. 111], fondés sur des Notes CRAS de 1933 et 1935. Le point de vue de Salem est différent : il cherche, pour le cas de suites (u_n) suffisamment «régulières», des séries de somme continue et dont les modules r_n des coefficients sont *précisément égaux* aux u_n (voir aussi Zygmund [**Zygm**, V (10·1)]). Salem commence ainsi :

> «Une question qui se présente d'elle-même au débutant dans l'étude des séries trigonométriques est celle de savoir si les coefficients de Fourier des fonctions continues doivent satisfaire à certaines conditions concernant leur ordre de grandeur.»

En 1977, Karel de Leeuw, Kahane et Katznelson ont utilisé Khintchine (13) et une correction itérative astucieuse [**KaSW**, p. 361] —voir aussi *SRSF*$_2$, sec. 5.9—. Fyodor (Fedor en anglais) Nazarov a proposé une preuve très différente et beaucoup plus rapide [**Naza**] (voir aussi Daniel Li et Queffélec [**LiQu**, —en anglais— ex. 5.VIII.16, p. 208, vol. 1]) ; cette preuve a permis à Françoise Lust-Piquard de traiter également le cas d'espaces de matrices [**LPiq**].

Donnons notre version de la preuve originale. On ne fera aucun effort pour optimiser la constante C figurant après (19) ; en outre, on se contentera de trouver une fonction f *bornée*, le passage à f continue étant une formalité pour les spécialistes, par convolution. L'inégalité (K_4) et (13) pour $p = 4$ montrent que si on permet des changements de signes aléatoires $(\varepsilon_n(\omega))$ dans ses coefficients de Fourier, une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ devient une fonction g de $L^4(\mathbb{T})$. On a immédiatement le début du principe recherché :

> *les suites* $\mathbf{u}$ *formées des valeurs absolues des coefficients des fonctions de l'espace* $L^2(\mathbb{T})$ *sont identiques aux suites de valeurs absolues des coefficients des fonctions de* $L^4(\mathbb{T})$.

Ayant ainsi amélioré L^2 en L^4, il va falloir travailler pour arriver à L^∞. Comme dans la preuve du théorème d'interpolation de Jósef Marcinkiewicz [**Zygm**, XII (4·6)], on raisonne ainsi : pour tout $\lambda > 0$, on peut découper la fonction

$$g(t) \sim \textstyle\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon_n(\omega_0)a_n\cos(nt) \in L^4(\mathbb{T}) \quad \text{en} \quad g = h_\lambda + r,$$

où h_λ est dans $L^\infty(\mathbb{T})$, bornée par λ, et r est dans $L^2(\mathbb{T})$, d'autant plus petite en norme L^2 que λ est grand. On choisira λ de façon que $\|r\|_2$ soit assez petit pour faire avancer la question : il s'agira de répéter l'opération sur r, ou sur une «partie» de r.

Toujours avec $\mathrm{d}m(t) = \mathrm{d}t/(2\pi)$, notons $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbb{T}, m)$ qui sont réelles et paires et posons $\varphi_n(t) = \cos(nt)$, $n \geqslant 1$. Si g est dans $\mathcal{P}_2$, on écrit

$$g = \tfrac{1}{2}a_0(g) + \textstyle\sum_{n\geqslant 1}a_n(g)\varphi_n \text{ avec } a_n(g) \in \mathbb{R},\ \textstyle\sum_{n\geqslant 1}a_n(g)^2 = 2\|g\|^2_{L^2(\mathbb{T})} - \tfrac{1}{2}a_0(g)^2.$$

Reprenant (K_4), on obtient avec le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int\Big(\sum_{n\geqslant 1}a_n\varepsilon_n\varphi_n\Big)^4\,\mathrm{d}P\,\mathrm{d}m &\leqslant 3\int_{\mathbb{T}}\Big(\sum_{n\geqslant 1}a_n^2\varphi_n^2\Big)^2\,\mathrm{d}m\\ &\leqslant 3\Big(\sum_{n\geqslant 1}a_n^2\Big)^2 = 12\Big\|\sum_{n\geqslant 1}a_n\varphi_n\Big\|^4_{L^2(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

Si $f = \sum_{n\geqslant 1} a_n\varphi_n \in \mathcal{P}_2$ est donnée, on peut donc sélectionner des signes $\pm$ tels que

$$g = \textstyle\sum_{n\geqslant 1} \pm\, a_n\varphi_n \quad \text{vérifie} \quad \|g\|^4_{L^4(\mathbb{T})} \leqslant 12\,\|f\|^4_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{20}$$

Pour $\lambda > 0$, posons $\chi_\lambda = \mathbf{1}_{\{|g|>\lambda\}}$, fonction indicatrice de l'ensemble $\{|g| > \lambda\}$. Définissons la fonction impaire $u \mapsto P_\lambda(u)$ sur $\mathbb{R}$, projection de plus courte distance de $\mathbb{R}$ sur $[-\lambda, \lambda]$, en posant $P_\lambda(u) = \min(u, \lambda)$ quand $u \geqslant 0$. Puisque $P_\lambda(u) = u$ quand $|u| \leqslant \lambda$ et $|u - P_\lambda(u)| \leqslant |u|$, on voit que $\lambda|g - P_\lambda(g)| \leqslant \lambda\chi_\lambda|g| \leqslant g^2$, donc

$$\int_{\mathbb{T}} (g - P_\lambda(g))^2 \,\mathrm{d}m \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{T}} g^4 \,\mathrm{d}m \leqslant \frac{12}{\lambda^2}\,\|f\|^4_{L^2(\mathbb{T})}.$$

On pose $h_\lambda = P_\lambda(g)$, qui est bornée par λ, réelle et paire, et $r = g - P_\lambda(g)$ qui est réelle et paire aussi. À partir de $f \in \mathcal{P}_2$ on a obtenu d'après (20), en changeant des signes, une fonction g telle que $g = h_\lambda + r$, avec $g, r \in \mathcal{P}_2$ et

$$|h_\lambda| \leqslant \lambda, \quad \|r\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{\lambda}\,\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{21}$$

Voici l'étape cruciale pour l'itération à venir :

Lemme 1. *On se donne $r_0 \in \mathcal{P}_2$, et $f_0 \in \mathcal{P}_2$ telle que $|a_n(f_0)| \geqslant R_0 u_n$ pour tout $n \geqslant 1$, avec $0 < R_0 \leqslant 1$; si ρ_1 tel que $0 < \rho_1 < R_0$ et $\lambda_1 > 0$ sont donnés, on peut écrire*

$$(f_0 + r_0) = h_1 + (f_1 + r_1), \quad f_1, r_1 \in \mathcal{P}_2,$$

où $|h_1(x)| \leqslant \lambda_1$ pour $x \in \mathbb{T}$, où $|a_n(f_1)| \geqslant (R_0 - \rho_1)u_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et

$$\|r_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{\rho_1^2\lambda_1}\,\|r_0\|^2_{L^2(\mathbb{T})}. \tag{22}$$

Preuve. On construit f_1 en «corrigeant» certains des coefficients a_n de $f_0 + r_0$. Si $|a_n(f_0 + r_0)| \geqslant (R_0 - \rho_1)u_n$, on déclare l'indice n comme «bon». L'ensemble M des *mauvais indices* est formé des entiers $n \geqslant 1$ tels que $|a_n(f_0 + r_0)| < (R_0 - \rho_1)u_n$. Par l'hypothèse sur les coefficients de f_0, on a $|a_n(r_0)| > \rho_1 u_n$ quand $n \in M$. On considère

$$f_* = 2\textstyle\sum_{n\in M} u_n\varphi_n, \quad \text{puis} \quad g_* = 2\sum_{n\in M} \pm\, u_n\varphi_n$$

sélectionnée d'après (21) de façon que $g_* = h_1 + r_1$, $|h_1| \leqslant \lambda_1$ et

$$\|r_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{\lambda_1}\,\|f_*\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{4\sqrt{3}}{\lambda_1} \sum_{n\in M} u_n^2.$$

On pose $f_1 = (f_0 + r_0) - g_*$; si n est «bon», $a_n(f_1) = a_n(f_0 + r_0)$ est correct. Sinon, $n \in M$, $|a_n(f_0 + r_0)| < (R_0 - \rho_1)u_n \leqslant u_n$, et retrancher $\pm 2u_n = a_n(g_*)$ à $a_n(f_0 + r_0)$ garantit que $a_n(f_1)$ reste, ou sinon «bascule» du bon côté, c'est-à-dire que $|a_n(f_1)| \geqslant u_n \geqslant (R_0 - \rho_1)u_n$. Quand $n \in M$, alors $u_n < |a_n(r_0)|/\rho_1$ et

$$\|r_1\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{\rho_1^2\lambda_1} \sum_{n\geqslant 1} a_n(r_0)^2 \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{\rho_1^2\lambda_1}\,\|r_0\|^2_{L^2(\mathbb{T})}. \qquad \square$$

Il reste à itérer en partant de $R_0 = 1$, $f_0 = \sum_{n\geqslant 1} u_n\varphi_n$ et $r_0 = -f_0$, ce qui donnera

$$0 = f_0+r_0 = h_1 + (f_1+r_1) = h_1 + h_2 + (f_2+r_2) = \cdots = \Big(\sum_{j=1}^{k} h_j\Big) + (f_k+r_k) = \cdots$$

avec $|a_n(f_k)| \geqslant (R_0 - \sum_{j=1}^{k} \rho_j)u_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et $|h_k| \leqslant \lambda_k$. Pour faire simple, prenons $\rho_j = 2^{-j-1}$ pour $j \geqslant 1$ et posons $\lambda_j = 8\sqrt{3}2^{-j+2}$, de sorte que $\rho_j^2\lambda_j = 8\sqrt{3}8^{-j}$; supposons que $\|r_j\|_{L^2} \leqslant 8^{-j-2}$ pour $0 \leqslant j < k$. D'après (22), on aura

$$\|r_k\|_{L^2} \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{\rho_k^2\lambda_k}\,\|r_{k-1}\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{8^{-k}}(8^{-k-1})^2 = 8^{-k-2}.$$

Par récurrence on obtient $\|r_k\|_{L^2} \leqslant 8^{-k-2}$ pour tout $k \geqslant 0$, si on garantit que

$$2^{-1/2}\big(\textstyle\sum_{n\geqslant 1} u_n^2\big)^{1/2} = \|f_0\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|r_0\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant 8^{-2}.$$

La série $\sum_{j\geqslant 1} h_j$ converge dans $L^2(\mathbb{T})$, sa somme est bornée par $\sum_{j\geqslant 1}\lambda_j = 32\sqrt{3}$, et r_k tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{T})$, donc f_k converge dans $L^2(\mathbb{T})$ vers f_∞ telle que

$$|a_n(f_\infty)| \geqslant \big(1 - \textstyle\sum_{j\geqslant 1}\rho_j\big)u_n = \frac{u_n}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

La solution $f = 2f_\infty = -2\sum_{j\geqslant 1} h_j$ est bornée. Notre constante pour (19) a été facile à obtenir mais est ridiculement grande, $C = 2048\sqrt{6}$; les auteurs annoncent $C \leqslant 9$, mais ils utilisent le caractère sous-gaussien au lieu d'un simple Khintchine dans L^4.

Cette preuve, évidemment, reste valable pour tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace L^2 de mesure finie, stable par $f \mapsto P_\lambda(f)$ et muni d'une base orthonormée $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ formée de fonctions uniformément bornées : par exemple, pour l'espace des fonctions impaires sur $[-\pi, \pi]$, muni de la base des fonctions sinus [**KaSW**, p. 361].

Nazarov obtient le résultat sous une condition plus large, quand on suppose seulement que la base orthonormée $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ est telle que $\|\psi_n\|_{L^1}$ reste minoré par un $\kappa > 0$ quand n varie. L'argument est « fulgurant » : on considère une fonction convexe F sur $\mathbb{R}$, paire et C^2, dont la dérivée seconde décroît sur $[0, +\infty)$ et se comporte comme x^{-2} à l'infini, par exemple $F''(x) = 1/(x^2 + 1)$. La fonction impaire F' est alors bornée sur $\mathbb{R}$ (par $\pi/2$). Étant données une probabilité μ sur un espace mesuré S et des fonctions réelles $f_1, \ldots, f_n$ dans $L^2(S, \mu)$, on considère la fonction g^* de la forme $g = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j f_j$ qui maximise $\int_S F(g)\,\mathrm{d}\mu$ quand on fait varier les $\varepsilon_j = \pm 1$; désignons par $(\varepsilon_j^*)_{j=1}^{n}$ une famille de coefficients optimaux. On écrit pour chaque j de 1 à n la formule de Taylor–Lagrange pour F au point $g^*(s)$, ce qui permet d'exprimer $F(g^*(s) - 2\varepsilon_j^* f_j(s))$ pour tout $s \in S$; on obtient ainsi

$$\tfrac{1}{2}F(g^* - 2\varepsilon_j^* f_j) - \tfrac{1}{2}F(g^*) + \varepsilon_j^* f_j F'(g^*) = F''(g^* - \theta\varepsilon_j^* f_j)f_j^2 \geqslant F''(|g^*| + |f_j|)\,f_j^2,$$

où θ est une fonction sur S à valeurs dans $(0,1)$. On exploite maintenant la maximalité de g^*, qui implique $\int_S (F(g^* - 2\varepsilon_j^* f_j) - F(g^*))\,\mathrm{d}\mu \leqslant 0$, on amène Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}\Big|\int_S F'(g^*) f_j \,\mathrm{d}\mu\Big| &\geqslant \int_S F''(|g^*|+2|f_j|) f_j^2 \,\mathrm{d}\mu \\ &\geqslant \Big(\int_S F''(|g^*|+2|f_j|)^{-1}\,\mathrm{d}\mu\Big)^{-1}\Big(\int_S |f_j|\,\mathrm{d}\mu\Big)^2 \\ &= \Big(\int_S [(|g^*|+2|f_j|)^2+1]\,\mathrm{d}\mu\Big)^{-1}\Big(\int_S |f_j|\,\mathrm{d}\mu\Big)^2.\end{aligned}$$

Dans le cas d'une suite orthonormée finie réelle $\psi_1, \dots, \psi_n$, appliquons le résultat à $f_j = u_j \psi_j$, avec $u_j \geqslant 0$ et $\sum u_j^2 = 1$. L'argument fournit la fonction bornée cherchée : c'est tout simplement $h = F'(g^*)$! Ici, g^* est de norme 1 dans $L^2(S,\mu)$, f_j est de norme $u_j \leqslant 1$ et $|g^*| + 2|f_j|$ de norme $\leqslant 3$; on obtient pour chaque j l'inégalité

$$\Big|\int_S h\psi_j \,\mathrm{d}\mu\Big| u_j \geqslant \frac{\|\psi_j\|_{L^1}^2}{3^2+1} u_j^2, \quad \text{soit} \quad |\langle h, \psi_j\rangle| \geqslant \frac{\kappa^2}{10} u_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Le cas infini en résulte par un argument aisé de compacité faible dans $L^2(S,\mu)$.

Par une méthode plus proche de l'originale, Sergeï Kislyakov [**Kisl**] (voir aussi Queffélec [**Quef**]) a démontré qu'on peut trouver une série de Fourier *uniformément convergente* « analytique » $f = \sum_{n\geqslant 0} c_n \mathbf{e}_n$ (si on préfère, trouver $F(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, série uniformément convergente sur le cercle unité U) dont les coefficients c_n sont minorés en module par les (u_n) donnés. La preuve utilise une inégalité de Stanislav A. Vinogradov —membre de l'équipe de Saint-Pétersbourg— qui s'appuie sur le théorème de convergence presque sûre de Carleson [**Carl**] ; il ne semble pas que la méthode de Nazarov conduise à ce résultat. En 2000, Kahane a dédié un article à Vinogradov, dans *The S. A. Vinogradov Memorial Volume* ; il écrit : « [...] this volume will contribute to draw the attention of a wide mathematical audience to the work and heritage of S. A. Vinogradov. I had much in common with his work [...] ».

4. Raphaël Salem

On peut trouver des informations sur la vie de Salem dans l'introduction de ses *Œuvres* [**SalW**], où on lit des souvenirs de Zygmund (en anglais) et une analyse par Kahane et Zygmund des travaux (en français). On y apprend que Salem, exerçant à Paris des fonctions de direction dans une banque, et par ailleurs mathématicien « amateur », a pu intéresser Denjoy par ses résultats sur les séries trigonométriques, passer une thèse d'État à Paris dont le contenu est publié en 1940 [**SalW**, p. 111]. Mobilisé en 1939 (à 41 ans), démobilisé en juin 40, il quitte la France pour sa sécurité —sa mère et sa sœur périront dans les camps— ; il devient professeur aux États-Unis, en commençant par "Lecturer" au MIT en 1941. Revenu en France en 1955, il y est resté jusqu'à sa mort en 1963. Au début de son cours à Montréal [**KaFA**] donné à l'été 63, Kahane déplore : « la mort de mon maître et ami Raphaël Salem ».

Bien que moins variés que les travaux de Kahane, ceux de Salem le sont assez pour que je ne puisse qu'effleurer le sujet ici. Salem a beaucoup travaillé avec des fonctions «du type de Cantor». En 1943, il a décrit par une méthode «fractale» une fonction continue *strictement* croissante Φ dont la dérivée est nulle presque-partout, un résultat sans doute mineur mais bien adapté à notre propos [**SalW**, p. 282]. La fonction Φ est limite uniforme d'une suite (Φ_n) dont la suite des dérivées Φ'_n est une martingale positive ressemblant à celles qui intéresseront Kahane plus tard. Cette martingale sur $[0,1]$ est de la forme

$$M_0 = 1, \quad M_n = \textstyle\prod_{j=1}^n (1+\lambda r_j), \quad n \geqslant 1,$$

où λ réel est fixé, $0 < \lambda^2 < 1$, et où les (r_j) sont les fonctions de Rademacher sur $[0,1]$ (la fonction M_n est aussi un très classique *produit de Riesz*, un produit *fini* à ce stade). La fonction Φ est limite uniforme sur $[0,1]$ des primitives Φ_n nulles en 0 des M_n, elle est strictement croissante parce que les valeurs $\Phi(i2^{-n}) = \int_0^{i2^{-n}} M_n(t)\,\mathrm{d}t$ le sont pour $i = 0, \dots, 2^n$, étant donné que M_n est > 0. La martingale converge presque partout sur $[0,1]$, on le voit directement : si on pose $s_n = \sum_{j=1}^n r_j$, et comme $\lambda^2 < 1$, on aura

$$M_n = (1-\lambda^2)^{(n-|s_n|)/2}(1+\lambda\,\mathrm{sign}\, s_n)^{|s_n|} = \Big[\sqrt{1-\lambda^2}^{\,1-|s_n|/n}(1+\lambda\,\mathrm{sign}\, s_n)^{|s_n|/n}\Big]^n,$$

donc $M_n(t)$ tend vers 0 presque partout, parce que $1-\lambda^2 < 1$ et que $s_n(t)/n \to 0$ pour presque tout t par la loi des grands nombres. Si Φ est dérivable en un point t où $M_n(t)$ tend vers 0, on aura $\Phi'(t) = 0$. Comme on sait d'après Lebesgue que la fonction Φ, croissante, est dérivable presque partout, le résultat est obtenu.

Plutôt que de balayer toute la liste des articles de Salem, je vais me livrer à une sorte d'enquête sur un seul thème, ses articles sur les nombres de Pisot, qui sont beaux et plaisants à lire, complexes et profonds aussi. Et j'exploiterai mesquinement une erreur de Salem pour écrire un feuilleton (mathématique) en trois épisodes.

4.1. Unicité et nombres de Pisot, acte I. — Un *nombre de Pisot*, ou de *Pisot–Vijayaraghavan*, ou nombre P–V, est un entier algébrique $\theta > 1$ dont tous les conjugués sont de module < 1 ; le *degré* de θ est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel qu'il existe un polynôme P de degré n vérifiant $P(\theta) = 0$ et de la forme

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{23}$$

où les a_j sont dans $\mathbb{Z}$. Les racines $(\alpha_j)_{j=1}^n$ de P sont simples quand $\deg P = \deg\theta$ est minimal ; les *conjugués* de $\theta = \alpha_1$ sont alors les autres racines $\alpha_j \in \mathbb{C}$ de ce polynôme P, $j = 2, \dots, n$. Dans le cas élémentaire où $n = 1$, θ est un entier > 1 (on écarte $\theta = 0$ et $\theta = 1$).

Désignons par $\rho < 1$ le maximum des modules des conjugués de θ. Il résulte de la propriété P–V que θ^k se rapproche des entiers quand $k \to \infty$, la distance aux entiers $((\theta^k)) = \mathrm{dist}(\theta^k, \mathbb{Z})$ étant au plus de l'ordre de ρ^k, précisément $((\theta^k)) \leqslant (n-1)\rho^k$ car

$$\theta^k + \textstyle\sum_{j=2}^n \alpha_j^k = \sum_{j=1}^n \alpha_j^k$$

est entier d'après les propriétés des fonctions symétriques des racines de P : les fonctions symétriques élémentaires sont entières puisque P est unitaire à coefficients entiers. Charles Pisot a caractérisé le fait que θ soit P–V par l'existence d'un réel $\lambda > 0$ tel que la série $\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(\pi\lambda\theta^k)$ —ou bien $\sum_{k\geqslant 0}((\lambda\theta^k))^2$— converge. Raffinant ce critère, Salem a prouvé que l'ensemble des nombres de Pisot est fermé [**SalW**, p. 311].

Salem énonce en 1943 qu'un ensemble E_ξ —voir (10)— est d'unicité si et seulement si $\theta = 1/\xi$ est un nombre de Pisot [**SalW**, p. 295, 297] ; il se rétracte en 1948 [**SalW**, p. 423], il a seulement montré l'implication (**A**) : si E_ξ est d'unicité, alors θ est un nombre P–V. Pour ce faire, il a montré que si θ n'est pas de Pisot, les coefficients de Fourier–Stieltjes de la *mesure de Cantor* de E_ξ tendent vers 0. Chose peu charitable pour ceux qui avaient pu se casser la tête sur son article de 1943, il ne dit pas où était l'erreur dans la preuve de l'implication réciproque (**B**). Regardons de plus près.

Comme dans le cas $\xi = 1/3$, où on utilise $n_k = 3^k = \xi^{-k} = \theta^k$ pour prouver la propriété (H), on pourrait essayer ici des entiers $n_k \sim \theta^k$; il est plus simple d'utiliser (H_*) et des réels $t_k = c\theta^k$ pour $c > 0$ bien choisi. On sait par Marcinkiewicz et Zygmund [**Zygm**, IX (6·18), XVI (10·25)] que si $E, F \subset [0, 2\pi]$ sont homothétiques, ils sont de même nature (U) ou non-(U), on va donc plutôt travailler avec $(\theta-1)^{-1}E_\xi$ (comme $\xi < 1/2$, on a $\theta - 1 > 1$) ; on va de plus se ramener à $[0, 1]$ en divisant par 2π, obtenant ainsi l'ensemble $F_\xi \subset [0, 1]$ et ses points $y \in F_\xi$, qu'on écrit d'après (10) sous la forme $y = \eta_0\xi + \eta_1\xi^2 + \cdots$ avec $\eta_j = 0, 1$; on découpe ce développement de y en blocs b_i de longueur ℓ, où ℓ est fixé, assez grand pour que θ^ℓ soit très près des entiers : pour tout $i \geqslant 0$, on pose

$$b_i = \eta_{i\ell}\xi + \cdots + \eta_{i\ell+\ell-1}\xi^\ell, \quad \text{d'où} \quad y = \textstyle\sum_{i\geqslant 0}\xi^{i\ell}b_i = \sum_{i\geqslant 0}\theta^{-i\ell}b_i.$$

Pour chaque entier $m > 1$, Salem (1943) écrit $\theta^{m\ell}y = B_1 + \theta^\ell b_{m-1} + B_2$, précisément

$$\theta^{m\ell}y = (\eta_0\theta^{m\ell-1} + \cdots + \eta_{m\ell-\ell-1}\theta^\ell) + \theta^\ell b_{m-1} + (\eta_{m\ell}\xi + \eta_{m\ell+1}\xi^2 + \cdots). \tag{24}$$

Le premier bloc B_1 est presque entier, avec une distance aux entiers majorée par $D_\ell = (n-1)\sum_{k\geqslant\ell}\rho^k$ qui est de l'ordre de ρ^ℓ, le bloc B_2 est un point y_m de F_ξ. Le terme central $\theta^\ell b_{m-1}$ est primordial, il peut prendre 2^ℓ valeurs s_β quand y, et par conséquent les (η_i) dans b_{m-1}, varient. Salem découpe F_ξ en 2^ℓ morceaux $F_{\xi,\beta}$ (non disjoints), où $F_{\xi,\beta}$ est formé des y tels que la valeur centrale $\theta^\ell b_{m-1}$ dans $\theta^{m\ell}y$ soit égale à s_β pour une *infinité* de valeurs de m. Supposant $y \in F_{\xi,\beta}$, il considère la sous-suite (m_k) des entiers tels que la valeur de ce terme central dans $\theta^{m_k\ell}y$ soit s_β. Alors, pour ℓ assez grand, il existe un intervalle fixe ne contenant aucun multiple $t_k y = \theta^{m_k\ell}y$, $k \geqslant 0$: ces multiples sont en effet, à D_ℓ près (mod 1), dans le translaté $s_\beta + F_\xi$, et il suffit donc que D_ℓ soit plus petit que la moitié de la longueur d'une des composantes ouvertes J du complémentaire de F_ξ, pour que les multiples $t_k y$ évitent un intervalle non vide I_β situé au milieu de $s_\beta + J$. Le problème est que cette suite (t_k) qui doit prouver (H_*) pour $F_{\xi,\beta}$ ne dépend *pas que de* β : la suite (m_k)

dépend du point $y \in F_{\xi,\beta}$ considéré, ce qui ne répond pas à la définition de (H_*). Pour assurer que (t_k) soit fixée pour une partie F' de F_ξ, il faudrait une décomposition de F_ξ en une infinité non-dénombrable de composants F', indexés par l'ensemble des suites d'entiers (m_k), comme on fait dans l'opération A de Souslin !

Pourtant cet article de Salem a passé avec succès le "reviewing" de Zygmund (MR#8428), et cinq ans se sont écoulés avant la rétractation. Avaient-ils vu l'erreur bien plus tôt et espéré trouver un "patch" ? Bary, de son côté, indique en note de bas de page que l'erreur avait été détectée dès 1945 par les participants d'un séminaire sur la théorie des fonctions à l'Université de Moscou [**BarT**, XIV.20, vol. 2, p. 394]. Néanmoins, l'effort de Salem ne sera pas totalement perdu, comme on le verra.

4.2. Unicité et nombres de Pisot, deuxième acte. — Après la «rétractation», Salem règle néanmoins dans l'article de 1948 (toujours "reviewé" par Zygmund, MR#25602) le cas des nombres de Pisot de degré 2, avec un argument que nous n'avons pas encore mentionné, mais qu'on entrevoit dans Salem-1943 pour la preuve de l'implication (**A**) : si on désigne par $Q(z) = z^n P(1/z)$ le réciproque du polynôme P dans (23), et par $R = \sum_j b_j X^j$ n'importe quel polynôme non nul de degré $\leqslant n-1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on a pour $z \in \mathbb{C}$ voisin de 0 les équations

$$(25) \quad f(z) := \frac{R(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{1-\alpha_j z} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad \text{avec} \quad \theta = \alpha_1, \quad c_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \alpha_j^i \in \mathbb{Z}.$$

Les c_i sont entiers puisque $Q(z)$ est de la forme $1 - zQ_1(z)$ où $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$, donc $f(Z) = \sum_{i\geqslant 0}(ZQ_1)^i R \in \mathbb{Z}[[X]]$. Les coefficients μ_j se calculent par la formule usuelle de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, cas de pôles simples : si on considère le polynôme $T(z) = z^{n-1}R(1/z)$, on a $T(z)/P(z) = (1/z)f(1/z)$, donc

$$T(z)/P(z) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \mu_j/(z-\alpha_j) \quad \text{et} \quad \mu_j = T(\alpha_j)/P'(\alpha_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

On posera $\lambda = \mu_1 = T(\theta)/P'(\theta)$, qu'on peut supposer > 0 en changeant R en $-R$ (et λ est non nul parce que $\deg T \leqslant n-1 < \deg \theta$). Pour tout $y \in F_\xi$, on écrit maintenant

$$(26) \quad \lambda\theta^m y = (\eta_0 \lambda \theta^{m-1} + \dots + \eta_{m-2}\lambda\theta + \eta_{m-1}\lambda) + \lambda(\eta_m \xi + \eta_{m+1}\xi^2 + \cdots) =: e + r.$$

Il faut noter (Piatetski-Shapiro [**Piat**] me l'a expliqué) que si $u = \sum_{i\geqslant 0}((u_i))$, où $((x)) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$, on peut trouver $J = [v_1, v_2]$, $v_1 \leqslant 0 \leqslant v_2$, de longueur $v_2 - v_1 = u$, tel que tout point $\sum_{i\geqslant 0} \eta_i u_i$ avec $\eta_i = 0, 1$ possède un équivalent modulo 1 dans J (distinguer selon que l'entier le plus proche de u_i est à droite ou à gauche de u_i). Pour tous les (η_i) et pour tout m, les termes e à droite du premier signe = dans (26) sont (modulo 1) dans le même segment de longueur $\sum_{i\geqslant 0}((\lambda\theta^i))$, alors que le deuxième terme r est entre 0 et $\lambda\xi/(1-\xi) = \lambda/(\theta-1)$. Salem donne ainsi une condition —notée (1) dans son article— qui entraîne la propriété (H_*) pour F_ξ donc aussi pour E_ξ, à savoir

$$[(1)]_s \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} ((\lambda\theta^m)) + \frac{\lambda}{\theta - 1} < 1.$$

Cette condition implique avec $t_k = \lambda\theta^k$, $k \geqslant 0$, que les $t_k F_\xi$ évitent (mod 1) un intervalle non trivial dans $[0, 1]$. Comme c_m est entier d'après (25) et que $\mu_1 = \lambda$, $\alpha_1 = \theta$, on a $((\lambda\theta^m)) = ((\sum_{j=2}^n \mu_j \alpha_j^m)) \leqslant \sum_{j=2}^n |\mu_j|\,|\alpha_j|^m$ et la condition $[(1)]_s$ est impliquée par

$$(27) \qquad \sum_{j=2}^{n} \frac{|\mu_j|}{1 - |\alpha_j|} + \frac{\lambda}{\theta - 1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|\mu_j|}{|1 - |\alpha_j||} < 1.$$

On veut rendre les $|\mu_j| = |T(\alpha_j)|/|P'(\alpha_j)|$ petits, par exemple $|\mu_j|/|1 - |\alpha_j|| \leqslant v/n$, avec $v < 1$ et pour chaque $j = 1, \ldots, n$, ce qui entraînera (27). Cela demande de bien choisir les coefficients entiers b_i de T (ou de R) ; on cherche en effet des solutions *entières* $b_0, \ldots, b_{n-1}$ non toutes nulles pour le système de n inéquations

$$|T(\alpha_j)| = |b_{n-1} + \alpha_j b_{n-2} + \cdots + \alpha_j^{n-1} b_0| \leqslant (v/n)|1 - |\alpha_j||\,|P'(\alpha_j)|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Salem invoque alors le théorème de Hermann Minkowski sur l'existence de solutions entières : il existe une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nulle pour un système d'inéquations linéaires $|\ell_j(\mathbf{x})| \leqslant v_j$, $j = 1, \ldots, n$, si le module du déterminant du système des formes linéaires $(\ell_j)_{j=1}^n$ est $\leqslant \prod_{j=1}^n v_j$ (et si les «conditions complexes» se groupent par paires conjuguées avec la même borne v_j). Salem écrit une condition qui implique (27) puis $[(1)]_s$ et l'utilise pour régler le cas des nombres de Pisot quadratiques. La même année 1948, il donne des conférences à Paris, que Kahane, élève à l'École normale, a pu suivre.

4.3. Unicité et nombres de Pisot, finale. — En 1954, Piatetski-Shapiro va confirmer partiellement la réciproque (**B**) anticipée par Salem, dans un article qui est reviewé par Zygmund (MR#67226), encore lui. Piatetski-Shapiro a obtenu ce résultat au début de sa carrière, au contact de Bary à Moscou [**Piat**]. Il ajoute deux éléments : d'une part, la généralisation d-dimensionnelle $(H^{(d)})$ de la propriété (H) pour un ensemble E, dont il montre qu'elle entraîne, comme (H), que l'ensemble E en question est d'unicité ; d'autre part, il prouve que E_ξ est d'unicité quand $\theta = 1/\xi$ est un nombre de Pisot de degré n vérifiant la condition supplémentaire $\theta > 2^n$. Cependant, il ne se sert pas de $(H^{(d)})$ pour montrer cette propriété de E_ξ, il utilise la variante élémentaire (H_*) et suit les pistes tracées par Salem en 1948 (et 1943) : il se sert de la même fraction rationnelle R/Q, mais il impose aux coefficients μ_j une restriction plus forte. Il introduit une condition —notée (26) dans [**Piat**, version anglaise des *Selected Works*]— qui est analogue à la condition $[(1)]_s$ de Salem,

$$[(26)] \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} ((\gamma\theta^m)) + \frac{|\gamma|}{\theta^N(\theta - 1)} < \frac{1}{2^N},$$

où N est assez grand, et il se sert lui aussi de Minkowski. Nous pouvons supposer $\gamma > 0$, et nous traduirons [(26)] dans nos notations ($\gamma = \lambda > 0$, $N = \ell$ et $v < 1$),

$$\sum_{m=0}^{+\infty} ((\lambda\theta^m)) + \frac{\lambda}{\theta^\ell(\theta-1)} \leqslant \frac{v}{2^\ell} < \frac{1}{2^\ell}. \tag{28}$$

Piatetski-Shapiro utilise les mêmes multiples $t_k = \lambda\theta^k$ et ajoute une idée «entropique» : les points de $t_k E_\xi$ (mod 1) vont tomber dans 2^ℓ «boîtes», qui, grâce à la condition précédente, seront assez petites pour ne pas remplir l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il reprend à cet effet l'ensemble $F_\xi \subset [0,1]$ et le découpage de Salem-1943 en trois parties (24), en redécoupant en deux le terme r de (26). Nous fixons m pour l'instant,

$$r = s + r_1 := \lambda(\eta_m\xi + \cdots + \eta_{m+\ell-1}\xi^\ell) + \lambda(\eta_{m+\ell}\xi^{\ell+1} + \eta_{m+\ell+1}\xi^{\ell+2} + \cdots).$$

Le reste $r_1 \geqslant 0$ est plus petit que chez Salem-1948, $r_1 \leqslant \lambda\xi^{\ell+1}/(1-\xi) = \lambda/(\theta^\ell(\theta-1))$, et comme chez Salem-1943, s peut prendre 2^ℓ valeurs s_β. En rappelant (26), on écrit $\lambda\theta^m y = e + s + r_1$, où e (mod 1) tombe dans un segment de longueur $\leqslant \sum_{i\geqslant 0}((\lambda\theta^i))$. D'après (28), pour tous les points $y \in F_\xi$ tels qu'on ait $s = s_\beta$ (mod 1), le point $t_m y = \lambda\theta^m y$ va se loger (mod 1) dans une boîte B_β de taille $\leqslant v2^{-\ell}$, $v < 1$. En unissant les 2^ℓ boîtes, il restera dans $[0,1]$ un intervalle I_m (mod 1) dont la taille sera $\geqslant (1-v)2^{-\ell}$, et libre de points $t_m y$, pour tout $m \geqslant 0$ et tout $y \in F_\xi$. On aura alors la propriété (H_*) pour F_ξ et pour E_ξ.

C'est pour prouver (28) à l'aide du théorème de Minkowski que Piatetski-Shapiro a besoin de $\theta > 2^n$. En effet, on demande ici $|T(\alpha_j)| \leqslant (v2^{-\ell}/n)(1-|\alpha_j|)|P'(\alpha_j)|$ pour $j > 1$ et $|T(\theta)| \leqslant (v2^{-\ell}\theta^\ell/n)(\theta-1)|P'(\theta)|$ pour $j = 1$, quand $\alpha_1 = \theta$ et $\mu_1 = \lambda$. La condition de Minkowski est maintenant de la forme $\kappa \leqslant v^n(2^{-\ell})^n\theta^\ell/n^n$, c'est-à-dire $\kappa n^n < (\theta/2^n)^\ell$, où κ ne dépend que des racines du polynôme P de (23). Le fait que $\theta > 2^n$ entraîne que la condition de Minkowski est vraie pour ℓ grand.

Salem et Zygmund obtiennent la solution définitive l'année suivante, en 1955. Ils se servent de la propriété $(H^{(d)})$ que Piatetski-Shapiro a introduite mais n'a pas utilisée pour traiter E_ξ ! Cette propriété permet de travailler dans $\mathbb{R}^d$, et on prendra $d = n$, le degré de θ. Comme quand $d = 1$, on peut remplacer $(H^{(d)})$, définie avec des vecteurs entiers dans $\mathbb{Z}^d$, par une variante $(H_*^{(d)})$ avec des vecteurs dans $\mathbb{R}^d$ [**Zygm**, XII (11·19)] : la suite (t_k) réelle tendant vers l'infini est remplacée par une suite de vecteurs $(T_k) \subset \mathbb{R}^d$ appelée *normale* par Piatetski-Shapiro [**Piat**], une façon spéciale de tendre vers l'infini dans $\mathbb{R}^d$: la suite (T_k) est normale si les produits scalaires $\mathbf{b} \cdot T_k$ tendent vers l'infini avec k pour tout vecteur *entier* non nul $\mathbf{b}$ dans $\mathbb{Z}^d$. Pour x réel, on considère alors modulo 1 le point xT_k de $\mathbb{R}^d$, notons le $\{xT_k\} \in [0,1)^d$: on a la propriété $(H_*^{(d)})$ pour $E \subset [0,1]$ si les ensembles $\{ET_k\} = \{\{xT_k\} : x \in E\}$, où $k \geqslant 0$, laissent dans le cube $[0,1]^d$ un espace libre contenant un petit cube de volume minoré ; la propriété $(H^{(d)})$ —ou $(H_*^{(d)})$— d'un ensemble E implique la propriété (U) [**Piat**].

Ce qui change, c'est qu'un cube de côté $1/2$ dans $[0,1]^n$ ($d = n$) est *beaucoup plus petit* en mesure qu'un segment de longueur $1/2$: sa mesure est $\leqslant 2^{-n}$, et c'est le facteur 2^n qui va servir à effacer la condition $\theta > 2^n$ dont on avait besoin avant, la remplaçant par $\theta > 2$ qui est automatique, puisqu'on doit avoir $1/\theta = \xi < 1/2$ pour construire E_ξ. Les mesures des 2^ℓ boîtes de (28) deviennent plus petites dans $[0,1]^n$, un $\epsilon > 0$ devient ϵ^n, on va pouvoir adoucir la condition (28), qui se transforme en

$$\sum_{m=0}^{+\infty} ((\lambda\theta^m)) + \frac{\lambda}{\theta^\ell(\theta-1)} \leqslant \frac{v}{2^{\ell/n}} < \frac{1}{2^{\ell/n}}.$$

On appliquera le théorème de Minkowski comme avant, avec les nouvelles bornes ci-dessus. On prend $T_k = \lambda(\theta^k, \ldots, \theta^{k+n-1})$, $k \geqslant 1$. Chaque coordonnée de λT_m est traitée comme on traitait $\lambda\theta^m$. La normalité vient de ce que θ n'est racine d'aucune équation entière de degré $< n$: si $\mathbf{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ est un point non nul à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, le produit scalaire $\mathbf{b} \cdot T_k = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda\theta^{k+i} = \lambda\theta^k \sum_{i=0}^{n-1} b_i\theta^i$ tend vers l'infini avec k parce que $\sum_{i=0}^{n-1} b_i\theta^i$ est non nul et $\theta > 1$.

On voit donc que pour prouver la propriété (U) de E_ξ, Salem et Zygmund ont exploité à merveille la définition $(H^{(n)})$ inventée par Piatetski-Shapiro [**Piat**]. Tout ce contenu sera repris dans le livre de Salem [**SalA**, ch. VI], puis dans *EPST*, sec. VI.7. Dans *SFEO*, sec. 6.4, p. 110, Kahane attribue le résultat aux seuls Salem et Zygmund,

> « Le théorème, conjecturé par Salem, fut établi par Salem et Zygmund (1955) [...]. Le théorème de Salem et Zygmund est l'une des perles de la théorie des ensembles U. »

Comment évaluer la part qui revient à Piatetski-Shapiro dans ce résultat ? Les contributions de Salem, Piatetski-Shapiro puis Salem–Zygmund sont totalement imbriquées. Salem et Zygmund [**SalW**, p. 590] indiquent que Piatetski-Shapiro a prouvé le résultat pour $\theta > 2^n$ (et le nom de Piatetski-Shapiro figure dans le titre), mais cette précision est absente des commentaires de Zygmund [**Zygm**, Notes pour XII, § 11]. À l'inverse, certains attribuent « le théorème » à Piatetski-Shapiro ; dans les attendus du Prix Wolf qu'il a reçu en 1990, on lit : "*Among his main achievements are : the solution of Salem's problem about the uniqueness of the expansion of a function into a trigonometric series,* [...]". Bary, qui cite volontiers Piatetski-Shapiro, et après avoir rappelé le rôle de ce dernier, énonce cependant « THE ZYGMUND AND SALEM THEOREM » [**BarT**, XIV.20, p. 396].

Des auteurs importants ont prolongé les recherches sur le rôle des nombres de Pisot en analyse harmonique, en particulier Yves Meyer. Étant donnée l'importance des résultats, son ouvrage [**Meye**] de 1973 a été réédité en 2017. Il y a écrit une Postface où il douche sévèrement nos enthousiasmes pour les sujets développés ici :

> « Le problème de la synthèse spectrale qui semblait si important il y a un demi-siècle ne l'est plus aujourd'hui. Le dernier chapitre de ce livre [*son livre, et le chapitre consacré aux nombres de Pisot*] n'a donc pas laissé de trace. »

4.4. Salem et Kahane. — Kahane et Salem ont travaillé ensemble après que Salem est revenu en France en 1955. Leur livre *EPST*, publié en 1963, contient des recherches effectuées par Salem dès 1941, ainsi que des travaux communs, et aussi le théorème de Salem et Zygmund discuté plus haut. Ils ont par ailleurs introduit une terminologie pour certaines distributions périodiques : les *pseudomesures* et les *pseudofonctions*. Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{T}$, ses coefficients de Fourier–Stieltjes $\widehat{\mu}(n)$ sont bornés : ils ont proposé [**SalW**, p. 602] le terme pseudomesure pour les distributions 2π-périodiques $T \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathbf{e}_n$ dont les coefficients (c_n) sont bornés. Le *support* d'une pseudomesure est son support en tant que distribution.

D'un autre côté, Riemann et Lebesgue nous disent que les coefficients de Fourier d'une fonction intégrable f tendent vers 0. Kahane et Salem proposent le nom de pseudofonction pour les pseudomesures dont les coefficients de Fourier tendent vers 0. Les pseudofonctions nous ramènent à la *théorie de Riemann* (théorème (R), sec. 2.2) : la série de Fourier d'une pseudofonction S converge vers 0 en dehors du support de S, et si une série trigonométrique converge vers 0 sur un intervalle ouvert non vide I, elle représente une pseudofonction S dont le support est disjoint de I [**KSal**, V.3, V.4].

Nous citerons un seul résultat de Kahane et Salem : ils ont construit en 1956 un ensemble parfait E qui ne porte pas de vraie pseudomesure, c'est-à-dire que toute pseudomesure portée par E est en fait une *mesure* complexe [**SalW**, p. 602]. Ce résultat prendra une signification particulière plus loin, dans le cadre du problème de synthèse spectrale.

Kahane était-il déjà féru d'histoire des mathématiques à cette époque ? Salem parle en général de fonctions « du type de Cantor ». Cependant, dans une note de bas de page que je trouve un peu étrange, Salem a écrit : “The first function of this type seems to have been constructed by Lebesgue. The name of functions of the Cantor-type is, after Wiener and Wintner [...] adopted here” [**SalW**, p. 239]. Zygmund accepte un compromis et parle le plus souvent de fonctions de Cantor–Lebesgue. Dans le livre de Kahane et Salem, on aura carrément les « fonctions de Lebesgue » !

5. Séries de Fourier absolument convergentes

Les espaces de suites scalaires c_0, ℓ^1, ℓ^∞ sont « les plus bêtes des Banach », ce sont les premiers exemples qu'on peut donner à des étudiants, juste après avoir dit *normé et complet* ; ce sont aussi les premiers qui permettent d'illustrer *l'identification* de certains duaux d'espaces de Banach. Ainsi, le dual de l'espace c_0 des suites qui tendent vers 0 « est » l'espace des suites sommables ℓ^1. Mais si l'ensemble d'indice est $\mathbb{Z}$ et si on considère ces suites numériques comme coefficients de Fourier complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{T}$, ou de distributions périodiques, un autre monde apparaît.

5.1. L'algèbre de Wiener. — Si $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite scalaire dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, on peut poser pour tout x réel

$$f(x) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}, \quad \widehat{f}(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{Z}\,;$$

on a ainsi une fonction f continue, 2π-périodique dont la série de Fourier est absolument convergente. L'ensemble de ces fonctions f est noté $A(\mathbb{T})$; son étude est, à l'évidence au vu du titre du livre, le thème principal de *SFAC*. L'existence, élémentaire à justifier, de la convolution de deux suites $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de $\ell^1(\mathbb{Z})$, définie par

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \bigl(\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k\bigr)_{n\in\mathbb{Z}} \ \text{ et vérifiant } \ \|\mathbf{a} * \mathbf{b}\|_{\ell^1} \leqslant \|\mathbf{a}\|_{\ell^1} \|\mathbf{b}\|_{\ell^1},$$

montre que le produit ponctuel fg de deux fonctions de $A(\mathbb{T})$ est encore dans $A(\mathbb{T})$. L'espace $A(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach, c'est *l'algèbre de Wiener*, munie de la norme

$$\|f\|_A = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \ \text{ pour laquelle } \ \|fg\|_A \leqslant \|f\|_A \|g\|_A.$$

Les éléments de l'espace $\mathrm{Lip}(\frac{1}{2}+\varepsilon)$, fonctions vérifiant une condition de Hölder d'ordre $1/2 + \varepsilon$, sont dans $A(\mathbb{T})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Serge Bernstein a démontré en 1934 un résultat plus précis et définitif sur les modules de continuité qui impliquent l'appartenance à $A(\mathbb{T})$ (CRAS 199, p. 399 ; le résultat est exposé dans *SFAC*, II.6).

Le dual de ℓ^1 « est » ℓ^∞, le dual de $A(\mathbb{T}) \simeq \ell^1(\mathbb{Z})$ est donc l'ensemble des distributions $h(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, où les c_n sont bornés : c'est l'espace PM des pseudomesures de Kahane et Salem, muni de la norme ℓ^∞ des coefficients de Fourier,

$$\|h\|_{PM} = \sup\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(n)|.$$

On écrira la dualité entre PM et $A(\mathbb{T})$ d'une façon qui n'est pas usuelle pour la paire en dualité (ℓ^∞, ℓ^1), mais qui permet de retrouver la définition habituelle pour des fonctions, quand $h \in PM$ est en fait « donnée » par une fonction intégrable, à savoir

$$(h, f) = \int_{\mathbb{T}} h(x) f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(n) \widehat{f}(-n), \quad f \in A(\mathbb{T}). \tag{29}$$

5.2. Composition, ou calcul fonctionnel. — Le théorème de Wiener–Lévy est un outil précieux pour l'étude de $A(\mathbb{T})$: Wiener a montré que si $f \in A(\mathbb{T})$ ne s'annule jamais sur le cercle, alors $x \mapsto 1/f(x)$ est aussi dans $A(\mathbb{T})$. Plus généralement, Lévy [**Lévy**] a montré que pour toute fonction F analytique au voisinage de l'image de f, la composition $F(f) = F \circ f$ reste dans $A(\mathbb{T})$. C'est clair si $\|f\|_A < R$, où R est le rayon de convergence de la série de Taylor de F en 0, et on s'y ramène en deux étapes [**KaAC**, II.4, V.2] : une fonction localement dans $A(\mathbb{T})$ est dans $A(\mathbb{T})$, on le voit avec une partition de l'unité en fonctions de l'algèbre $A(\mathbb{T})$, par exemple des « fonctions triangle ». Ensuite, on montre que $F(f)$ est localement dans $A(\mathbb{T})$: c'est plus de travail.

Dans son introduction [**KaAC**], Kahane mentionne deux problèmes de composition suggérés par le théorème de Lévy : quelles sont les fonctions F telles que $F(f)$ reste dans $A(\mathbb{T})$ pour toute f dans $A(\mathbb{T})$? Deuxièmement, quelles sont les fonctions φ

de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ pour lesquelles on a $f(\varphi) \in A(\mathbb{T})$ pour toute f de $A(\mathbb{T})$, autrement dit, quels sont les *changements de variable* φ qui préservent $A(\mathbb{T})$?

Kahane a travaillé sur le premier problème, qui suscite une activité intense en 1958 : Katznelson [**Katz**] prouve la réciproque du théorème de Lévy pour $A(\mathbb{T})$, Kahane–Helson [**KaSW**, p. 53] et Kahane–Rudin [**KaSW**, p. 56] apportent des compléments, les quatre ensemble écrivent un gros article dans *Acta Math.* [**KaSW**, p. 94] s'appliquant à des groupes plus généraux. Les quatre auteurs s'étaient trouvés à Montpellier en 1958 à l'occasion d'un «microcolloque improvisé» [**KaDA**].

La réciproque du théorème de Lévy, obtenue par Katznelson, dit que *seules les fonctions analytiques F opèrent sur* $A(\mathbb{T})$. D'après Katznelson lui-même et selon Kahane dans sa Notice [**KaNT**], Katznelson s'est appuyé sur des résultats préliminaires de Kahane [**KaSW**, p. 50], notamment sur l'égalité [**KLem**, 10.4]

$$\sup_{f \in A_r, \|f\|_A \leqslant t} \| \mathrm{e}^{\mathrm{i} f} \|_A = \mathrm{e}^t, \quad t \geqslant 0,$$

où A_r désigne l'ensemble des fonctions de $A(\mathbb{T})$ à valeurs réelles. Les théorèmes de composition forment une des deux parties de l'appendice, rédigé par Kahane et Malliavin, à la traduction française du livre de Gelfand–Raikov–Shilov.

L'autre question est celle des changements de variable. Si φ est un changement de variable admissible pour $A(\mathbb{T})$, on trouve d'abord, par le théorème du graphe fermé, une constante C telle que $\|f \circ \varphi\|_A \leqslant C\|f\|_A$ pour toute $f \in A(\mathbb{T})$; étant donnée la «nature ℓ^1» de la boule unité de $A(\mathbb{T})$, il suffit de s'intéresser aux fonctions $f = \mathbf{e}_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, lorsque $\mathbf{e}_n \circ \varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\varphi}$. Beurling et Henry Helson [**BeHe**] ont montré que les seules fonctions φ continues de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ telles que $\mathrm{e}^{\mathrm{i} n\varphi}$ reste bornée dans $A(\mathbb{T})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ sont de la forme $\varphi(t) = kt + b$ avec k entier et $b \in \mathbb{R}$. Plus tard, en 1982, Kahane [**KaSW**, p. 447] en donnera une preuve rapide. Ce thème fait l'objet de la section 4 de son exposé à Stockholm [**KaTF**], *Les changements de variable permis et les homomorphismes* ; Kahane indique que Beurling et Helson ont travaillé avec $A(\mathbb{R})$, ils ont obtenu dans ce cas $\varphi(t) = at + b$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$; à la fin de leur article se trouve une généralisation à d'autres groupes, dont $\mathbb{Z}$.

Pour la preuve rapide dans le cas de $A(\mathbb{T})$, Kahane [**KaSW**, p. 447] tire un lapin de son chapeau ; dans notre présentation du «tour», l'effet de surprise sera gâché par la nécessité de rappeler ici certaines notions et résultats, rappels que nous pourrions omettre —que le lecteur ne se sente pas offensé— devant de vrais experts.

Si φ est continue de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ et si $\| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \|_A \leqslant C$, on développe $f := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, de module un, comme $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathbf{e}_k$; on a $1 = \|f\|_{L^2}^2 = \sum |c_k|^2$, par hypothèse $\sum |c_k| \leqslant C$ et il en résulte —comme en (14) ou (15)— que $\sum |c_k|^4 \geqslant C^{-2}$. Les $|c_k|^2$ sont les coefficients de Fourier de $f * f^*$, où $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, donc $\int_\mathbb{T} |f * f^*|^2 \,\mathrm{d}m = \sum |c_k|^4 \geqslant C^{-2}$. Par conséquent, si φ est telle que les $f_n := f^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i} n\varphi}$ soient bornées par C dans $A(\mathbb{T})$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on obtient en posant $I_n := \int_\mathbb{T} |f_n * f_n^*|^2 \,\mathrm{d}m$ l'inégalité

$$I_n = \int_{\mathbb{T}^3} \exp\bigl(\mathrm{i} n\bigl[\varphi(x-s) - \varphi(-s) - \varphi(x-t) + \varphi(-t)\bigr]\bigr) \,\mathrm{d}m(x) \,\mathrm{d}m(s) \,\mathrm{d}m(t) \geqslant C^{-2}.$$

Posons $\psi(x,s,t) := \varphi(x-s) - \varphi(-s) - \varphi(x-t) + \varphi(-t)$, fonction de $\mathbb{T}^3$ dans $\mathbb{T}$, et posons $g := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$; on peut écrire $I_n = \int_{\mathbb{T}^3} g^n \,\mathrm{d}m^{\otimes 3}$ et si on pose $L_N = N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} g^n$ pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^3} L_N \,\mathrm{d}m^{\otimes 3} = N^{-1}\sum_{n=0}^{N-1} I_n \geqslant C^{-2}. \tag{30}$$

L'espace $A(\mathbb{T}^3)$ est formé des fonctions sur $\mathbb{T}^3$ dont les coefficients dans la base des fonctions exponentielles $\mathbf{e}_{m,n,p}(x,s,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(mx+ns+pt)}$, $m,n,p \in \mathbb{Z}$, sont dans $\ell^1(\mathbb{Z}^3)$; c'est une algèbre de Banach pour le produit ponctuel et pour la norme $\ell^1(\mathbb{Z}^3)$ des coefficients. Si $h \in A(\mathbb{T})$, la fonction $\widetilde{h}(x,s,t) = h(x-s)$ est dans $A(\mathbb{T}^3)$ et y a la même norme que h dans $A(\mathbb{T})$. Ainsi, les puissances g^n sont bornées par C^4 dans $A(\mathbb{T}^3)$, parce que $g^n(x,s,t) = f^n(x-s)\overline{f^n(-s)}\,\overline{f^n(x-t)}f^n(-t)$ et d'après l'hypothèse sur les fonctions $f^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$. La suite $(L_N)_{N\geqslant 1}$ est donc bornée dans $A(\mathbb{T}^3)$, et bornée aussi ponctuellement sur $\mathbb{T}^3$ (par 1).

On a $L_N = 1$ sur $K = \{g = 1\}$, et en dehors $NL_N = (g^N - 1)/(g-1)$ avec $|g| = 1$, donc L_N tend simplement vers l'indicatrice $\mathbf{1}_K$ de K quand $N \to \infty$. Par convergence dominée, on déduit de (30) que $\int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{1}_K \,\mathrm{d}m^{\otimes 3} \geqslant C^{-2}$, et comme L_N est borné dans $A(\mathbb{T}^3)$, on voit que la limite simple $\mathbf{1}_K$ est dans $A(\mathbb{T}^3)$, donc continue. Il en résulte que K, fermé, est aussi ouvert et non vide, $K = \mathbb{T}^3$ par connexité et par conséquent $g = 1$. On a $\sum |c_k|^4 = \int_{\mathbb{T}} |f * f^*|^2 \,\mathrm{d}m = I_1 = \int_{\mathbb{T}^3} g \,\mathrm{d}m^{\otimes 3} = 1 = \sum |c_k|^2$. Il n'y a donc qu'un seul coefficient c_{m_0} non nul dans le développement de $f = \sum c_k \mathbf{e}_k$, donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = u\mathbf{e}_{m_0}$, $|u| = 1$, et $\varphi(t) = m_0 t + b$ pour $t \in \mathbb{T}$. Cette preuve revient dans *SFEO*, sec. 10.7.

5.3. Synthèses spectrales. — Dans *SFEO*, sec. 10.1, Kahane déclare que ce thème spectral, à base de translations et convolutions, nous vient de Norbert Wiener [**Wien**], c'est selon lui « l'héritage de Wiener ». La thèse de Kahane parle des fonctions moyenne-périodiques de Jean Delsarte ; c'est Bernard Malgrange, de deux ans son cadet (il passe sa thèse avec Schwartz en 1955), qui l'indique à Kahane [**KaDA**] : ce que Kahane est en train d'étudier pour sa thèse est en rapport avec ces fonctions.

Delsarte appelle *moyenne-périodiques* les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$ qui vérifient une équation de convolution $f * \mu = 0$, où μ est une mesure réelle ou complexe, non nulle et à support compact (si f est 2π-périodique, on prend simplement $\mu = \delta_{2\pi} - \delta_0$). Schwartz développe la notion dans un long article de 1947 [**SchT**]. Il y propose une autre façon de voir : si f vérifie cette équation de convolution, le sous-espace vectoriel fermé $\tau(f)$ engendré par les translatées de f dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ n'est pas égal à l'espace $\mathcal{C}$ tout entier, puisqu'on a encore $h * \mu = 0$ pour toute $h \in \tau(f)$. Schwartz généralise ce point de vue à d'autres espaces vectoriels topologiques $\mathcal{E}$ (*evt*, en abrégé), quand ils sont de plus des espaces de fonctions sur un groupe, invariants par translation, sur $\mathbb{R}$ par exemple : partant de $f \in \mathcal{E}$, on considère le sous-espace $\tau(f)$ invariant par translation et fermé dans $\mathcal{E}$ qui est engendré par f. La question des fonctions moyenne-périodiques, ainsi posée — a-t-on

$\tau(f) \neq \mathcal{E}$? [**SchT**, p. 859]— dépend de l'espace ambiant $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = L^2(\mathbb{R})$, l'étude est facile en utilisant la transformation de Fourier [**SchT**, p. 869].

Si $\mathcal{E}$ est localement convexe, dire que $\tau(f)$ est différent de $\mathcal{E}$ équivaut par le théorème de Hahn–Banach à dire qu'il existe une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}$, non nulle et qui est nulle sur $\tau(f)$. Quand $\mathcal{E}$ est l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$, on le munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact qui en fait un espace de Fréchet localement convexe : si $f \in \mathcal{C}$ et si $\tau(f)$ n'est pas égal à $\mathcal{C}$, il existe grâce à l'identification du dual de $\mathcal{C}$ une mesure ν non nulle, à support compact sur $\mathbb{R}$, qui annule toutes les translatées de f. Cela signifie que $f * \mu = 0$, si on pose $\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{d}\nu(-x)$: on a retrouvé la définition de Delsarte.

Le cas moyenne-périodique le plus extrême pour une fonction g non nulle se produit quand $\dim \tau(g) = 1$. Alors, $g(x) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$, $c \neq 0$, et les valeurs possibles pour λ dépendent du contexte $\mathcal{E}$. Il n'y a aucune valeur possible si $\mathcal{E} = L^2(\mathbb{R})$; dans un contexte de fonctions bornées, seules les valeurs λ *réelles* sont possibles. Un bon exemple plus général de «fonction simple» quand $\mathcal{E} = \mathcal{C}$ est fourni par $g(x) = x^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$, $n \geqslant 0$, que Schwartz appelle *exponentielle-monôme*, dont les combinaisons linéaires de translatées font apparaître (seulement) les exponentielles-polynômes $P(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ pour lesquelles $\deg P \leqslant n$, ce qui donne un espace fermé $\tau(g)$ de dimension $n+1$, évidemment distinct de $\mathcal{C}$.

Si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ est dans $\tau(f)$, on dit que λ est dans le *spectre* Λ *de* f ; si $g(x) = x^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ est dans $\tau(f)$ et si $n \geqslant 0$ est maximal pour cette valeur λ, on dit que λ est un élément de multiplicité $n+1 = \dim \tau(g)$ dans le spectre de f. La question de la synthèse spectrale est de savoir si le spectre de f, considéré avec les possibles multiplicités, permet de reconstruire f. Schwartz [**SchT**] montre le *théorème de synthèse spectrale* suivant :

si $f \in \mathcal{C}$ est moyenne-périodique, elle appartient au sous-espace vectoriel fermé engendré dans $\mathcal{C}$ par les exponentielles-monômes contenues dans $\tau(f)$.

Schwartz découvre par ailleurs un contre-exemple assez simple à la synthèse spectrale lorsque $\mathcal{E} = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $n \geqslant 3$, laissant le cas $n = 1, 2$ ouvert (voir *SFEO*, 10.5). Plus précisément, l'espace vectoriel topologique $\mathcal{E}$ est ici L^∞ muni de la *topologie $*$-faible*, la topologie faible de dual de L^1 ; la synthèse est clairement impossible en général dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme : l'adhérence en norme L^∞ d'une famille d'exponentielles-polynômes, formée uniquement de fonctions continues, ne saurait retrouver une fonction initiale $f \in L^\infty$ discontinue. Le problème analogue est facile dans $L^\infty(\mathbb{T})$ ($*$-faible, toujours) : le calcul des coefficients de Fourier de $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ donne le spectre Λ de f, ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\widehat{f}(n) \neq 0$, la série de Fourier de f et ses sommes de Fejér (par exemple) fournissent la *synthèse spectrale*.

Denjoy préside le jury de thèse de Kahane ; Schwartz, membre du jury, propose la théorie des algèbres de Gelfand comme «seconde thèse» [**KaDA**]. Les résultats du début de la thèse [**KaPU**] ont été exposés au séminaire Bourbaki par Malgrange, exp. 97 en mai 1954. Dans un article en 1957 [**KaSW**, p. 28], Kahane ajoute une étude des fonctions moyenne-périodiques *bornées* sur $\mathbb{R}$. Ces derniers travaux et ceux de la thèse ont fait l'objet de "Lecture Notes" issues d'une série de conférences au Tata Institute à Bombay en 1957 ; cette monographie comprend 24 leçons et 152 pages [**KaMP**].

Dans les années 1970, Kahane a envoyé à Nikolski à Léningrad une copie de ce livre auparavant indisponible en URSS. Sur la base de la présentation de Kahane et des articles de Schwartz, Nikolski a fait un cours de Master qui a contribué à la formation de futurs analystes distingués, parmi lesquels Alexander Borichev, Nazarov, Sergeï Treil, Evsei Dyn'kin. Sur ce thème «spectral», une série de recherches s'en est suivie ; l'école de Havin a gardé un lien privilégié avec Kahane.

Kahane [**KaMP**] travaille avec une version de la transformée de Carleman, qu'on peut considérer comme un substitut à la transformée de Fourier. Il découpe une fonction moyenne-périodique f sur $\mathbb{R}$ en $f = f_{\mathrm{g}} + f_{\mathrm{d}}$, f_{g} nulle sur $\mathbb{R}_+$ et f_{d} nulle sur $\mathbb{R}_-$. Si μ est une mesure à support compact, on considère les convolées $g = f_{\mathrm{g}} * \mu$ et $f_{\mathrm{d}} * \mu$, dont la somme est nulle quand $f * \mu = 0$; si de plus le support de μ est dans un segment $[a, b]$, alors g est nulle hors de $[a, b]$. Les transformées de Fourier complexes $M(z)$ et $G(z)$ de μ et g sont entières de type exponentiel. Kahane associe à f la transformée de type Carleman $F(z) = G(z)/M(z)$, méromorphe sur $\mathbb{C}$; elle ne dépend pas de la mesure μ telle que $f * \mu = 0$. Le spectre défini précédemment pour la fonction f correspond aux pôles de F, comptés avec leur multiplicité. Le théorème de synthèse de Schwartz est démontré plus simplement par Kahane en se ramenant à prouver que si le spectre Λ de f est vide, alors $f = 0$. La question est traitée (Lec. 5) en développant la fonction entière M en produit infini, sous la forme donnée par Jacques Hadamard pour les fonctions de type exponentiel [**HadP**].

La *moyenne-période* de f est la borne inférieure des longueurs des segments I portant une mesure μ telle que $f * \mu = 0$. C'est aussi la longueur L où se fait la transition de $\mathcal{C}_\Lambda(I) = \mathcal{C}(I)$ (quand $|I| < L$) à $\mathcal{C}_\Lambda(I) \neq \mathcal{C}(I)$ (quand $|I| > L$) ; ici $\mathcal{C}_\Lambda(I)$ est le sous-espace fermé engendré dans $\mathcal{C}(I)$ par les exponentielles-polynômes du spectre Λ. Par l'intermédiaire de la fonction entière M et du théorème de Paley–Wiener, la moyenne-période est liée au *type* des fonctions entières nulles sur Λ et bornées sur $\mathbb{R}$; elle se relie également à la *densité de* Λ dont il existe plusieurs variantes de définition, les plus élémentaires faisant simplement intervenir le nombre $n(r)$ des éléments de Λ dans le disque de rayon r du plan complexe et le comportement de $n(r)/r$ pour r grand. Des chapitres très techniques traitent une foule de questions qu'on ne peut pas détailler ici : fonctions presque-périodiques de Bohr [**KaMP**, Lec. 7], transformation de Laplace–Borel (Lec. 9), comparaison des espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ de fonctions holomorphes, prolongement analytique des fonctions de $\mathcal{H}_\Lambda(\Omega)$ à des ouverts plus grands sous des conditions sur la position relative de Ω et Λ (Lec. 11–18), classes quasi-analytiques de fonctions (Lec. 19). Sur ce dernier sujet, Kahane revisite plusieurs résultats de Mandelbrojt.

Toute cette direction de recherche est excellemment résumée par Kahane lui-même dans sa Notice [**KaNT**] ; il y déclare aussi, en 1981 : « J'ai [...] abandonné après ma thèse la théorie générale des fonctions moyenne-périodiques ».

5.4. Synthèse dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. — Le problème de synthèse qui sera envisagé dans cette section entre dans le cadre général de la section précédente, si on remplace le groupe $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$. On considère une suite bornée $\mathbf{c} = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ —qui sera l'analogue d'une fonction f bornée sur $\mathbb{R}$—, ainsi que toutes ses translatées $\mathbf{c}^{(n)}$, où $n \in \mathbb{Z}$, définies par $\mathbf{c}^{(n)} = (c_{k-n})_{k\in\mathbb{Z}}$. La topologie $*$-faible sur ℓ^∞, qu'on note $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, est la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $b \mapsto (b, a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n a_{-n}$ sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, où a varie dans $\ell^1(\mathbb{Z})$. L'evt $\mathcal{E}$ qui est en jeu maintenant est donc $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ muni de la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$. Ce cas figure déjà chez Schwartz [**SchT**, p. 872] ainsi que la question posée ici [**SchT**, 4º p. 873].

Désignons par $\tau(\mathbf{c})$ le sous-espace $*$-faiblement fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ engendré par la famille des translatées $(\mathbf{c}^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}}$. Le spectre $\Lambda_{\mathbf{c}}$ de $\mathbf{c}$ est l'ensemble des α, nécessairement réels, tels que la suite $e(\alpha) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha})_{k\in\mathbb{Z}}$ soit dans $\tau(\mathbf{c})$, et $\Lambda_{\mathbf{c}}$ est un fermé de la droite ; on peut aussi le considérer comme un compact de $\mathbb{T}$, puisque $e(\alpha) = e(\alpha + 2\pi)$, ou du cercle unité $U \subset \mathbb{C}$ si on pense à $z_\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. L'ensemble $E_{\mathbf{c}}$ des $e(\alpha)$ pour $\alpha \in \Lambda_{\mathbf{c}}$ est $*$-faiblement compact dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$. Soit $N_{\mathbf{c}}$ l'ensemble des $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tels que $(e(\alpha), v) = 0$ pour tous les $e(\alpha) \in E_{\mathbf{c}}$; si pour chaque $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$ on pose $f_w(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{-k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, on a $f_w(\alpha) = (e(\alpha), w)$ —avec la convention de (29)— et on voit que w est dans l'ensemble $N_{\mathbf{c}}$ exactement quand la fonction f_w est nulle sur $\Lambda_{\mathbf{c}}$.

Le synthèse spectrale demande que l'espace $\tau(\mathbf{c})$ soit $*$-faiblement engendré par l'ensemble $E_{\mathbf{c}}$ des suites exponentielles $e(\alpha)$ qu'il contient. Dans ce cas un élément w de $N_{\mathbf{c}}$, orthogonal par définition aux suites $e(\alpha) \in \tau(\mathbf{c})$, annulera également $\tau(\mathbf{c})$ en entier, en particulier $\mathbf{c}$: autrement dit, si une fonction $f = f_w \in A(\mathbb{T})$ est nulle sur le spectre $\Lambda_{\mathbf{c}}$ de $\mathbf{c}$, elle devra être annulée par la pseudomesure

$$S_{\mathbf{c}} \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k}\mathbf{e}_k, \quad \text{c'est-à-dire qu'on aura} \quad (S_{\mathbf{c}}, f) = 0 \tag{31}$$

—on notera que $(S_{\mathbf{c}}, f_w) = (c, w)$—. On montre [**KSal**, IX.2] que le spectre $\Lambda_{\mathbf{c}}$ de $\mathbf{c}$ coïncide avec le support de la distribution périodique $S_{\mathbf{c}}$; dans la preuve on retrouve le point *iii*-(R) de Riemann.

Il est possible de tourner le problème de synthèse de diverses façons, la plus courante étant de fixer un compact E du cercle $\mathbb{T}$ et de demander si on a $(S, f) = 0$ pour toute pseudomesure S portée par E et toute $f \in A(\mathbb{T})$ nulle sur E ; on dit alors que E vérifie la synthèse. On peut aussi fixer une fonction f et dire que f satisfait la synthèse si $(S, f) = 0$ pour toute pseudomesure S portée par le fermé $E = \{f = 0\}$.

Dans ce paragraphe, $f \in A(\mathbb{T})$ sera nulle sur le fermé $E \subset \mathbb{T}$, qui contiendra le support de la pseudomesure S. Si S est une *vraie* mesure, il est clair que $(S, f) = 0$; si f a en fait un support *disjoint* de E, alors $(S, f) = 0$: par convolution avec une densité de probabilité, régulière et à petit support autour de 0, on approche f dans $A(\mathbb{T})$ par $f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, encore à support disjoint de E ; on a $(S, f_1) = 0$ et on fait tendre vers $(S, f) = 0$ par «convergence dominée» dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ (noter que $|\widehat{f}_1| \leqslant |\widehat{f}|$). Si f est de classe C^1, on l'approche dans $A(\mathbb{T})$ par g à support disjoint de E, par exemple en approchant convenablement f' dans $L^2(\mathbb{T})$, et on a encore $(S, f) = 0$. Si on cherche un contre-exemple, on veut d'après (31) que $(S, f) \neq 0$: la fonction f ne peut pas être trop régulière, son support ne peut pas être disjoint du support de S, et S ne peut pas être une «vraie» mesure.

Quelques résultats partiels sont connus en 1958. Kahane et Salem ont construit un parfait P tel que toutes les pseudomesures portées par P soient en fait des «vraies» mesures : pour cet ensemble P, la synthèse est donc vérifiée, trivialement. Carl Herz a donné un critère qui fournit des exemples d'ensembles vérifiant la synthèse spectrale, en particulier l'ensemble triadique de Cantor [**KaAC**, V.3]. Beurling et Harry Pollard ont montré que les fonctions de l'espace $\mathrm{Lip}(\frac{1}{2})$ sont de synthèse [**KaAC**, V.5], ce qui renforce la présomption d'irrégularité d'un contre-exemple.

5.5. Le contre-exemple de Malliavin. — En 1959, Malliavin construit un contre-exemple au problème de synthèse spectrale, qu'il appelle le *problème de Beurling–Gel'fand* dans son exposé à Stockholm [**MalR**]. Il publie d'abord aux CRAS du 23 mars un contre-exemple dans un cadre pseudo-périodique, puis le 13 avril dans le cadre de l'algèbre $A(\mathbb{T})$ et de $PM(\mathbb{T}) \simeq \ell^\infty(\mathbb{Z})$ [**MalS**]. Kahane publie le 25 mai, dans les CRAS aussi, une variante utilisant une construction aléatoire. Il la reprendra dans le livre avec Salem [**KSal**, IX.4], puis dans *SFAC*, sec. V.6, 7, 8, dans *SRSF* XIII.6, 7, et il reviendra souvent sur ces contre-exemples, encore dans *SFEO*, sec. 10.5.

Partant d'une fonction réelle $f \in A(\mathbb{T})$, Malliavin considère la fonction $g_u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}uf}$, pour toute valeur réelle u ; pour des raisons à expliquer ci-après, il veut pouvoir regarder

$$S(x) \sim \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}u) g_u(x) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}u)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}uf(x)} \,\mathrm{d}u \tag{32}$$

comme une pseudomesure. L'intégrale ne converge pas, mais on peut lui donner un sens comme distribution et plus précisément comme pseudomesure sur $\mathbb{T}$ si

$$\int_{\mathbb{R}} |u| \, \|g_u\|_{PM} \,\mathrm{d}u < +\infty. \tag{M}$$

On peut se faire une idée de la pseudomesure S en «l'approchant» dans PM au moyen d'un noyau d'approximation sur la droite réelle, une densité de probabilité K qu'on choisit ici à support dans $[-1, 1]$, et de classe C^2. Pour tout $\epsilon > 0$, on écrit

$$S_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\epsilon u)(\mathrm{i}u)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}uf(x)} \,\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{\epsilon^2} K'\Big(\frac{f(x)}{\epsilon}\Big).$$

Comme $t \mapsto \epsilon^{-2} K'(\epsilon^{-1} t)$ tend vers δ' au sens des distributions quand $\epsilon \to 0$, on peut considérer formellement S comme étant $2\pi\delta'(f)$. On voit que S_ϵ est nulle là où $|f(x)| > \epsilon$, la pseudomesure S est donc portée par $\{f = 0\}$, autrement dit, f est nulle sur le support de S. Si on arrive à trouver f vérifiant (M) de façon que $(S, f) \neq 0$, on aura le contre-exemple cherché — voir (31) —. C'est pour définir une telle fonction $f \in A(\mathbb{T})$ que Kahane emploie une méthode aléatoire, cherchant f sous la forme d'une série trigonométrique lacunaire aléatoire

$$f_\omega(x) = \textstyle\sum_{n\geqslant 1} \alpha^n \big(X_n(\omega)\cos(4^n x) + Y_n(\omega)\sin(4^n x)\big), \tag{33}$$

où les X_n, Y_n sont gaussiennes normales indépendantes, et $\alpha \in (0, 1)$ pas trop petit (d'après nos préliminaires, on ne doit pas en tout cas avoir $4\alpha < 1$, sinon f_ω serait de classe C^1 p.s. ; rappelons que la loi normale admet la densité $(2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$). Kahane montre que, presque sûrement, f_ω vérifie (M) et fournit un contre-exemple ; à la fin des Notes de Montréal [**KaFA**], il attribue «l'idée aléatoire» à Salem.

Après *EPST*, sec. IX.4 et les Notes de Montréal [**KaFA**, VI], Kahane reprend le même propos dans *SFAC*, ch. V. Il y présente également une version un peu différente, due à Malliavin aussi, et plus loin, une méthode de Nicholas Varopoulos utilisant les algèbres tensorielles. Précédemment, on a dû trouver $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant (M), et garantir de plus que $(S, f) \neq 0$, S étant définie par (32) ; dans la «version» de Malliavin, on va obtenir cette condition supplémentaire presque gratuitement. Si f est dans $A(\mathbb{T})$ et si (M) est vérifiée, on peut remplacer f par $f - a$ pour a réel quelconque compte tenu de l'égalité $\|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uf}\,\|_{PM} = \|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(f-a)}\,\|_{PM}$, obtenant ainsi une famille de pseudomesures

$$S_a \sim \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(f-a)}\,\mathrm{d}u.$$

D'autre part, la fonction $\Psi(u) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}uf(x)}\,\mathrm{d}m(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après (M) puisque $|\Psi(u)| = |\int_{\mathbb{T}} g_u\,\mathrm{d}m| = |\widehat{g}_u(0)| \leqslant \|g_u\|_{PM}$, elle est entière avec un coefficient de u^2 égal à $-\|f\|_2^2/2$, non nul car $f \neq 0$, donc sa transformée de Fourier

$$a \mapsto \widehat{\Psi}(a) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ua}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u(f(x)-a)}\,\mathrm{d}m(x)\Big)\mathrm{d}u$$

n'est pas nulle partout. En chaque point a où $\widehat{\Psi}(a) \neq 0$, on aura un contre-exemple à la synthèse : par intégration par parties sur $\mathbb{R}$, on obtient en effet

$$0 \neq -\widehat{\Psi}(a) = (S_a, f - a).$$

Dans ces méthodes fondées sur (M), la question générale est de construire $f \in A(\mathbb{T})$ avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}uf}$ assez «petite» dans PM pour que (M) soit satisfaite. Cet objectif est réalisable de multiples façons, par exemple par la méthode aléatoire (33) de Kahane ; une autre solution consiste à remarquer que si F, G sont dans $A(\mathbb{T})$, alors

$$\|t \mapsto F(t)G(kt)\|_{PM} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|F\|_{PM}\|G\|_{PM}.$$

À partir de la fonction $F = \mathrm{e}^{\mathrm{i}uf}$ de norme < 1 dans PM (si $f \in A(\mathbb{T})$ réelle n'est pas constante et si $u \neq 0$, c'est automatique), on fait descendre les normes exponentiellement pour u donné, ou pour u dans un segment, en considérant la fonction $t \mapsto F(t)F(k_1 t)\ldots F(k_n t)$, qu'on peut rendre de norme $\leqslant (\|F\|_{PM} + \epsilon)^{n+1}$

dans PM si la suite (k_j) croît assez vite ; on «bricole» ensuite pour gagner quelque chose sur toute la droite [**KaAC**, V.8].

À Stockholm [**MalR**], Malliavin a parlé de la notion *d'ensemble de résolution spectrale*, un fermé $E \subset \mathbb{T}$ dont *tous* les sous-ensembles fermés sont de synthèse. Le parfait P de Kahane et Salem, qui ne porte aucune pseudomesure *vraie*, est non seulement de synthèse mais (banalement) de résolution. Malliavin montre que les ensembles de résolution sont de type (U), mais les ensembles parfaits symétriques E_ξ, qui peuvent être de type (U), ne sont jamais de résolution (voir *SFAC*, fin de V.8 ou de VIII.7).

6. Baire

On a déjà mentionné la théorie de Baire à propos de Young ou de Bary ; un espace métrique complet X a la *propriété de Baire* : l'intersection Y d'une suite d'ouverts partout denses dans X est encore partout dense dans X —disons simplement *dense dans* X désormais—. Bien plus, c'est un ensemble «gros» puisqu'une intersection dénombrable de tels Y_n sera dense à nouveau —ce sera encore une intersection dénombrable d'ouverts denses—, tout comme l'intersection d'une suite d'ensembles de probabilité 1 reste de probabilité 1. On emploie l'expression *quasi-tout point de* X pour désigner la collection des points d'un ensemble gros au sens de Baire ; une propriété est *générique* si elle est vérifiée par quasi-tout point. Kahane s'est intéressé aux méthodes de Baire (voir *SFEO*, sec. 6.5) qui permettent, un peu comme les méthodes probabilistes, de savoir qu'on est quasi-forcé de tomber sur un objet de la classe voulue, mais parfois après une marche d'approche qui peut être longue et pénible ; on en fera l'expérience un peu plus loin.

Kahane a envisagé dans *SFAC* une quantité vertigineuse d'ensembles «minces» : les ensembles de Helson, de type U, de type U_0, les ensembles sans vraie pseudomesure, ensembles de résolution, de convergence absolue, de Dirichlet et parmi les très minces, les ensembles de Kronecker. Si $E \subset \mathbb{T}$, on considère l'ensemble $U(E)$ des fonctions complexes continues sur E qui sont de module 1 en tout point de E. Les exemples immédiats d'éléments de $U(E)$ sont les fonctions $\mathbf{e}_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$, pour $n \in \mathbb{Z}$. On munit $U(E)$ de la métrique de la convergence uniforme et on dit que E est un *ensemble de Kronecker* si la suite des exponentielles $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $U(E)$. Kahane [**KaAC**, VII.3] met en avant un résultat obtenu par Robert Kaufman [**Kauf**] en 1967 : «génériquement», l'image continue d'un ensemble parfait totalement discontinu $P \subset \mathbb{T}$ est un ensemble de Kronecker $E = f(P)$. On obtient ainsi, sans axiome du choix, des ensembles indépendants sur $\mathbb{Q}$ qui ont la puissance du continu.

En 1975, Kahane introduit Baire dans l'étude du 13^e^ problème de Hilbert [**KaSW**, p. 337], qu'Andreï Kolmogorov avait traité dans le cas des fonctions continues sur $[0,1]^n$, pour tout $n > 1$. Exprimons le cas plus simple où $n = 2$: il est possible de représenter toute fonction $f(x_1, x_2)$ réelle continue sur $[0, 1]^2$ comme *superposition* de $5 = 2n + 1$ fonctions g_j continues d'une seule variable, ce qui signifie que

$$f(x_1, x_2) = \textstyle\sum_{j=1}^5 g_j\big(\varphi_{1,j}(x_1) + \varphi_{2,j}(x_2)\big), \quad x_1, x_2 \in [0, 1],$$

avec des fonctions $\varphi_{p,j}$ d'une variable, où $p = 1, 2$, croissantes et continues, qui ne dépendent pas de f. Cet énoncé a été amélioré (par David Sprecher par exemple, en 1972), et Kahane prouve qu'on peut donner un caractère générique à l'une des versions les plus raffinées, où les fonctions g_j sont égales à une même fonction g et où $\varphi_{p,j} = \lambda_p \varphi_j$, $\lambda_p > 0$.

Désignons par W l'ensemble des fonctions φ continues croissantes (au sens large) sur $[0, 1]$ telles que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$, et munissons W de la métrique uniforme qui le rend complet, il a donc la propriété de Baire. Kahane montre (pour tout n, nous n'écrirons que le cas $n = 2$) que si λ_1, λ_2 sont > 0 et de somme 1, et tels que

(34) les quatre valeurs $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2$, quand $\eta_1, \eta_2 = 0, 1$, soient distinctes,

alors *pour quasi-tout* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_5) \in W^5$ *fixé, toute fonction* f *réelle continue sur* $[0, 1]^2$ *est représentable sous la forme*

$$f(x_1, x_2) = \textstyle\sum_{j=1}^5 g\big(\lambda_1\varphi_j(x_1) + \lambda_2\varphi_j(x_2)\big), \quad x_1, x_2 \in [0, 1], \tag{35}$$

où g *est une fonction continue sur* $[0, 1]$.

Tel que le théorème est énoncé, on a $\varphi_j(\eta) = \eta$ quand $\eta = 0$ ou 1, on aura par conséquent $f(\eta_1, \eta_2) = 5g(\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)$; pour pouvoir représenter toutes les fonctions f, il est nécessaire que les quatre sommes $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2$ soient différentes. Cela dévoile un petit bout du ressort de la preuve, qu'on explicitera ci-dessous. Quand $n = 2$, la condition (34) revient à dire que λ_1, λ_2 sont > 0 de somme 1 et simplement *distincts*, mais cela n'est plus vrai quand $n > 2$, il faut envisager les 2^n valeurs possibles : cette condition nécessaire est mal énoncée par Kahane [**KaSW**, p. 339], elle a été corrigée dans un article d'Anatoli Vitushkin, un grand expert du 13e problème [**Vitu**], [**KaSW**, p. 406].

On fixe β, γ, avec $0 < 5\beta < 1$ et $1 - \beta < \gamma < 1$; on a $n = 2$, $N = 5 = 2n + 1$. Pour h continue sur $[0, 1]^2$, non nulle et fixée, on considère l'ouvert Ω_h de W^5 formé des $(\varphi_j)_{j=1}^5$ pour lesquels il existe $g \in C([0, 1])$ telle que $\|g\| \leqslant \beta\|h\|$ et telle qu'en posant

$$\phi_g(x_1, x_2) = \textstyle\sum_{j=1}^5 g\big(\lambda_1\varphi_j(x_1) + \lambda_2\varphi_j(x_2)\big) \ \text{ on ait } \ \|h - \phi_g\| < \gamma\|h\|, \tag{36}$$

où les normes sont les normes uniformes sur $[0, 1]$ ou $[0, 1]^2$. On montrera que Ω_h est dense dans W^5, on sera assez précis, ça sera long ! On prendra ensuite l'intersection Y des Ω_h pour h variant dans un ensemble dénombrable dense de $C([0, 1]^2) \setminus \{0\}$. Clairement, si $(\varphi_j^0)_{j=1}^5 \in Y$, une propriété (36) *modifiée* est vraie pour *toute* fonction h si on y remplace la borne $< \gamma\|h\|$ par $\|h - \phi_g\| \leqslant \gamma_1\|h\|$, pourvu que $\gamma_1 > \gamma$; on garde $\gamma_1 < 1$. On exprime alors toute $f \in C([0, 1]^2)$ sous la forme attendue (35), en écrivant

$$f = \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_k + \psi_{k+1} + \cdots = \phi^0_{g_1+g_2+\cdots+g_k+g_{k+1}+\cdots} \,;$$

on choisit $\psi_1 = \phi^0_{g_1}$ approchant $f = h_0$ au sens $\|f - \phi^0_{g_1}\| \leqslant \gamma_1 \|f\|$ «modifié», puis $\psi_{k+1} = \phi^0_{g_{k+1}}$ vérifiant $\|h_k - \phi^0_{g_{k+1}}\| \leqslant \gamma_1 \|h_k\|$ pour $h_k = f - \sum_{i=1}^k \psi_i$ et $k \geqslant 1$; cela conduit à $\|f - \sum_{i=1}^\ell \psi_i\| \leqslant \gamma_1^\ell \|f\| \to 0$ quand $\ell \to \infty$, d'où le résultat.

Commençons la preuve de la densité de Ω_h dans W^5 : on se donne Ω ouvert dans W^5, $(\varphi^*_j)_{j=1}^5 \in \Omega$ et on va construire $(\varphi_j)_{j=1}^5 \in \Omega_h \cap \Omega$. On sélectionne $p > 0$ entier tel que $\delta = 1/p$ soit suffisamment petit pour que h et les φ^*_j soient «presque constantes», à un $\epsilon > 0$ près à préciser, sur tous les ensembles de diamètre $< 4\delta$. Pour chaque entier q tel que $0 \leqslant q < p$ on introduit 5 intervalles ouverts non vides $I_{j,q}$ disjoints, $j \in J := \{1, \ldots, 5\}$, contenus dans $I_q = (q\delta, (q+1)\delta) \subset (0,1)$. Tout point x de $[0,1]$ appartient (évidemment) à *au plus un* intervalle de la famille disjointe à deux indices $(I_{j,q})_{j,q}$.

Fixons $j \in J$. Le complémentaire dans $[0,1]$ de la réunion U_j des $(I_{j,q})_{0 \leqslant q < p}$ est constitué de $p+1$ segments $A_{j,r}$, $r \in R := \{0, \ldots, p\}$, où $A_{j,q}$ et $A_{j,q+1}$ encadrent $I_{j,q}$; on construit $\varphi_j \in W$ proche de φ^*_j et croissante continue, affine sur les «pentes» $I_{j,q}$ et constante sur les «paliers» $A_{j,r}$ de longueur $< 2\delta$ (le lecteur fera un dessin). Les paliers $A_{j,0}$ et $A_{j,p}$ sont particuliers : ce sont les deux «bouts», ils contiennent respectivement 0 et 1, où les valeurs de φ_j sont fixées par définition de W. On posera $x_{j,0} = 0 \in A_{j,0}$, $x_{j,p} = 1 \in A_{j,p}$, et si $0 < r < p$, on prendra un point quelconque $x_{j,r} \in A_{j,r}$. La fonction φ_j est déterminée par les conditions $\varphi_j(0) = 0$, $\varphi_j(1) = 1$ et par les valeurs $\varphi_j(x_{j,r})$ prises sur les paliers $A_{j,r}$ quand $0 < r < p$, qu'on choisira telles que $\varphi_j(x_{j,r}) \sim \varphi^*_j(x_{j,r})$; on aura fixé ϵ, δ assez petits pour que $(\varphi_j)_{j=1}^5 \in \Omega$. Il reste à voir que $(\varphi_j)_{j=1}^5 \in \Omega_h$.

Posons $a_{j,r} = \varphi_j(x_{j,r})$ où $(j,r) \in J \times R$, puis $t_{j,r,s} = \lambda_1 a_{j,r} + \lambda_2 a_{j,s}$ lorsque $(j,r,s) \in J \times R^2$. Quand $b \in B := \{0,p\}$ (les bouts), la valeur $a_{j,b}$ vaut 0 ou 1 et ne dépend pas de j ; quand $(b,c) \in B^2$, la valeur $t_{j,b,c}$ ne dépend pas non plus de l'indice j, notons-la $t_{0,b,c}$. Pour être précis mais lourd, désignons par T l'ensemble des triplets (u,v,w) où on a, ou bien $u = 0$ et $(v,w) \in B^2$, ou bien (u,v,w) dans $J \times (R^2 \setminus B^2)$. Les valeurs $a_{j,0}$ et $a_{j,p}$ sont contraintes, mais pas les valeurs $a_{j,r}$ quand $0 < r < p$; par une petite perturbation de ces $a_{j,r}$, et grâce à la condition nécessaire (34) sur λ_1, λ_2, on peut garantir que les valeurs $t_{u,v,w}$ soient distinctes quand (u,v,w) varie dans T (c'est le ressort promis depuis un moment : dans $[0,1]$, on a «codé» un pavage du carré au moyen des points $t_{u,v,w}$, où $(u,v,w) \in T$). On introduit g en posant d'abord $g(t_{j,r,s}) = \beta h(x_{j,r}, x_{j,s})$ pour $(j,r,s) \in J \times R^2$, puis en prolongeant g à $[0,1]$ continûment de façon que $\|g\| \leqslant \beta \|h\|$, et pour finir on définit la fonction ϕ_g selon l'équation (36).

L'ingrédient essentiel est ici : si $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0,1]^2$ est donné, x_1 (ou x_2) appartient à une «pente» *au plus*, il y a donc au plus $m = m_{\mathbf{x}} \leqslant 2 = n$ valeurs de $j = 1, \ldots, 5 = N$ telles que x_1 ou x_2 soit dans une j-pente $I_{j,q}$, c'est-à-dire telles que $\mathbf{x}$ n'appartienne pas à un produit de j-paliers ; notons $M = M_{\mathbf{x}}$ l'ensemble de ces indices j «mauvais» pour $\mathbf{x}$. Si au contraire $\mathbf{x}$ appartient au produit $A_{j,r} \times A_{j,s}$

de j-paliers sur lesquels φ_j est constante, on a

$$g(\lambda_1\varphi_j(x_1) + \lambda_2\varphi_j(x_2)) = g(\lambda_1\varphi_j(x_{j,r}) + \lambda_2\varphi_j(x_{j,s})) = g(t_{j,r,s}),$$

et comme les produits de paliers sont de diamètre $< 4\delta$, on a de plus $g(t_{j,r,s}) = \beta h(x_{j,r}, x_{j,s}) \sim \beta h(x_1, x_2)$ à $\beta\epsilon$ près. Puisque $|M| = m$, on déduit

$$\textstyle\sum_{j\notin M} g(\lambda_1\varphi_j(x_1) + \lambda_2\varphi_j(x_2)) \sim (N-m)\beta h(x_1, x_2) \ \text{ à } \ (N-m)\beta\epsilon \leqslant 5\beta\epsilon < \epsilon \text{ près.}$$

Sinon, pour m valeurs de $j \in M$, on sait seulement dire que $g(\lambda_1\varphi_j(x_1) + \lambda_2\varphi_j(x_2))$ est borné par $\beta\|h\|$. Sachant que $(N-m)\beta \leqslant N\beta < 1$ et $m \leqslant n$, on a par conséquent

$$|h(x_1, x_2) - \phi_g(x_1, x_2)| - \epsilon \leqslant (1-(N-m)\beta)|h(x_1, x_2)| + m\beta\|h\| \leqslant (1-(N-2n)\beta)\|h\|.$$

Pour que $1 - (N - 2n)\beta < 1$ il faut que $N > 2n$, d'où le choix $N = 2n + 1$; alors $\|h - \phi_g\| \leqslant (1 - \beta)\|h\| + \epsilon < \gamma\|h\|$ si on a imposé $\epsilon < (\gamma-1+\beta)\|h\|$ dès le début. On a prouvé que $(\varphi_j)_{j=1}^5 \in \Omega_h$, qui est donc dense dans W^5. Comme Schwartz écrivait dans ses textes informels, en guise de signe «qed» de fin de (longue) preuve : OUF !

Dans un article antérieur, *Sur les réarrangements de fonctions de la classe A* en 1968 [**KaSW**, p. 271] —repris dans *SFAC*, VII.9—, Kahane avait prouvé un résultat d'un même genre : ici W est un ensemble d'applications φ de $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{T}$, localement croissantes et vérifiant une condition sur leur module de continuité ; l'ensemble W peut par exemple être convexe et fermé dans l'espace $\mathrm{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Alors : *pour quasi-tout triplet* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in W^3$ *et pour toute fonction continue* $f \in C(\mathbb{T})$ *il existe* g *dans* $A(\mathbb{T})$ *telle que*

$$f(x) = g(\varphi_1(x)) + g(\varphi_2(x)) + g(\varphi_3(x)), \quad x \in \mathbb{T}.$$

Dans *SFEO*, sec. 6.9, Kahane mentionne aussi la théorie descriptive des ensembles ; il cite Kaufman, Kechris–Louveau et Debs–Saint-Raymond à propos de la complexité de classes d'ensembles minces : la classe $\mathcal{U}$ des fermés d'unicité est un *coanalytique* non borélien, donc *non analytique*, c'est-à-dire une classe qu'on a peu de chances de décrire par des procédés explicites ; voir aussi Cooke [**Cook**, *Recent results*], qui indique que les exemples fournis par le théorème de Salem–Zygmund jouent un rôle dans la preuve. Gabriel Debs et Jean Saint-Raymond [**DeSR**] ont aussi un résultat positif : les ensembles de type (U) qui sont Baire-mesurables —en particulier, les boréliens de type (U)— sont maigres, ce qui répond à une question de Bary [**BarT**, fin de XIV.6, p. 359].

7. Probabilités

À un certain moment, Kahane devient plus ouvertement probabiliste. Il s'intéresse notamment à la théorie des martingales, particulièrement aux martingales positives et aux mesures aléatoires qui peuvent les accompagner, aux processus ponctuels de Poisson, aux cascades multiplicatives. Nous allons survoler ce pan de son œuvre.

7.1. Recouvrements du cercle, mouvement brownien. — Après les années 1950-60 un thème nouveau apparaît dans les travaux de Kahane : les recouvrements aléatoires du cercle, en 1959. Il indique que la question, posée par Aryeh Dvoretzky en 1956, lui a été transmise par Paul Lévy, et il évoque son unique visite chez ce dernier en 1958 [**KaDA**]. On considère des intervalles ouverts I_n sur le cercle — disons le cercle $\mathbb{T}_1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de longueur 1 — dont les centres x_n sont choisis indépendamment suivant la loi uniforme sur le cercle et dont les longueurs $\ell_n > 0$ sont fixées, pour tout $n \geqslant 1$; on demande si la réunion des $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est égale au cercle, presque sûrement. On supposera $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \ldots \geqslant \ell_n \geqslant \ldots$ sans perdre de généralité, et aussi $\ell_1 < 1$, sinon la question se réduit à couvrir l'unique point pouvant manquer dans $\mathbb{T}_1$, ce qui est facile à décider. Dans une Note [**KaRC**] en 1959, Kahane propose

$$\kappa := \limsup_n \frac{\ell_1 + \cdots + \ell_n}{\ln(1/\ell_n)} \tag{37}$$

comme valeur discriminante : il montre que *si $\kappa > 1$, le cercle est recouvert p. s.* Ainsi, il y a recouvrement si pour $n \geqslant n_0$ on a $\ell_n = \alpha/n$ avec $\alpha > 1$; mais il ne sait pas à l'époque qu'il n'y a pas recouvrement si $\ell_n = \alpha/n$ avec $\alpha < 1$, il pose la question à la fin de sa Note. Il sait toutefois que si $\ell_n = 1/(n \ln n)$ pour $n \geqslant n_0$, on ne recouvre pas le cercle (Théorème 3 de la Note). Signalons en passant que malheureusement, la deuxième page de cette Note n'est pas correctement reproduite dans les Œuvres [**KaSW**, p. 87], remplacée par une page d'un autre article.

Ce thème revient dans une série de publications, en 68 dès la première édition de *SRSF*, ch. IX, en 1990, puis dans la *Gazette* en 1992, en 2000 encore. Attentif aux sujets qu'il a traités auparavant, Kahane présente dans des sections assez techniques de l'édition *SRSF*$_2$ de 1985, sec. 11.2, 3, 4, la solution obtenue par Lawrence Shepp : la condition nécessaire et suffisante pour le recouvrement presque sûr s'exprime par

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\exp(\ell_1 + \cdots + \ell_n)}{n^2} = +\infty. \tag{38}$$

Par exemple, il y a recouvrement si $\ell_n = 1/n$, ou même si $\ell_n = 1/n - 1/(n \ln n)$ pour $n \geqslant n_0 > 2$, mais non-recouvrement si $\ell_n = 1/n - 2/(n \ln n)$, $n \geqslant n_0 > 2$.

On va démontrer le cas simple de 1959, où la preuve du recouvrement p. s. est obtenue en quelques lignes. Mais d'abord, il faut bien distinguer le fait que presque tout point de $\mathbb{T}_1$ soit recouvert, qui relève d'un simple Borel–Cantelli, du fait que *le cercle entier* soit recouvert. Donnons-nous $\delta \in (0, 1/2)$ et introduisons sur le cercle $\mathbb{T}_1$ un réseau fini R de pas $< \delta$, c'est-à-dire que chaque intervalle ouvert de longueur δ dans $\mathbb{T}_1$ contient au moins un point de R. Si chaque point du réseau R est recouvert par des intervalles I'_j, alors les δ-épaissis I_j de ces intervalles, de mêmes centres et de longueurs $|I'_j| + \delta$, recouvrent tout le cercle. On va raisonner à l'envers : étant donnés n intervalles I_j de longueurs $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \ldots \geqslant \ell_n > \delta$, on considère les intervalles I'_j «rétrécis», de mêmes centres et de longueurs $\ell'_j = \ell_j - \delta$. Si les intervalles plus petits couvrent le réseau R de pas $< \delta$, les plus grands recouvrent le cercle $\mathbb{T}_1$.

Faisons l'hypothèse que $v_n := n^{-1}\exp(\sum_{j=1}^n \ell_j)$, $n \geqslant 1$, n'est pas borné (voir *SRSF*$_2$, sec. 11.2 ; aussi, comparer à la condition (38) de Shepp). Prenons A « grand », et soit m le premier indice n tel que $v_n > A$. Alors $1 < v_m/v_{m-1} = \mathrm{e}^{\ell_m}(m-1)/m$, ou encore $\ell_m > -\ln(1-1/m) > 1/m$. Soit t un point d'un réseau R de $m+1$ points et de pas $< \delta = 1/m$. La probabilité que t ne soit pas couvert par I'_j (rétréci) est égale à $1-\ell'_j = 1-\ell_j+\delta = 1+1/m-\ell_j$, donc la probabilité de ne pas recouvrir t avec $I'_1, \ldots, I'_m$ indépendants est $\prod_{j=1}^m (1+1/m-\ell_j)$; la probabilité p_m de ne pas recouvrir le cercle avec $I_1, \ldots, I_m$, ou même de ne pas recouvrir le réseau R à l'étape m avec $I'_1, \ldots, I'_m$, satisfait les inégalités

$$p_m \leqslant (m+1)\prod_{j=1}^m \Bigl(1+\frac{1}{m}-\ell_j\Bigr) \leqslant (m+1)\exp\Bigl(1-\sum_{j=1}^m \ell_j\Bigr) = \frac{(m+1)\,\mathrm{e}}{m v_m} < \frac{2\,\mathrm{e}}{A} \tag{39}$$

puisque $1+u \leqslant \mathrm{e}^u$. Comme (v_n) n'est pas bornée, p_n tend vers 0, d'où le résultat.

Posons $L_n = \ell_1 + \cdots + \ell_n$; la condition de recouvrement « $v_n = \mathrm{e}^{L_n}/n$ non borné » qu'on vient d'utiliser est un peu plus souple que le critère $\kappa > 1$ de (37), qui fournit, pour tout α tel que $1 < \alpha < \kappa$, un sous-ensemble infini $Q_\alpha \subset \mathbb{N}$ d'entiers q tels que $\exp(L_q) \geqslant \ell_q^{-\alpha}$; alors e^{L_n}/n est non borné : si on avait $\exp(L_q) \leqslant Cq$ pour $q \in Q_\alpha$, on déduirait $\ell_q \geqslant (Cq)^{-1/\alpha}$, puis $L_q \geqslant q\ell_q \geqslant C^{-1/\alpha}q^{(\alpha-1)/\alpha}$ qui contredit $\exp(L_q) \leqslant Cq$.

Plus loin, on devra faire la remarque facile que si $\sum \ell_n^\beta = \infty$ pour un $\beta > 1$, il y a recouvrement : si γ est tel que $1/\beta < \gamma < 1$, il existe un ensemble infini Q d'entiers q tels que $\ell_q \geqslant q^{-\gamma}$, sinon on aurait $\ell_n^\beta < n^{-\beta\gamma}$ pour n assez grand et $\sum \ell_n^\beta < \infty$; on a donc $L_q \geqslant q\ell_q \geqslant q^{1-\gamma}$ pour $q \in Q$, et la suite $(\mathrm{e}^{L_n}/n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée.

Les recouvrements aléatoires du cercle réapparaissent, 15 ans après, dans *Irrégularité locale du mouvement brownien*, Note CRAS de 1974 [**KaSW**, p. 334], où Kahane découvre l'existence de « points lents » pour les trajectoires browniennes. Kahane y rappelle d'abord un énoncé proche de sa condition de recouvrement de 1959 ; mais en réalité, ce n'est pas la preuve précédente qui intervient, c'est une variante plus facile où on choisit des intervalles dyadiques avec probabilité fixée $p \in (0,1)$, et ce, seulement pour prouver que presque sûrement, il n'y a pas de point lent dont la constante $\kappa_{1/2}$ définie ci-dessous (constante ponctuelle Lip(1/2)) soit plus petite qu'une certaine valeur —explicite, ce qui précise un énoncé plus qualitatif de Dvoretzky—. L'existence des points lents dépend de résultats de non-recouvrement qui n'étaient pas dans la Note de 1959, mais qu'on trouve dans *SRSF* en 1968, sec. IX.6, th. 6 ; si $(B_t)_{t\geqslant 0}$ désigne le brownien sur $\mathbb{R}$, le temps $t > 0$ correspond à un *point lent* de la trajectoire ω si

$$\kappa_{1/2}(t,\omega) := \limsup_{h\to 0} \frac{|B_{t+h}(\omega) - B_t(\omega)|}{\sqrt{|h|}} < +\infty.$$

Précisément, pour presque toute trajectoire ω du brownien, l'ensemble des temps t correspondant aux points lents de cette trajectoire a une dimension de Hausdorff égale à 1, alors qu'on sait que les trajectoires du brownien ne sont pas Lip(1/2) :

le meilleur module de continuité presque sûr possible est en $h \mapsto \sqrt{h \log(1/h)}$, pour $h > 0$ petit. Le sujet des points lents est repris dans *SRSF*$_2$, sec. 16.4. On n'en dira pas plus ici.

Dans un article de 1990 [**KaSW**, p. 576], Kahane reformule en termes de martingales le problème des intervalles ouverts (I_n) jetés au hasard sur le cercle $\mathbb{T}_1$ de longueur 1. Il s'occupe en réalité de cas plus généraux, des intervalles « poissonniens » sur la droite, mais nous nous limiterons au cas du cercle. Fixons d'abord un point $x \in \mathbb{T}_1$. Pour chaque tirage ω d'une suite $(I_n(\omega))_{n \geqslant 1}$, introduisons $K_{n,x}(\omega)$ qui vaut 0 si x est dans l'intervalle $I_n(\omega)$ de longueur ℓ_n, et $(1-\ell_n)^{-1}$ sinon. On a

$$\int_0^1 K_{n,y}(\omega)\,\mathrm{d}y = 1, \quad \mathrm{E}_{\omega'} K_{n,x}(\omega') = \int_\Omega K_{n,x}(\omega')\,\mathrm{d}P(\omega') = 1, \quad n \geqslant 1.$$

En considérant les tribus $(\mathcal{F}_n)$ engendrées par les tirages, successifs et indépendants, des centres $x_j(\omega)$ des segments, $1 \leqslant j \leqslant n$, on voit que l'espérance conditionnelle de

$$X_{n+1,x}(\omega) := K_{1,x}(\omega)K_{2,x}(\omega)\ldots K_{n,x}(\omega)K_{n+1,x}(\omega) = X_{n,x}(\omega)K_{n+1,x}(\omega)$$

sur la tribu $\mathcal{F}_n$ vaut $X_{n,x}(\omega)$, on a une martingale positive $(X_{n,x})_n$, pour $n \geqslant 1$, qui vérifie $\mathrm{E}\,X_{n,x} = 1$ pour tout n. En intégrant en x, on définit une nouvelle martingale

$$X_n(\omega) = \int_0^1 X_{n,x}(\omega)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{E}\,X_n = 1,$$

(on constate que $X_1(\omega) = 1$ pour tout ω, mais X_2 n'est plus constante). Par les théorèmes classiques de probabilité, on sait que la martingale (X_n) converge p.s. vers une limite X_∞. Quand $\omega \in \Omega$ est un tirage tel que le cercle soit recouvert, toutes les variables $X_{n,x}(\omega)$, pour $x \in \mathbb{T}_1$, deviennent nulles à un certain rang et au delà, $X_n(\omega)$ aussi et $X_\infty(\omega) = 0$. Mais si la martingale (X_n) est bornée dans L^2, elle converge dans L^2 vers X_∞, l'intégrale $\mathrm{E}\,X_n = 1$ se conserve à la limite, $\mathrm{E}\,X_\infty = 1$ et X_∞ ne peut pas être p.s. nulle. Pour recouvrir le cercle presque sûrement, il est donc nécessaire que X_n *ne soit pas borné* dans L^2. On calcule

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_\omega\,X_n(\omega)^2 &= \mathrm{E}_\omega\Bigl(\int_0^1 X_{n,x}(\omega)\,\mathrm{d}x\Bigr)^2 = \mathrm{E}_\omega \int_{[0,1]^2} X_{n,x}(\omega)X_{n,y}(\omega)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{[0,1]^2} \mathrm{E}_\omega\bigl(X_{n,x}(\omega)X_{n,y}(\omega)\bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[0,1]^2}\Bigl(\prod_{j=1}^n \mathrm{E}_\omega\,K_{j,x}(\omega)K_{j,y}(\omega)\Bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On voit apparaître les noyaux

$$k_j(x,y) = \mathrm{E}\,K_{j,x}K_{j,y} = \mathrm{E}\,K_{j,0}K_{j,y-x} =: h_{\ell_j}(d(x,y)),$$

où $d(x,y) = ((x-y)) \leqslant 1/2$ désigne la distance entre x et y sur le cercle $\mathbb{T}_1$, et où on a

$$(1-\ell)^2 h_\ell(u) = \Delta_{1-\ell}(u) + \Delta_{1-\ell}(1-u), \quad 0 < \ell < 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

la fonction Δ_ℓ étant la fonction triangle définie par $\Delta_\ell(u) = (\ell - |u|)_+$ sur $\mathbb{R}$; quand $\ell \leqslant 1/2$ et $0 \leqslant u \leqslant 1/2$, on trouve que $(1-\ell)^2 h_\ell(u) = 1 - 2\ell + \Delta_\ell(u)$ (des calculs analogues sont déjà dans *SRSF*$_2$, sec.11.3). Pour recouvrir le cercle, il faut donc que

$$\sup_n \mathrm{E}\, X_n^2 = \sup_n \int_{[0,1]^2} \Bigl(\prod_{j=1}^n k_j(x,y)\Bigr)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\sup_n \int_0^{1/2} (1-2u)\Bigl(\prod_{j=1}^n h_{\ell_j}(u)\Bigr)\,\mathrm{d}u = +\infty.$$

On peut transformer cette condition nécessaire en

$$\int_0^1 \exp\bigl(\textstyle\sum_{n\geqslant 1}\Delta_{\ell_n}(u)\bigr)\,\mathrm{d}u = +\infty. \tag{40}$$

En effet, compte tenu de $\int_0^1 \Delta_\ell(u)\,\mathrm{d}u = \ell^2/2$, on a par convexité

$$\int_0^1 \exp\bigl(\textstyle\sum_{n\geqslant 1}\Delta_{\ell_n}(u)\bigr)\,\mathrm{d}u \geqslant \exp\bigl(\textstyle\sum_{n\geqslant 1}\ell_n^2/2\bigr)\,;$$

si $\sum \ell_n^2 = \infty$, la condition (40) est donc satisfaite, et on a vu —après (39)— qu'il y a recouvrement p.s. du cercle dans ce cas, par conséquent $\mathrm{E}\, X_n^2$ n'est pas borné. Inversement, si la série $\sum \ell_n^2$ converge, ℓ_n tend vers 0 et on observe que pour $\ell > 0$ petit,

$$h_\ell(u) = \frac{1-2\ell+\Delta_\ell(u)}{(1-\ell)^2} = \exp\Bigl(\ln(1-2\ell+\Delta_\ell(u)) - 2\ln(1-\ell)\Bigr) = \exp\bigl(\Delta_\ell(u)+O(\ell^2)\bigr),$$

donc $\sup_n \mathrm{E}\, X_n^2$ est non borné si et seulement si (40) est satisfaite.

Testons le critère (40) sur le cas où $\ell_n = \alpha/n$, $n \geqslant 1$; pour $u \in (0,1)$, on a

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 1}\Delta_{\alpha/n}(u) = \sum_{1\leqslant n<\alpha/u}(\alpha/n - u) \sim b(u) + \alpha\ln(1/u),$$

avec $b(u)$ fonction bornée ; la condition nécessaire (40) n'est pas réalisée si $\alpha < 1$, il n'y a pas recouvrement dans ce cas : on a un peu complété l'article [**KaRC**] de 1959.

La condition nécessaire (40) coïncide en fait avec la CNS (38) donnée par Shepp [**KaRS**, 11.4, th. 1]. L'étude des recouvrements du cercle se généralise aux recouvrements en dimension > 1 par des convexes ; Kahane [**KaRS**, 11.9] cite en particulier son élève Youssef El Hélou [**ElHé**].

Kahane [**KaDA**] mentionne l'influence qu'a eue sur lui Benoît Mandelbrot, qui vers 1974 s'intéressait à des problèmes de chaos et de turbulence, et qui posait un certain nombre de questions concernant les cascades multiplicatives. Kahane a réagi, avec du retard, en travaillant dans les années 1985-90 sur les produits de poids aléatoires indépendants. Nous ne pourrons que mentionner en passant l'article *Sur Certaines Martingales de Benoit Mandelbrot* avec Jacques Peyrière [**KaSW**, p. 346], qui regroupe des résultats obtenus sur des conjectures de Mandelbrot, séparément par Peyrière et Kahane : c'est *l'article* de Kahane le plus «cité» dans *MathSciNet*, juste après le livre "best-seller" *SRSF*$_2$!

7.2. Processus gaussiens. — Kahane a beaucoup travaillé sur le mouvement brownien : entre autres choses, il a découvert les points lents, et des propriétés presque sûres des images browniennes d'ensembles [**KaSW**, p. 419]. Il s'est aussi intéressé, sans beaucoup y publier d'articles de recherche, à la théorie des *processus gaussiens* ; une exception dans ce domaine, le court article de deux pages en 1986 sur Gordon et

Slepian [**KaSW**, p. 499] montre un homme à l'écoute de l'actualité mathématique. L'article de Yehoram Gordon, paru en 85, prouve des inégalités de comparaison de deux processus gaussiens, non seulement « du côté du sup » comme celles de David Slepian, mais aussi comparaison d'espérances de certaines combinaisons de sups et d'infs de la forme $\mathrm{E} \min_i \max_j X_{i,j}$. Kahane en donne une preuve plus simple et plus élégante. Il écrira en 1989 une recension pour *Math. Reviews* (MR#0920263) d'un article ultérieur de Gordon, où ce dernier applique ses inégalités à la preuve d'une forme généralisée du fameux théorème de Dvoretzky sur l'existence de *sections presque sphériques des corps convexes*. Cette recension de Kahane parue en 1989 est la dernière des nombreuses recensions qu'il a faites pour *Math. Reviews*.

S'il a donc peu publié sur le sujet, Kahane a en revanche rédigé dans $SRSF_2$, ch. 15, plusieurs des résultats de la théorie des processus gaussiens. L'excursion n'est pas gratuite : elle va ouvrir un nouveau passage vers les contrées trigonométriques... Un *espace gaussien* (centré) $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont tous les éléments sont des variables aléatoires gaussiennes (centrées), par exemple l'espace vectoriel fermé engendré par une suite (g_n) de gaussiennes normales indépendantes. On peut voir un processus gaussien comme un sous-ensemble T de $\mathcal{H}$, on peut préférer le noter $(X_t)_{t\in T}$, la notation « variable aléatoire » X_t remplaçant l'écriture $t \in T \subset \mathcal{H}$.

Richard Dudley a donné une condition suffisante pour que $X_T^* := \sup_{t\in T} |X_t|$ soit fini presque sûrement [**KaRS**, 15.4] : on suppose d'abord que T est relativement compact dans $\mathcal{H}$; la condition porte alors sur l'entropie métrique de l'espace $T \subset \mathcal{H}$, muni de la distance d induite par $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$: à chaque $\epsilon > 0$, on associe le nombre minimal $N_d(\epsilon) = N$ de d-boules ouvertes $B_d(t_i, \epsilon)$ de rayon ϵ, $1 \leqslant i \leqslant N$, susceptibles de couvrir T. Avec une constante « absolue » $K < 81$ [**Dudl**, th. 2.37], on a que

$$M(T) := \mathrm{E} \sup_{s,t\in T} |X_t - X_s| \leqslant K J(T), \tag{41}$$

où $J(T)$, « l'intégrale de Dudley », est définie par

$$J(T) = \int_0^\infty \sqrt{\ln(N_d(\epsilon))}\, \mathrm{d}\epsilon. \tag{42}$$

Si T est contenu dans *une* boule de rayon ϵ_0, on peut limiter l'intégrale $J(T)$ à $[0, \epsilon_0]$. La quantité $M(T)$ est à rapprocher de l'espérance $\mathrm{E}\, X_T^*$ du sup du processus : on voit que $M(T) \leqslant 2\, \mathrm{E}\, X_T^*$, et aussi $\mathrm{E}\, X_T^* \leqslant \mathrm{E}\, |X_{t_0}| + M(T)$ pour tout $t_0 \in T$.

Kahane rappelle la jolie preuve de Xavier Fernique (1970) pour l'intégrabilité des vecteurs gaussiens [**KaRS**, 12.7] ; un *vecteur gaussien* X est un vecteur aléatoire à valeurs dans un espace normé réel B tel que $\ell(X)$ soit une gaussienne réelle, pour toute forme linéaire continue ℓ sur B. Le résultat, démontré indépendamment par Henry Landau et Shepp (1970), est analogue au théorème de Khintchine–Kahane amélioré par Kwapień : si on a un vecteur gaussien centré X à valeurs dans B, tous ses moments sont équivalents, et plus précisément, il existe $\alpha > 0$ « absolu » tel que si $\mathrm{E}\, \|X\|_B \leqslant \alpha$, on ait aussi

$$P(\|X\|_B > t) \leqslant 2\, \mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad t \geqslant 0.$$

Il découle en fait de ces résultats que si la variable X_T^* associée à un processus gaussien $(X_t)_{t\in T}$ est finie p. s., elle admet des moments de tous les ordres et possède même un comportement sous-gaussien. Via le théorème central limite, l'inégalité de Kahane–Khintchine (16) en 1964 impliquait déjà une inégalité pour les vecteurs gaussiens, mais seulement avec une décroissance exponentielle ; l'amélioration de Kwapień implique bien une inégalité sous-gaussienne pour les vecteurs gaussiens, mais elle vient plus tard, en 75, et avec de mauvaises constantes, comparées à celles que donne le théorème de Shepp–Landau–Fernique.

Un autre théorème de Fernique [**KaRS**, 15.5] concerne les processus gaussiens qui ont une invariance en loi par rapport à un groupe compact : dans ce cas, la condition suffisante entropique (41) de Dudley pour que X_T^* soit fini p. s., valable pour les processus gaussiens généraux, devient aussi nécessaire, il existe K' absolue telle que

$$J(T) \leqslant K' M(T) \leqslant 2K' \,\mathrm{E}\, X_T^*. \tag{43}$$

Ce théorème a connu de nombreux développements, de 1970 jusqu'au XXI^e^ siècle ; Dudley en présente certains dans le ch. 2 de l'édition 2014 de son livre [**Dudl**].

Venons-en au rapport avec les séries trigonométriques, qui nous occupera pour le reste de cette section et dans la section suivante 7.3. Soit $\mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et considérons $S_\omega^{\mathbf{c}} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n(\omega)\mathbf{e}_n$, série trigonométrique aléatoire à coefficients gaussiens réels (g_n) indépendants centrés, $\|g_n\|_{L^2} = 1$ (des «gaussiennes normales»). Avec les exponentielles complexes $\mathbf{e}_n$, il est naturel d'avoir des coefficients c_n complexes, et aussi des *gaussiennes complexes* définies par $g_n^{\mathbb{C}} = (g_n + \mathrm{i}\, g_n')/\sqrt{2}$, où g_n, g_n' sont gaussiennes réelles normales indépendantes. En considérant $\mathrm{Re}\, S_\omega^{\mathbf{c}}$, $\mathrm{Im}\, S_\omega^{\mathbf{c}}$ qui ont la forme de la série aléatoire (33) en cosinus et sinus, on peut se convaincre que les résultats de Dudley et Fernique subsistent dans le cas complexe ; ci-dessous, on gardera malgré tout des gaussiennes g_n *réelles*, indépendantes, centrées et normales. Notons que $\mathrm{E}_\omega\, |S_\omega^{\mathbf{c}}(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$, pour chaque $t \in \mathbb{T}$; par Fubini, la somme $S_\omega^{\mathbf{c}}$ de la série est dans $L^2(\mathbb{T})$ —elle est en fait dans tous les espaces $L^q(\mathbb{T})$, quand $q < \infty$— pour presque tout ω.

On associe à $S_\omega^{\mathbf{c}}$ un processus gaussien «invariant» sur le groupe $\mathbb{T}$, défini par

$$X_t^{\mathbf{c}}(\omega) = S_\omega^{\mathbf{c}}(t) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n(\omega)\mathbf{e}_n(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad X_t^{\mathbf{c}} \in \mathcal{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, P). \tag{44}$$

La distance $d_{\mathbf{c}}$ de ce processus n'est fonction que de $\mathbf{c}$ et de la distance sur le cercle, qui sera notée $d_{\mathbb{T}}(s,t) = \mathrm{dist}(s-t, 2\pi\mathbb{Z}) = 2\pi\,(([s-t]/[2\pi]))$: on a en effet

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{c}}(s,t)^2 &:= \|X_s^{\mathbf{c}} - X_t^{\mathbf{c}}\|_{L^2}^2 = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 |\mathbf{e}_n(s) - \mathbf{e}_n(t)|^2 \\ &= 4 \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \sin^2\bigl(n\, d_{\mathbb{T}}(s,t)/2\bigr). \end{aligned} \tag{45}$$

Il s'agit *a priori* d'un *écart* sur $\mathbb{T}$, mais c'est une distance dès que $c_1 \neq 0$, ce qu'on pourra supposer. L'ensemble $T_{\mathbf{c}} \subset \mathcal{H}$ du processus est l'image de $\mathbb{T}$ par $t \in \mathbb{T} \mapsto X_t^{\mathbf{c}}$; on identifiera l'espace métrique $T_{\mathbf{c}}$ au cercle $\mathbb{T}$ muni de la distance $d = d_{\mathbf{c}}$. La valeur maximale $X_{T_{\mathbf{c}}}^*(\omega)$ estimée par l'intégrale de Dudley est ici la norme du sup de la fonction $S_\omega^{\mathbf{c}}$, c'est à dire $\sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{c}}(\omega) = \|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n(\omega)\mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Fernique [**Fern**, ch. 6] a introduit dans le cas invariant une modification de l'intégrale $J(T)$ de (42) : pour $\epsilon > 0$ fixé, les boules $B_d(t, \epsilon)$ ont alors, quand $t \in \mathbb{T}$ varie, la même mesure $\mu_d(\epsilon) := m(B_d(0, \epsilon))$; si $\mathbb{T}$ est couvert par $N_d(\epsilon)$ d-boules de rayon ϵ, on a $N_d(\epsilon)\mu_d(\epsilon) \geqslant 1$, et comme $N_d(\epsilon)$ est minimal, on peut aussi montrer que $N_d(\epsilon)\mu_d(\epsilon/2) \leqslant 1$. Cela permet de remplacer $J(T)$ par une nouvelle intégrale

$$I_0(d) = \int_0^{\epsilon_0} \sqrt{\ln(1/\mu_d(\epsilon))}\, \mathrm{d}\epsilon, \tag{46}$$

où ϵ_0 est le maximum de $d^{(0)}(t) := d(0, t)$ quand $t \in \mathbb{T}$; on a donc $\mathbb{T} = B_d(0, \epsilon_0)$ et $\mu_d(\epsilon_0) = m(\mathbb{T}) = 1$. Dans le cas invariant, les quantités $J(T)$ et $I_0(d)$ sont *équivalentes à constante multiplicative près* : $\frac{1}{2} J(T) \leqslant I_0(d) \leqslant J(T)$; cela résulte immédiatement des rapports entre $N_d(\epsilon)$ et $\mu_d(\epsilon)$ signalés ci-dessus.

7.3. Un théorème de Marcus–Pisier. — Dans son livre *SRSF*$_2$, section 15.6, Kahane présente des résultats de Michael Marcus et Pisier, dont nous allons étudier un cas particulier. Il est facile de voir que les séries de Bernoulli banachiques $\sum \varepsilon_n u_n$ sont «dominées» par leurs contreparties gaussiennes $\sum g_n u_n$: on emploie l'argument $g \sim |g|\varepsilon$ de la section 3.3 et le fait que $\mathrm{E}\,|g_n| = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty x\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2/\pi}$, pour obtenir l'inégalité

$$\textbf{(i)} \quad \sqrt{2/\pi}\, \mathrm{E}\,\|\textstyle\sum \varepsilon_n u_n\| = \mathrm{E}\,\|\sum (\mathrm{E}\,|g_n|)\varepsilon_n u_n\| \leqslant \mathrm{E}\,\|\sum |g_n|\varepsilon_n u_n\| = \mathrm{E}\,\|\sum g_n u_n\| \,;$$

l'inverse est faux en général (prendre pour (u_n) les vecteurs de la base canonique de ℓ_N^∞, N grand). Marcus et Pisier montrent que les deux situations sont toujours équivalentes pour les séries de Fourier aléatoires, quand $u_n = c_n \mathbf{e}_n$: il existe une constante absolue C telle que pour tous les coefficients scalaires $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ on ait

$$\mathrm{E}\, X^*_{T_{\mathbf{c}}} = \mathrm{E}\,\|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant C\, \mathrm{E}\,\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varepsilon_n \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

En pensant à **G**aussien et **B**ernoulli, on posera

$$G_{\mathbf{c}} := \mathrm{E}\,\|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad \text{et} \quad B_{\mathbf{c}} := \mathrm{E}\,\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \varepsilon_n \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{47}$$

Pisier a fait un exposé très complet [**PisE**] de ces résultats en mars 78 au séminaire de l'École polytechnique. Il s'agit de transformer la fonctionnelle $I_0(d)$ de Fernique en une fonctionnelle $I_1(d)$ équivalente, qui sera *concave* de la distance d de processus : c'est le point capital. Pour montrer que $G_{\mathbf{c}} \leqslant C B_{\mathbf{c}}$, il suffit de voir que pour une valeur $M > 0$ «absolue», assez grande, on a

$$\mathrm{E}\,\|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n \mathbf{1}_{\{|g_n| > M\}} \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant \frac{1}{2} G_{\mathbf{c}} \,; \tag{48}$$

en effet, il en résultera par l'inégalité triangulaire que

$$\mathrm{E}\,\|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n \mathbf{1}_{\{|g_n| \leqslant M\}} \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \geqslant \frac{1}{2} G_{\mathbf{c}},$$

puis, par un principe simple de convexité et de points extrémaux selon lequel les variables de Bernoulli dominent les variables symétriques bornées par 1, en l'occurence, les variables $M^{-1} g_n \mathbf{1}_{\{|g_n| \leqslant M\}}$, on aura finalement

$$G_{\mathbf{c}} \leqslant 2\, \mathrm{E}\,\|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n g_n \mathbf{1}_{\{|g_n| \leqslant M\}} \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant 2 M B_{\mathbf{c}}.$$

Il faut donc traiter $\xi_n = g_n \mathbf{1}_{\{|g_n|>M\}}$; la majoration de Dudley utilise le caractère sous-gaussien, or ici ξ_n a la même queue que g_n «à la fin» : ξ_n n'est pas assez petite au sens sous-gaussien. La preuve va totalement oublier l'origine gaussienne de ξ_n et n'utiliser que sa variance $\sigma^2 \leqslant (M+1)\,\mathrm{e}^{-M^2/2}$, minuscule quand M grandit. L'estimation de σ^2 découle de

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma^2 &= \int_M^\infty t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = M\,\mathrm{e}^{-M^2/2} + \int_M^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(M\,\mathrm{e}^{-M^2/2} + \mathrm{e}^{-M^2/2}). \end{aligned} \tag{49}$$

Reprenons $d = d_{\mathbf{c}}$, $d^{(0)}(t) = d(0,t)$ pour $t \in \mathbb{T}$, la fonctionnelle $I_0(d)$ de Fernique en (46) et la mesure $\mu_d(\epsilon)$ d'une d-boule quelconque de rayon $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{T}$; supposons pour simplifier que la fonction $r \mapsto \mu_d(r)$ soit continue en $r \geqslant 0$, et soit $\rho_d(s)$ le plus petit «rayon» tel que $\mu_d(\rho_d(s)) = \mathrm{e}^{-s}$, $s \geqslant 0$. Après ce «changement de variable» rayon-mesure, on obtient que

$$I_0(d) = -\int_0^\infty \sqrt{s}\,\mathrm{d}\rho_d(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{-1/2}\rho_d(s)\,\mathrm{d}s.$$

Avec deux centres $x, y \in \mathbb{T}$ tels que $d(x,y) = 2r/3 \leqslant \epsilon_0$ et les deux boules de rayon $r/3$ centrées en ces points, on pourra observer que $2\mu_d(r/3) \leqslant \mu_d(r)$, d'où $\rho_d(s) \leqslant 3\rho_d(s + \ln 2)$. Considérons la moyenne

$$\Delta_d(s) = \mathrm{e}^s \int_{\{d^{(0)} < \rho_d(s)\}} d^{(0)}(t)\,\mathrm{d}m(t) = \fint_{b_d(s)} d^{(0)}\,\mathrm{d}m \leqslant \rho_d(s),$$

où on a posé $b_d(s) = B_d(0, \rho_d(s))$ pour abréger ; on a également

$$\Delta_d(s) \geqslant \mathrm{e}^s \int_{b_d(s)\setminus b_d(s+\ln 2)} d^{(0)}(t)\,\mathrm{d}m(t) \geqslant \frac{1}{2}\rho_d(s+\ln 2) \geqslant \frac{1}{6}\rho_d(s).$$

Ainsi, Δ_d et ρ_d sont équivalentes, $\Delta_d(s) \leqslant \rho_d(s) \leqslant 6\Delta_d(s)$. Cela conduit à la nouvelle forme $I_1(d)$, clairement croissante en d, qui va bien convenir,

$$I_1(d) = \int_0^\infty s^{-1/2}\Delta_d(s)\,\mathrm{d}s. \tag{50}$$

On voit que

$$J(T)/6 \leqslant I_0(d)/3 \leqslant I_1(d) \leqslant 2J(T). \tag{51}$$

Il est intuitivement clair que $\Delta_d(s) = \fint_{b_d(s)} d^{(0)}\,\mathrm{d}m$ est le minimum de $\fint_E d^{(0)}\,\mathrm{d}m$ quand la mesure de $E \subset \mathbb{T}$ vérifie $m(E) = \mathrm{e}^{-s} = m(b_d(s))$; si d_1, d_2 sont deux distances invariantes sur $\mathbb{T}$, on en déduit en intégrant sur la boule $E = b_{d_1+d_2}(s)$ que $\Delta_{d_1}(s) + \Delta_{d_2}(s) \leqslant \Delta_{d_1+d_2}(s)$. Il en résulte que $I_1(d_1) + I_1(d_2) \leqslant I_1(d_1 + d_2)$, c'est la concavité qui a été annoncée :

$$\tfrac{1}{2}\big(I_1(d_1) + I_1(d_2)\big) = I_1(\tfrac{1}{2}d_1) + I_1(\tfrac{1}{2}d_2) \leqslant I_1\big(\tfrac{1}{2}(d_1 + d_2)\big).$$

On va tirer parti de cette concavité dans le lemme qui suit.

Lemme 2. *On considère une série de Fourier aléatoire gaussienne* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(u) g_n \mathbf{e}_n$ *dont la suite* $\mathbf{a}(u) = (a_n(u))_{n\in\mathbb{Z}}$ *de coefficients scalaires dépend d'un paramètre* u *qui varie dans un espace probabilisé* U. *On suppose par ailleurs que la suite scalaire* $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, *de carré sommable, vérifie* $E_u\,|a_n(u)|^2 \leqslant |b_n|^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *; on a alors*

$$E_u\, E_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(u) g_n(\omega)\mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant (24KK' + 1)\, E_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n g_n(\omega)\mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Preuve. La preuve de l'inégalité «centrée» —de la forme $\mathrm{E}\sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t - X_0|$— sera une conséquence presque immédiate de (51) et de la concavité de la fonctionnelle I_1, le résultat définitif n'utilisera en complément que l'inégalité triangulaire. La fonctionnelle I_1 permet d'obtenir l'estimation centrée pour le processus gaussien invariant

$$X_t^{\mathbf{a}(u)} = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(u) g_n(\omega)\mathbf{e}_n, \quad t \in \mathbb{T},$$

directement à partir de la distance $d_{\mathbf{a}(u)}$ sur l'espace $T_{\mathbf{a}(u)}$ du processus : pour chaque valeur $u \in U$, en appliquant Dudley (41) puis (51), il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(u) g_n(\omega)(\mathbf{e}_n - \mathbf{1})\|_{L^\infty(\mathbb{T})} &= \mathrm{E}_\omega \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{a}(u)}(\omega) - X_0^{\mathbf{a}(u)}(\omega)| \\ \leqslant M(T_{\mathbf{a}(u)}) \leqslant K J(T_{\mathbf{a}(u)}) \leqslant 6 K I_1(d_{\mathbf{a}(u)}). \end{aligned}$$

La concavité de I_1 va fournir la clé, la majoration essentielle

$$\mathrm{E}_u\, I_1(d_{\mathbf{a}(u)}) \leqslant I_1(\mathrm{E}_u\, d_{\mathbf{a}(u)})\,;$$

on y ajoute l'inégalité banale $I_1(\mathrm{E}_u\, d_{\mathbf{a}(u)}) \leqslant I_1\big((\mathrm{E}_u\, d^2_{\mathbf{a}(u)})^{1/2}\big)$ et, à partir de (45), le calcul facile

$$\mathrm{E}_u\, d^2_{\mathbf{a}(u)} = 4 \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{E}_u\, |a_n(u)|^2 \sin^2(n d_{\mathbb{T}}/2) \leqslant 4 \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2 \sin^2(n d_{\mathbb{T}}/2) = d^2_{\mathbf{b}},$$

pour obtenir l'information cruciale $\mathrm{E}_u\, I_1(d_{\mathbf{a}(u)}) \leqslant I_1(d_{\mathbf{b}})$. D'après Fernique (43) et d'après (51) on a $I_1(d_{\mathbf{b}}) \leqslant 4K' G_{\mathbf{b}}$, sachant que

$$G_{\mathbf{b}} = \mathrm{E}_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n g_n(\omega)\mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \mathrm{E}_\omega \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{b}}(\omega)|.$$

On a donc $\mathrm{E}_u\, I_1(d_{\mathbf{a}(u)}) \leqslant 4K' G_{\mathbf{b}}$ et il en résulte «l'inégalité centrée» annoncée,

$$\mathrm{E}_u\, \mathrm{E}_\omega \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{a}(u)}(\omega) - X_0^{\mathbf{a}(u)}(\omega)| \leqslant 24KK' G_{\mathbf{b}}.$$

Pour pouvoir terminer la preuve, notons que

$$\sqrt{2/\pi}\,\big(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(u)|^2\big)^{1/2} = \mathrm{E}_\omega\, |\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(u) g_n(\omega)| = \mathrm{E}_\omega\, |X_0^{\mathbf{a}(u)}(\omega)|,$$

et

$$\sqrt{2/\pi}\,\big(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2\big)^{1/2} = \mathrm{E}_\omega\, |X_0^{\mathbf{b}}(\omega)| \leqslant \mathrm{E}_\omega \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{b}}(\omega)| = G_{\mathbf{b}}.$$

Rassemblant tout ce qui précède, on voit que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_u\,\mathrm{E}_\omega \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{a}(u)}(\omega)| \\
&\leqslant\ \mathrm{E}_u\,\mathrm{E}_\omega \sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t^{\mathbf{a}(u)}(\omega) - X_0^{\mathbf{a}(u)}(\omega)| + \mathrm{E}_u\,\mathrm{E}_\omega\,|X_0^{\mathbf{a}(u)}(\omega)| \\
&\leqslant 24KK'G_{\mathbf{b}} + \sqrt{2/\pi}\ \mathrm{E}_u \big(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(u)|^2\big)^{1/2} \\
&\leqslant 24KK'G_{\mathbf{b}} + \sqrt{2/\pi}\, \big(\mathrm{E}_u \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n(u)|^2\big)^{1/2} \\
&\leqslant 24KK'G_{\mathbf{b}} + \sqrt{2/\pi}\, \big(\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2\big)^{1/2} \leqslant (24KK'+1)\,G_{\mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

□

Preuve de (48). Complétons la preuve de l'inégalité $G_{\mathbf{c}} \leqslant CB_{\mathbf{c}}$; nous devons étudier la série de Fourier aléatoire

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, g_n\, \mathbf{1}_{\{|g_n|>M\}}\, \mathbf{e}_n\ ;$$

cette série est de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi_n(u) \mathbf{e}_n$, où $\xi_n = g_n \mathbf{1}_{\{|g_n|>M\}}$. On va traiter cette question de façon générale : les ξ_n seront des variables aléatoires réelles indépendantes et de loi symétrique, de même variance $\sigma^2 = \mathrm{E}\,\xi_n^2 < \infty$, définies sur un espace de probabilité U. Pour bien indiquer que rien de probabilistiquement sophistiqué ne sera fait avec ces (ξ_n), on pourra supposer que l'espace U est *fini*. Par analogie avec les quantités $G_{\mathbf{c}}$ et $B_{\mathbf{c}}$ posons

$$\Xi_{\mathbf{c}} = \mathrm{E}_u\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi_n(u) \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Rappelons que notre objectif définitif, au vu de la discussion avant (48), est de montrer que $\Xi_{\mathbf{c}} \leqslant \frac{1}{2} G_{\mathbf{c}}$ lorsque $\sigma = \|\xi_n\|_{L^2(U)}$ est suffisamment petit. Par la symétrie de la loi et l'indépendance des (ξ_n), la série dans $\Xi_{\mathbf{c}}$ a la même loi que la série «doublement aléatoire» $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi_n(u) \varepsilon_n(\omega) \mathbf{e}_n$, on a donc aussi

$$\Xi_{\mathbf{c}} = \mathrm{E}_u\, \mathrm{E}_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi_n(u) \varepsilon_n(\omega) \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{52}$$

D'après (**i**) appliquée pour chaque u puis intégrée en u, cette dernière expression est dominée par sa «version gaussienne» :

$$\Xi_{\mathbf{c}} \leqslant \sqrt{\pi/2}\ \mathrm{E}_u\, \mathrm{E}_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \xi_n(u) g_n(\omega) \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

On va appliquer le lemme 2 avec $a_n(u) = c_n \xi_n(u)$ et $b_n = \sigma c_n$, $n \in \mathbb{Z}$; on a bien

$$\mathrm{E}_u\, |a_n(u)|^2 = |c_n|^2\, \mathrm{E}_u\, |\xi_n(u)|^2 = \sigma^2 |c_n|^2 = |b_n|^2.$$

D'après le lemme 2,

$$\begin{aligned}
\Xi_{\mathbf{c}} &\leqslant \sqrt{\pi/2}\ \mathrm{E}_u\, \mathrm{E}_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(u) g_n(\omega) \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&\leqslant \sqrt{\pi/2}\,(24KK'+1)\ \mathrm{E}_\omega\, \|\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma c_n g_n(\omega) \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\
&= \sigma \sqrt{\pi/2}\,(24KK'+1)\, G_{\mathbf{c}}.
\end{aligned}$$

L'inégalité générale $\Xi_{\mathbf{c}} \leqslant \frac{1}{2} G_{\mathbf{c}}$ sera donc vraie dès que $\sigma \sqrt{\pi/2}\,(24KK' + 1) \leqslant 1/2$. Pour l'inégalité (48), puisque $\xi_n = g_n \mathbf{1}_{\{|g_n| > M\}}$ dans ce cas, on obtiendra le résultat, d'après (49), dès que la constante M sera assez grande pour que

$$\sqrt{M+1}\, \mathrm{e}^{-M^2/4} \sqrt{\pi/2}\,(24KK' + 1) \leqslant 1/2. \quad \square$$

Kahane dans *SRSF*$_2$ accorde beaucoup d'attention à *l'algèbre de Pisier*, qu'il mentionne dès la préface du livre et qu'il étudie sec. 15.3 —voir aussi le livre de Li et Queffélec [**LiQu**, ch. 13]—. Désignons d'abord par $C_{\text{p.s}}(\mathbb{T})$ l'espace des séries de Fourier aléatoires $R_\omega \sim \sum c_n r_n(\omega) \mathbf{e}_n$ de somme presque sûrement continue ; d'après Marcus–Pisier, on peut remplacer r_n Rademacher (Bernoulli) par g_n gaussienne, et caractériser ces séries au moyen de la fonctionnelle de Dudley–Fernique. L'algèbre de Pisier $\mathcal{P}$ est formée des fonctions $f \sim \sum c_n \mathbf{e}_n$ continues sur $\mathbb{T}$ qui sont telles que $\sum c_n r_n(\omega) \mathbf{e}_n$ soit presque sûrement continue, c'est l'intersection $C(\mathbb{T}) \cap C_{\text{p.s}}(\mathbb{T})$. Cette algèbre $\mathcal{P}$ est *homogène* : sa norme est invariante par les translations de $\mathbb{T}$, et les translatées de $f \in \mathcal{P}$ tendent vers f dans $\mathcal{P}$ quand le pas de translation tend vers 0 ; elle est strictement «intermédiaire» entre $A(\mathbb{T})$ et $C(\mathbb{T})$. Elle est aussi intermédiaire du point de vue du «calcul fonctionnel» : les fonctions lipschitziennes opèrent sur $\mathcal{P}$ [**LiQu**, th. IV.2], l'ensemble des fonctions qui opèrent sur $\mathcal{P}$ est strictement compris entre les fonctions holomorphes (les fonctions de la réciproque de Wiener–Lévy due à Katznelson) et les fonctions continues (qui opèrent sur $C(\mathbb{T})$). Kahane écrit : "[*this*] most beautiful example [...] solves completely an old problem of Y. Katznelson" (*SRSF*$_2$, Preface).

7.4. Application aux ensembles de Sidon. — On a parlé jusqu'ici d'ensembles «minces» dans le groupe $\mathbb{T}$. Il existe des notions d'ensembles minces dans $\mathbb{Z}$, celle d'ensemble de Sidon en particulier, développée par Walter Rudin [**Rudi**] en 1960. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un *ensemble de Sidon* si pour un certain $\delta > 0$, on a pour tous les coefficients scalaires (c_n) l'estimation

$$\|\textstyle\sum_{n \in \Lambda} c_n \mathbf{e}_n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \geqslant \delta \sum_{n \in \Lambda} |c_n|. \tag{53}$$

L'inégalité est l'analogue de (K_∞) sec. 3.2, qui concerne le groupe $G = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ au lieu de $\mathbb{T}$: l'ensemble de Sidon Λ y serait l'ensemble des projections $(\varepsilon_j)_{j \geqslant 0}$, sous-ensemble de l'ensemble des fonctions de Walsh (w_J) apparues après (17). Les fonctions de Walsh forment l'ensemble des caractères continus de ce groupe G, c'est-à-dire le groupe dual Γ de G, tout comme l'ensemble des $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, identifié à $\mathbb{Z}$, est le dual de $\mathbb{T}$.

Simon Szidon, mathématicien hongrois, étudie dans les années 1930 les séries trigonométriques *lacunaires*. Il écrit ses articles en allemand, certains dans la revue hongroise *Acta Math. Szeged* où ils sont signés «von S. Sidon in Budapest», sans «z» ; je n'ai pas réussi à trouver le jour de sa naissance, seulement l'année : 1892. Une suite d'entiers positifs $\Lambda = (n_k)_{k \geqslant 0}$ est lacunaire *au sens de Hadamard* s'il existe un nombre $q > 1$ tel que $n_{k+1}/n_k \geqslant q$ pour tout k. Sidon sait que Λ vérifie (53) dans ce cas, et que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est à spectre dans Λ (*i.e.*, $\widehat{f}(n) = 0$ si $n \notin \Lambda$), elle est de carré intégrable. Il montre aussi que pour toute suite (a_k) tendant vers 0, il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{f}(n_k) = a_k$ pour tout $k \geqslant 0$; en 1930, dans *Studia Math.* 2, p. 218, Stefan Banach obtient ce même résultat, par dualité à partir de la définition (53).

Walter Rudin [**Rudi**] réfère à Sidon, et reprend la question dans le cas «abstrait» de la propriété (53). Soit C_Λ le sous-espace fermé de $C(\mathbb{T})$ engendré par les $(\mathbf{e}_n)_{n\in\Lambda}$. Considérons une suite de signes $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\Lambda}$, $\varepsilon_n = \pm 1$; la forme linéaire ℓ_ε définie sur C_Λ par $\sum_{n\in\Lambda} c_n \mathbf{e}_n \mapsto \sum_{n\in\Lambda} \varepsilon_n c_n$ est continue de norme $\leqslant \delta^{-1}$ d'après (53). Par Hahn–Banach, on étend à $C(\mathbb{T})$ cette forme linéaire ; on en déduit l'existence d'une mesure (complexe) μ_ε de norme $\leqslant \delta^{-1}$ dans $M(\mathbb{T})$, telle que $\widehat{\mu}_\varepsilon(n) = \varepsilon_n$ pour $n \in \Lambda$.

Il en résulte par convolution de $f = \sum_{n\in\Lambda} c_n \mathbf{e}_n$ avec μ_ε que pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$\|\textstyle\sum_{n\in\Lambda} \varepsilon_n c_n \mathbf{e}_n\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f * \mu_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant \delta^{-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \delta^{-1}\|\textstyle\sum_{n\in\Lambda} c_n \mathbf{e}_n\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Si on sait «parler le banachique», on dit que la suite $(\mathbf{e}_n)_{n\in\Lambda}$ est *inconditionnelle* dans l'espace $L^p(\mathbb{T})$. C'est Rudin qui lance ces considérations et continue ainsi : dans l'inégalité précédente, on peut aussi bien (en posant $c'_n = \varepsilon_n c_n$) mettre les signes (ε_n) à droite, et Khintchine sous la forme (13) entraîne alors, après avoir pris la moyenne sur les signes, que

$$\|\textstyle\sum_{n\in\Lambda} c_n \mathbf{e}_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant \sqrt{p}\,\delta^{-1}\big(\textstyle\sum_{n\in\Lambda} |c_n|^2\big)^{1/2} \tag{54}$$

pour $p \geqslant 2$ [**Rudi**]. La question de la réciproque est restée posée jusqu'en 1978, résolue par Pisier [**PisS**] à l'époque du théorème de Marcus–Pisier déjà cité (le cas du groupe $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ avait été prouvé par M. et Mme Malliavin en 1967 ; la situation y est très différente). Daniel Rider avait démontré une caractérisation aléatoire des ensembles de Sidon Λ [**LiQu**, th. 5.IV.18] : il faut (trivialement) et il suffit que toutes les séries aléatoires $f^{(\omega)} \sim \sum_{n\in\Lambda} c_n r_n(\omega)\mathbf{e}_n$ presque sûrement bornées sur $\mathbb{T}$ et à spectre dans Λ aient des coefficients (c_n) absolument sommables. On peut remplacer les fonctions de Rademacher (r_n) par des gaussiennes dans le théorème de Rider (en invoquant Marcus–Pisier, mais c'est en fait beaucoup plus facile ici). Cela nous ramène au processus gaussien (44) et à Fernique–Dudley, les éléments principaux de la preuve de Pisier [**PisS**], qui se sert de plus d'un résultat de Christopher Preston.

Le cadre du théorème de Preston est celui d'un espace métrique (T, d) muni d'une mesure μ. Preston introduit deux conditions couplées : sous une certaine condition entropique sur «l'espace» (T, d, μ) et une condition de croissance quand $p \to +\infty$ de normes dans les espaces $L^p(\mu)$, condition de croissance liée à la condition entropique, il est possible de déduire la continuité de fonctions sur (T, d) du fait que cette condition de croissance (on précisera plus bas) est satisfaite. Or il se trouve que dans le cas d'une distance invariante d sur $\mathbb{T}$, de la mesure m sur $\mathbb{T}$ et de la croissance en $O(\sqrt{p})$, la condition entropique de Preston résulte de la condition de Fernique $I_0(d) < \infty$! Énonçons plus précisément le résultat de Preston dans cette situation particulière : sous la condition de Fernique $I_0(d) < \infty$, une fonction $g \in L^2(\mathbb{T})$ possède un représentant continu dès qu'on a

$$\textbf{(ii)} \qquad \|(g(s) - g(t))/d(s,t)\|_{L^p(\mathbb{T}^2)} = O(\sqrt{p}) \text{ quand } p \to \infty.$$

Cette condition (**ii**) est impliquée par

$$\textbf{(iii)} \qquad \|g_s - g_t\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant C\sqrt{p}\, d(s,t) = C\sqrt{p}\, \|g_s - g_t\|_{L^2(\mathbb{T})} \text{ pour tout } p \geqslant 2,$$

où on a posé $g_u(x) = g(x - u)$.

Supposons donc la condition (54) satisfaite et montrons, avec la version gaussienne du critère de Rider, que Λ est de Sidon : si $f^{(\omega)} \sim \sum_{n\in\Lambda} c_n g_n(\omega)\mathbf{e}_n$ est presque sûrement bornée sur $\mathbb{T}$, on sait par Fernique (43) et (46) que $I_0(d_{\mathbf{c}}) < +\infty$, la condition entropique de Preston est donc satisfaite ; l'hypothèse $O(\sqrt{p})$ dans (54) pour les fonctions à spectre dans Λ entraîne (**iii**) pour la fonction $f = \sum_{n\in\Lambda} c_n \mathbf{e}_n$, puisque $f_s - f_t$ reste à spectre dans Λ. Remarquons qu'on aurait pu remplacer c_n par $|c_n|$ sans changer $d_{\mathbf{c}}$ ni $I_0(d_{\mathbf{c}})$. Alors, pour les mêmes raisons, $\widetilde{f} = \sum_{n\in\Lambda} |c_n|\mathbf{e}_n$ «est» continue sur $(\mathbb{T}, d)$ d'après Preston, donc $\sum_{n\in\Lambda} |c_n| = \widetilde{f}(0) < \infty$. Il reste à remarquer que la continuité sur $(\mathbb{T}, d)$ est la continuité ordinaire —si $(\mathbb{T}, d)$ est séparé : il suffit que $c_1 \neq 0$—, et à appliquer Rider-gaussien.

8. Il y a trop à dire

Voici plusieurs thèmes de travaux de Kahane dont je ne dirai rien de plus qu'un titre, par manque de place mais plus souvent par ignorance du sujet :

– Dimension de Hausdorff, dimension de Fourier, ensembles de Salem (*SFAC*).
– Approximation dans $L^1(\mathbb{T})$, projections métriques, en 1972-74.
– Séries de Taylor aléatoires.
– Séries de Dirichlet en 1973, avec Queffélec en 1997 et avec Saias en 2017.
– Nombres premiers généralisés de Beurling [**KaSW**, p. 622] en 1998 et avec Saias [**KSai**] en 2016.

Pour conclure, voici deux thèmes dont je dirai un petit peu plus que le titre. D'abord, les *polynômes à coefficients unimodulaires* : on s'intéresse aux polynômes P de degré d dont tous les coefficients (complexes) $a_0, \dots, a_d$ sont de module un. On veut trouver P de sorte que le module $|P(z)|$ soit aussi constant que possible quand z parcourt le cercle unité $U \subset \mathbb{C}$; il ne peut être *vraiment* constant que si $\deg P = 0$. D'après Rudin et Harold Shapiro, il existe pour tout entier $n \geqslant 0$ un couple (P_n, Q_n) de polynômes de degré $2^n - 1$ à coefficients ± 1, tel que

$$|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}, \quad |z| = 1.$$

La construction est facile, par récurrence sur n : partant de $P_0 = Q_0 = 1$, on considère $P_n \pm z^{2^n} Q_n$ pour définir P_{n+1} et Q_{n+1}. Kahane [**KaSW**, p. 371] a montré un théorème beaucoup plus difficile, qu'il est venu présenter en voisin au séminaire d'Analyse Fonctionnelle à l'École polytechnique de Palaiseau, le 4 janvier 1980. Après des résultats de Körner et de plusieurs autres mathématiciens, il énonce : pour un certain $\alpha > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, il existe un polynôme P_n «plat» de degré n, à coefficients unimodulaires, tel que

$$(1-\varepsilon_n)\sqrt{n} \leqslant |P_n(z)| \leqslant (1+\varepsilon_n)\sqrt{n} \quad \text{si} \quad |z|=1, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n = O(n^{-\alpha}).$$

Contrairement à plusieurs résultats de Kahane que j'ai pu décrire parce que leur preuve, astucieuse, tient en une page ou deux, il y a ici une construction technique et longue, fondée sur plusieurs lemmes délicats.

Enfin, le *théorème de Gleason–Kahane–Żelazko* : si A^{-1} désigne l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Banach unitaire *complexe* A, si ℓ est une forme linéaire sur A telle que $\ell(\mathbf{1}) = 1$ et qui ne s'annule pas sur A^{-1}, alors ℓ est un caractère, autrement dit une forme linéaire *multiplicative*, $\ell(ab) = \ell(a)\ell(b)$ (Kahane et Wiesław Żelasko [**KaSW**, p. 263] et Andrew Gleason [**Glea**] indépendamment dans le cas commutatif en 1967-68, puis Żelasko en général). En d'autres termes, *un hyperplan (complexe) qui ne rencontre pas les inversibles est un idéal (bilatère) maximal.*

Le résultat ne subsiste pas dans le cas réel : si $A = C_r([0,1])$ est l'algèbre des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, un élément inversible $a \in A$ est une fonction qui ne s'annule jamais sur $[0,1]$, donc garde un signe constant et $\ell(a) := \int_0^1 a(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$; mais ℓ n'est pas un caractère.

La preuve du cas commutatif utilise une variante bien connue du théorème de Joseph Liouville pour les fonctions entières, le *théorème de la partie réelle* de Hadamard [**HadE**], [**HadP**, art. 12]. Pour tout $a \in A$, la fonction $F(z) = \ell(\mathrm{e}^{za})$, $z \in \mathbb{C}$, est entière, ne s'annule pas d'après l'hypothèse, donc elle est de la forme $\mathrm{e}^{G(z)}$. La fonction G est entière et $\operatorname{Re} G = \ln|F(z)| \leqslant \ln\|\ell\| + |z|\,\|a\|$ a une croissance au plus linéaire, donc G est linéaire par Hadamard. La comparaison des développements en série montre que $\ell(a^2) = \ell(a)^2$ et on passe à $\ell(ab)$ en écrivant $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$ (c'est le rôle de la commutativité). Dans le cas non commutatif, on a déjà ainsi $\ell(a \bullet b) = \ell(a)\ell(b)$ pour le *produit de Jordan* $a \bullet b = (ab+ba)/2$; pour régler ce cas général, Żelasko utilise des manipulations algébriques sur ce produit non associatif, élémentaires mais peu intuitives.

Références

[BKNH] A. D. Baranov, S. V. Kislyakov et N. K. Nikolski, *Victor Petrovich Havin, a life devoted to mathematics*. 50 years with Hardy spaces, 3–55, Oper. Theory Adv. Appl. 261, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.

[BarD] N. K. Bary, *Sur la nature diophantique du problème d'unicité du développement trigonométrique*, C. R. Acad. Sci. Paris 202, 1901–1903 (1936).

[BarT] N. K. Bari, *A treatise on Trigonometric Series*, authorized translation by Margaret F. Mullins, Pergamon Press, New York, 1964.

[BeHe] A. Beurling et H. Helson, *Fourier–Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand. 1, 120–126 (1953).

[Bill] P. Billard, *Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes*, Studia Math. 22, 309–329 (1963).

[Bois] P. du Bois-Reymond, *Die allgemeine Functionentheorie*. H. Laupp, Tübingen (1882).

[Bore] C. Borell, *On the integrability of Banach space valued Walsh polynomials*, Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78), p. 1–3, Lecture Notes in Math. 721, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[Bour] N. Bourbaki, Fonctions de variable réelle, Théorie élémentaire, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2007.

[CanT] G. Cantor, *Ueber einen die trigonometrische Reihen betreffenden Lehrsatz*, Journal für die reine und angew. Math. 72, 130–138 (1870).

[CanE] G. Cantor, *Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*, Journal für die reine und angew. Math. 72, 139–142 (1870).

[CanN] G. Cantor, *Notiz zu dem Aufsatze : Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*, Journal für die reine und angew. Math. 73, 294–296 (1870).

[CanA] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Annalen 5, 123–132 (1872). En français, Acta Math. 2, 336–348.

[CanF] G. Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta Math. 2, 381–408 (1883).

[CanP] G. Cantor, *De la puissance des ensembles parfaits de points*, Acta Math. 4, 381–392 (1884).

[CanW] Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Springer-Verlag, Berlin, 1932, 1980.

[CanB] Georg Cantor Briefe, Herausgegeben von Herbert Meschkowski und Winfried Nilson, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.

[Carl] L. Carleson, *Convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116, 135–157 (1966).

[Cook] R. Cooke, *Uniqueness of Trigonometric Series and Descriptive Set Theory, 1870–1985*. Arch. Hist. Exact Sci. 45, 281–334 (1993).

[DeSR] G. Debs et J. Saint-Raymond, *Ensembles boréliens d'unicité et d'unicité au sens large*, Ann. Inst. Fourier 37, n°3, 217–239 (1987).

[DhRo] J. Dhombres et J.-B. Robert, Joseph Fourier, 1768-1830. Créateur de la physique-mathématique. Collection *Un savant, une époque*, Belin, Paris 1998.

[Diri] G. L. Dirichlet, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, Journal für die reine und angew. Math. 4, 157–169 (1829).

[Dudl] R. M. Dudley, Uniform central limit theorems. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 142. Cambridge University Press, New York, 2014.

[ElHé] Y. El Hélou, *Recouvrement du tore $\mathbb{T}^q$ par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert*, C. R. Acad. Sci. Paris 287, 815–818 (1978).

[Fern] X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 1974, p. 1–96. Lecture Notes in Math. 480, Springer, Berlin, 1975.

[Four] J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Firmin Didot, Paris 1822.

[Glea] A. M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math. 19, 171–172 (1967).

[Haag] U. Haagerup, *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math. 70, 231–283 (1982).

[HadE] J. Hadamard, *Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$*, C. R. Acad. Sci. Paris 114, 1053–1055 (1892).

[HadP] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, J. Math. Pures Appl. 9, 171–215 (1893).

[Hank] H. Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen*, Tübingen 1870, Math. Annalen 20, 63–112 (1882).

[HarV] A. Harnack, *Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe*, Math. Annalen 19, 235–279 (1882).

[HarT] A. Harnack, *Théorie de la série de Fourier*, Bull. des Sc. Math. et astronomiques 6, 242–260 (1882).

[HarA] A. Harnack, *Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. II. Theil*, Math. Annalen 24, 217–252 (1884).

[Hawk] T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development. Chelsea, New York, 1975.

[HeiT] E. Heine, *Ueber trigonometrische Reihen*, J. reine angew. Math. 71, 353–365 (1870).

[HeiE] E. Heine, *Die Elemente der Functionenlehre*, J. reine angew. Math. 74, 172–188 (1872).

[Hobs] E. W. Hobson, The Theory of Functions of a real Variable & the Theory of Fourier's Series. Vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1907, 1926.

[Hoff] J. Hoffmann-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Math. 52, 159–186 (1974).

[KaSt] S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Monografje Matematyczne VI, Warszawa-Lwów, 1935.

[KaPU] J.-P. Kahane, *Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles*, Ann. Inst. Fourier 5, 39–130 (1954).

[KaMP] J.-P. Kahane, *Lectures on mean-periodic Functions*, Tata Institute of fundamental Research, Bombay, 1959.

[KaRC] J.-P. Kahane, *Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard*, C. R. Acad. Sci. Paris 248, 184–186 (1959).

[KaTF] J.-P. Kahane, *Transformées de Fourier des fonctions sommables*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, p. 114–131, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Suède 1962.

[KaFA] J.-P. Kahane, *Séries de Fourier aléatoires*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, (été 1963). Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1967.

[KaSV] J.-P. Kahane, *Sur les sommes vectorielles* $\sum \pm u_n$, C. R. Acad. Sci. Paris 259, 2577–2580 (1964).

[KaRS] J.-P. Kahane, Some random series of functions, Heath and Co. Lexington Mass. 1968; Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985, 1993.

[KaAC] J.-P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Ergebnisse der Mathematik 50, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[KaNT] J.-P. Kahane, Notice sur les titres et travaux scientifiques, 1981. En ligne à :
http://www.academie-sciences.fr/pdf/membre/Kahane_notice_1981.pdf

[KaDA] J.-P. Kahane, *Un parcours sur cinquante ans*, Discours à l'Académie des Sciences, 28 juin 1999. En ligne à :
http://www.academie-sciences.fr/pdf/discours/s280699_kahane.pdf

[KaPM] J.-P. Kahane, *Le plaisir des mathématiques*, RMS 116-1, (2005).

[KaSW] J.-P. Kahane, Selected Works. Jean-Pierre Kahane, edited by Roger C. Baker. Kendrick Press, Heber City, Utah, 2009.

[KSai] J.-P. Kahane et É. Saias, *Sur l'exemple d'Euler d'une fonction complètement multiplicative à somme nulle*, C. R. Acad. Sci. Paris 354, 559–561 (2016).

[KSal] J.-P. Kahane et R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris 1963, 1994.

[KLem] J.-P. Kahane et P. G. Lemarié, Séries de Fourier et ondelettes, Cassini, Paris 1998, 2016.

[Katz] Y. Katznelson, *Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes*, C. R. Acad. Sci. Paris 247, 404–406 (1958).

[Kauf] R. Kaufman, *A functional method for linear sets*, Israel J. Math. 5, 185–187 (1967).

[Kers] R. Kershner, *On singular Fourier–Stieltjes transforms*, Amer. J. Math. 58, 450–452 (1936).

[Kisl] S. V. Kislyakov, *Fourier coefficients of boundary values of functions that are analytic in the disc and bidisc* (en russe), Spectral theory of functions and operators, II. Trudy Mat. Inst. Steklov. 155, 77–94 (1981); traduction anglaise Proc. Steklov Inst. Math. 155, 75–91 (1983).

[Körn] T. W. Körner, Fourier Analysis. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[KoOl] G. Kozma et A. M. Olevskiĭ, *Cantor uniqueness and multiplicity along subsequences*, disponible sur arXiv : 1804.06902. Algebra i Analiz 32, (2), 85–106 (2020).

[Kwap] S. Kwapień, *A theorem on the Rademacher series with vector valued coefficients*, Probability in Banach spaces (Proc. First Internat. Conf., Oberwolfach, 1975), p. 157–158. Lecture Notes in Math., Vol. 526, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[Lapl] P. S. Laplace, *Mémoire sur les mouvements de la lumière dans les milieux diaphanes*, Mémoires de l'Académie des sciences, I$^{\text{re}}$ Série, T. X, (1810) ; dans Œuvres complètes, t. XII, 267–298.

[LaOl] R. Latała et K. Oleszkiewicz, *On the best constant in the Khinchin–Kahane inequality*, Studia Math. 109, 101–104 (1994).

[LebI] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, Paris 1904, 1928.

[LebS] H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Gauthier-Villars, Paris 1906.

[Lévy] P. Lévy, *Sur la convergence absolue*, Compositio Math. 1, 1–14 (1934).

[LiQu] D. Li et H. Queffélec, Introduction à l'étude des espaces de Banach, Société Mathématique de France, Paris 2004. *Traduction anglaise augmentée* : Introduction to Banach Spaces : Analysis and Probability, 2 vol., Cambridge Univ. Press, Cambridge 2018.

[LPiq] F. Lust-Piquard, *On the coefficient problem : a version of the Kahane–Katznelson–de Leeuw theorem for spaces of matrices*, J. Funct. Anal. 149, 352–376 (1997).

[MalT] P. Malliavin, *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 228, 1467–1469 (1949).

[MalS] P. Malliavin, *Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite*, C. R. Acad. Sci. Paris 248, 2155–2157 (1959).

[MalR] P. Malliavin, *Ensembles de résolution spectrale*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, p. 368–378, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Suède 1962.

[MauR] B. Maurey, *Le séminaire rouge*, Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, Astérisque 131, 35–40 (1985). Repris dans la Gazette des mathématiciens, Laurent Schwartz, édition spéciale 2003.

[MauG] B. Maurey, *Fourier, un homme, plusieurs vies*, Gazette des mathématiciens 158, 7–24 (2018).

[Menc] D. E. Menchoff, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C. R. Acad. Sci. Paris 163, 433–436 (1916).

[Meye] Y. Meyer, *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques*, Astérisque 1, 1–85. Société Mathématique de France (1973, 2017).

[Naza] F. L. Nazarov, *The Bang solution of the coefficient problem*, Algebra i Analiz 9, 272–287 (1997) (en russe) ; traduction dans St. Petersburg Math. J. 9, 407–419.

[Piat] I. Piatetski-Shapiro, *An addition to the work : On the problem of uniqueness of the expansion of a function into a trigonometric series*, (en russe), Uchen. Zap. MGU 165, Math. 7 79–97 (1954). En anglais dans Selected works of Ilya Piatetski-Shapiro, AMS, 2000.

[PisK] G. Pisier, *Les inégalités de Khintchine–Kahane, d'après C. Borell*, Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach (1977–1978), Exp. No. 7, École polytech., Palaiseau, 1978.

[PisE] G. Pisier, *Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues*, Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach (1977–1978), Exp. No. 17-18, École polytech., Palaiseau, 1978.

[PisS] G. Pisier, *Ensembles de Sidon et processus gaussiens*, C. R. Acad. Sci. Paris 286, 671–674 (1978).

[Quef] H. Queffélec, *L'inégalité de Vinogradov et ses conséquences*, Analyse harmonique, Exp. No. 4, Publ. Math. Orsay 81, 8, Univ. Paris XI, Orsay, 1981.

[RajU] A. Rajchman, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fundamenta Math. 3, 287–302 (1922).

[RajM] A. Rajchman, *Sur la multiplication des séries trigonométriques et sur une classe remarquable d'ensembles fermés*, Math. Annalen 95, 389–408 (1926).

[RieD] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Dreizehnten Band der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1867.

[RieR] B. Riemann, *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique*, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques 5, 20–48 (1873).

[Rudi] W. Rudin, *Trigonometric series with gaps*, J. Math. Mech. 9, 203–227 (1960).

[SalA] R. Salem, Algebraic Numbers and Fourier Analysis, Heath and Co, Boston 1963.

[SalW] R. Salem, *Œuvres mathématiques*, Hermann, Paris 1967, 645 pp.

[ScAU] L. Scheeffer, *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven*, Acta Math. 5, 49–82 (1884).

[ScZT] L. Scheeffer, *Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Acta Math. 5, partie I : 183–194 ; partie II : 279–296 (1884).

[SchT] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. of Math. 48, 857–929 (1947).

[SchD] L. Schwartz, *Désintégration régulière d'une mesure par rapport à une famille de tribus*, C. R. Acad. Sci. Paris 266, 424–425 (février 1968).

[SchR] L. Schwartz, Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Tata Institute of Fund. Res. Studies in Mathematics, n° 6. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay by Oxford University Press, London, 1973. xii+393 pp.

[SchG] L. Schwartz, *Geometry and probability in Banach spaces. Notes by Paul R. Chernoff*, Lecture Notes in Mathematics 852. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[SchM] L. Schwartz, *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris 1997.

[Smit] H. J. S. Smith, *On the Integration of Discontinuous Functions*, London Math. Soc. Proc. 6, 140–153 (1875).

[Szar] S. J. Szarek, *On the best constants in the Khinchin inequality*, Studia Math. 58, 197–208 (1976).

[VPou] Ch.-J. de la Vallée-Poussin, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Bull. de l'Acad. Royale de Belgique, Classe des Sciences, 702–718 (1912).

[Vitu] A. Vitushkin, *On representations of functions by means of superpositions and related topics*, L'enseignement mathématique 23, 255–320 (1977).

[Wien] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933.

[Wild] M. de Wilde, *Sur le théorème du graphe fermé*, C. R. Acad. Sci. Paris 265, 376–379 (1967)

[Youn] W. H. Young, A Note on trigonometrical series, Messenger of Math. 38, 44–48 (1909).

[Zygm] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2$^{\text{d}}$ ed, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.

Repères chronologiques

John Wallis	1616-1703	Abraham de Moivre	1667-1754
Brook Taylor	1685-1731	Alexandre Vandermonde	1735-1796
Joseph-Louis Lagrange	1736-1813	Gaspard Monge	1746-1818
Pierre-Simon Laplace	1749-1827	Adrien-Marie Legendre	1752-1833
Joseph Fourier	1768-1830	Napoléon Bonaparte	1769-1821
Marie-Sophie Germain	1776-1831	Siméon Denis Poisson	1781-1840
Friedrich Wilhelm Bessel	1784-1846	Augustin Louis Cauchy	1789-1857
Carl Gustav Jacobi	1804-1851	Gustav Dirichlet	1805-1859
Joseph Liouville	1809-1882	Karl Weierstrass	1815-1897
Eduard Heine	1821-1881	Leopold Kronecker	1823-1891
Bernhard Riemann	1826-1866	Henry John Stephen Smith	1826-1883
Richard Dedekind	1831-1916	Paul du Bois-Reymond	1831-1889
Charles Méray	1835-1911	Hermann Hankel	1839-1873
Wilhelm Thomé	1841-1910	Hermann Schwarz	1843-1921
Georg Cantor	1845-1918	Ulisse Dini	1845-1918
Gösta Mittag-Leffler	1846-1927	Axel Harnack	1851-1888
Andreï Markov	1856-1922	Ernest William Hobson	1856-1933
Thomas-Joannes Stieltjes	1856-1894	Ludwig Scheeffer	1859-1885
Otto Hölder	1859-1937	William Henry Young	1863-1942
Hermann Minkowski	1864-1909	Jacques Hadamard	1865-1963
Charles-Jean de la Vallée-Poussin	1866-1962	Dmitri Egorov	1869-1931
Émile Borel	1871-1956	René Baire	1874-1932
Henri Lebesgue	1875-1941	Godfrey Harold Hardy	1877-1947
Hans Hahn	1879-1934	Frédéric (Frigyes) Riesz	1880-1956
Lipót Fejér	1880-1959	Serge Bernstein	1880-1968
Nicolas Lusin	1883-1950	Arnaud Denjoy	1884-1974
John Edensor Littlewood	1885-1977	Paul Lévy	1886-1971
Hugo Steinhaus	1887-1972	Aleksander Rajchman	1890-1940
Stefan Banach	1892-1945	Hans Adolph Rademacher	1892-1969
Dmitrii Menchoff	1892-1988	Torsten Carleman	1892-1949
Simon Szidon (Sidon)	1892-1941	Alexandre Khintchine	1894-1959
Mikhail Souslin	1894-1919	Norbert Wiener	1894-1964
Joseph Leonard Walsh	1895-1973	Raphaël Salem	1898-1963
Szolem Mandelbrojt	1899-1983	Antoni Zygmund	1900-1992
Nina Bary	1901-1961	Tirukkanapuram Vijayaraghavan	1902-1955
Andreï Kolmogorov	1903-1987	Jean Delsarte	1903-1968
Henri Cartan	1904-2008	Arne Beurling	1905-1986
Raymond Paley	1907-1933	Charles Pisot	1910-1984
Jósef Marcinkiewicz	1910-1940	Israel Gelfand	1913-2009
Laurent Schwartz	1915-2002	Aryeh Dvoretzky	1916-2008
Harry Pollard	1919-1985	Walter Rudin	1921-2010
Andrew M. Gleason	1921-2008	David Slepian	1923-2007
Benoît Mandelbrot	1924-2010	Paul Malliavin	1925-2010
Jean-Pierre Kahane	1926-2017	Henry Helson	1927-2010

Petr Lavrentyevich Ul'yanov	1928-2006	Ilya Piatetski-Shapiro	1929-2009
Karel de Leeuw	1930-1978	Carl Herz	1930-1995
Anatoli Vitushkin	1931-2004	Victor Havin	1933-2015
Paul-André Meyer	1934-2003	Lawrence Shepp	1936-2013
Stanislav A. Vinogradov	1941-1997	Jørgen Hoffmann-Jørgensen	1942-2017
Uffe Haagerup	1949-2015	Jean Bourgain	1954-2018

B. Maurey, Équipe d'analyse fonctionnelle de l'IMJ-PRG, Sorbonne Université
E-mail : bernard.maurey@imj-prg.fr