Cantor et l'hypothèse du continu

24 mars 2021, Champs-virtuels-sur-Marne

Bernard Maurey

Collaborateur bénévole, IMJ–PRG, Sorbonne Université

https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/

Georg Cantor, vers 1870

(1845–1918)

Das Wesen der Mathematik
liegt in ihrer Freiheit.
G. Cantor

(1883)

DE AEQUATIONIBUS SECUNDI GRADUS INDETERMINATIS.

DISSERTATIO INAUGURALIS

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA

BEROLINENSI

PRO

SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE CAPESSENDIS

DIE XIV. M. DECEMBRIS A. MDCCCLXVII (1867)

H. L. Q. S.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

GEORGIUS CANTOR

PETROPOLITANUS.

ADVERSARII ERUNT:

M. SIMON, DR. PHIL.
M. HENOCH, DR. PHIL.
E. LAMPE, DR. PHIL.

BEROLINI
TYPIS CAROLI SCHULTZII
KOMMANDANTEN-STRASSE.

Université de Berlin

Les professeurs de maths :

Ernst Kummer (1810–1893)

Leopold Kronecker (1823–1891)

Karl Weierstrass (1815–1897)

quelques PhDs
sous leurs directions :

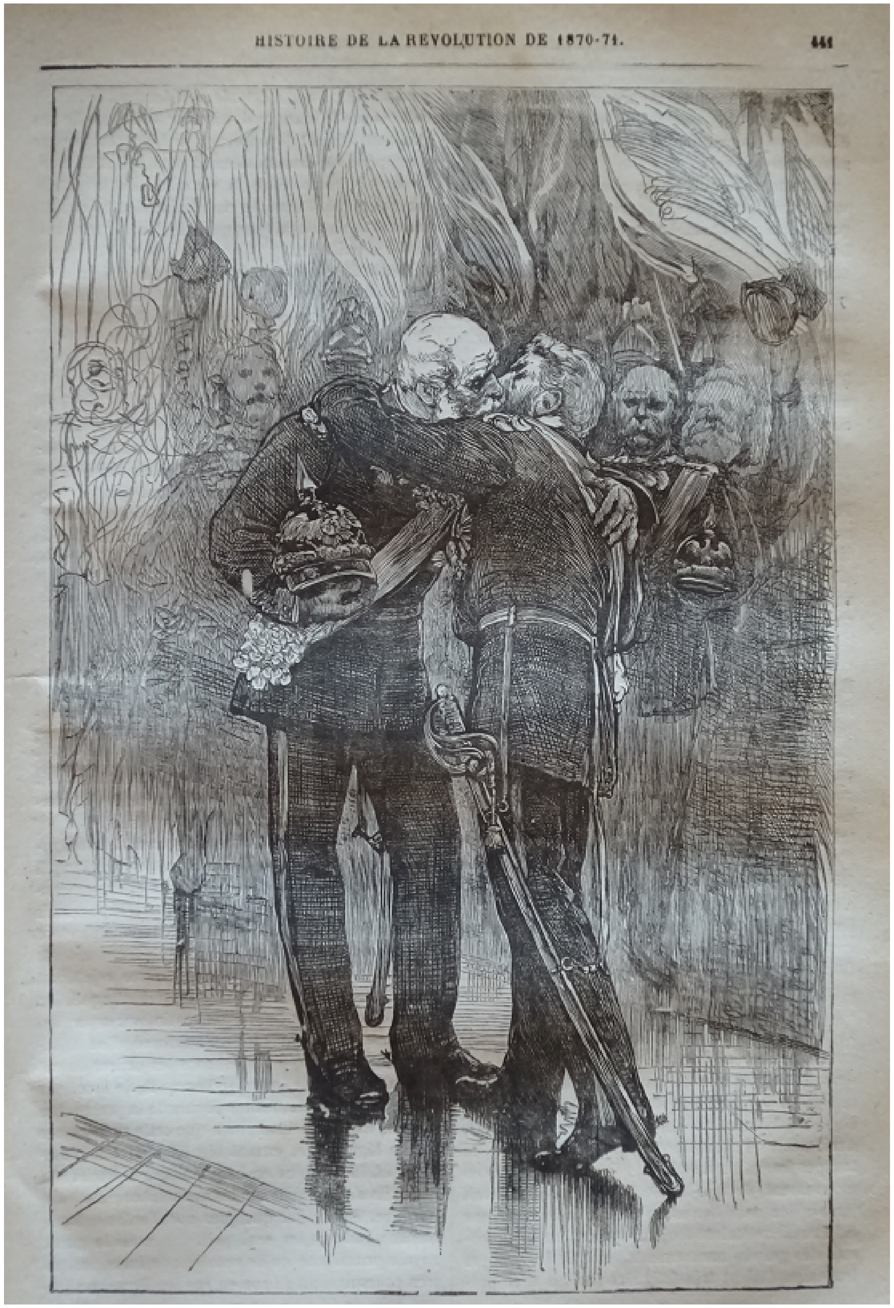
Christoffel (56), Fuchs (58),
Schwarz (64), Cantor (67),
Frobenius (70), Killing (72),
Kovalevskaya (74), Schoenflies (77),
Runge (80), Kneser (84),
Hensel (84), Lerch (85),

page de couverture de
la thèse de Cantor


Königsberg (Kaliningrad)
Memel (de nos jours : Klaipėda en Lituanie)
Berlin
LE SECOND REICH
1871-1918
Royaume de Prusse
Danemark
Schleswig Holstein
Mecklembourg
Poméranie
Prusse Occidentale
Prusse Orientale
Hanovre
Brandebourg
Posnanie
Berlin
Saxe
SAXE
Westphalie
Nassau
Hesse
Thuringe
Royaume de Saxe
Silésie
Rhénanie
Bavière
Alsace
Lorraine
Bade
Wurtemberg
Royaume de Bavière
Pays Bas
Belgique
FRANCE
Suisse
Empire Austro - Hongrois
Empire Russe
1 Oldenbourg
2 Lauenbourg
3 Lubeck
4 Hambourg
5 Brème
6 Schaumbourg
7 Lippe Detmold
8 Waldeck
9 Braunschweig
10 Hesse Kassel
11 Anhalt
12 Strelitz

LE SIÈGE DE PARIS. — Prise de Brie-sur-Marne, le 30 novembre 1870.

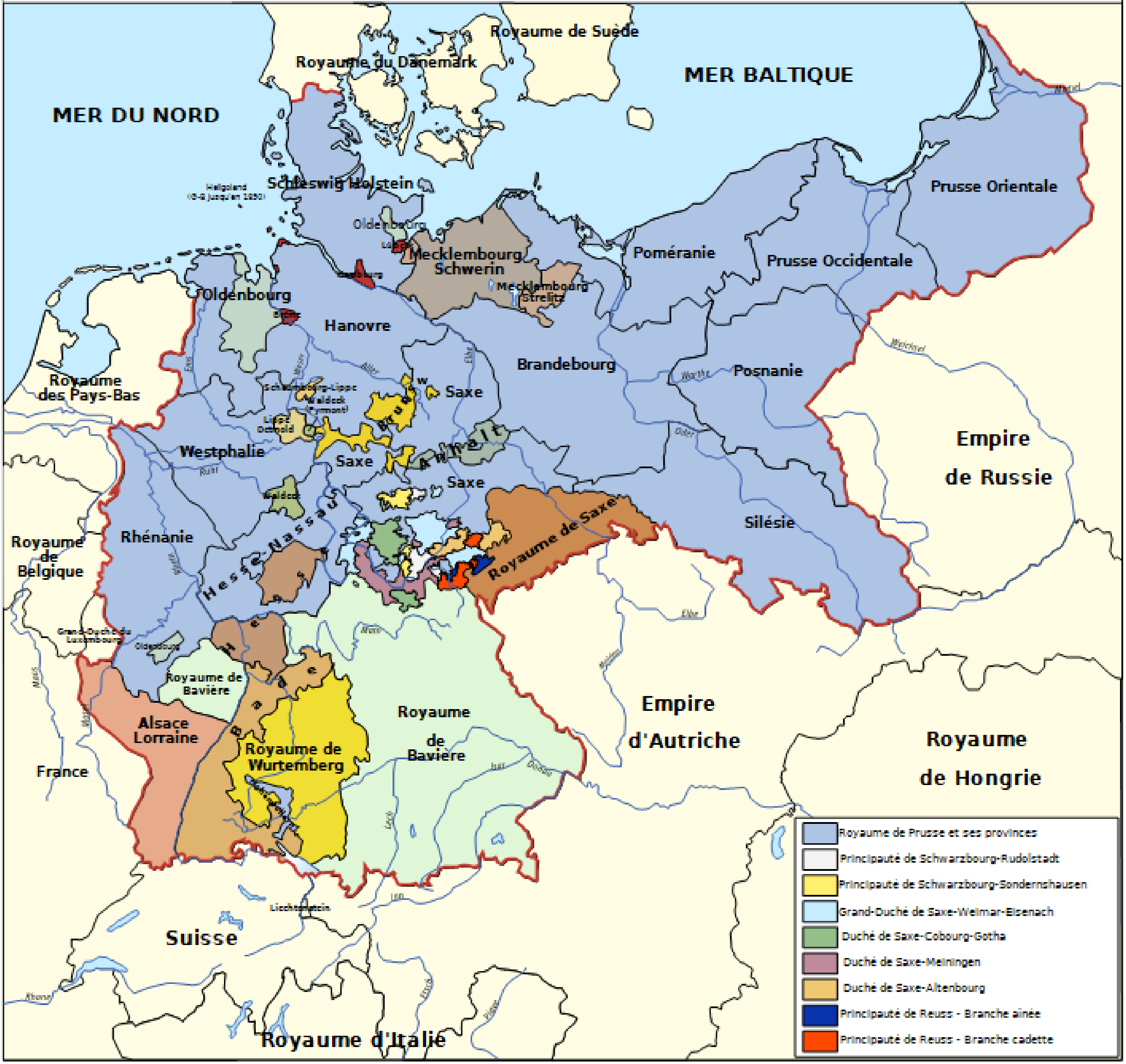
Le siège de Paris – Prise de Bry-sur-Marne, le 30 novembre 1870



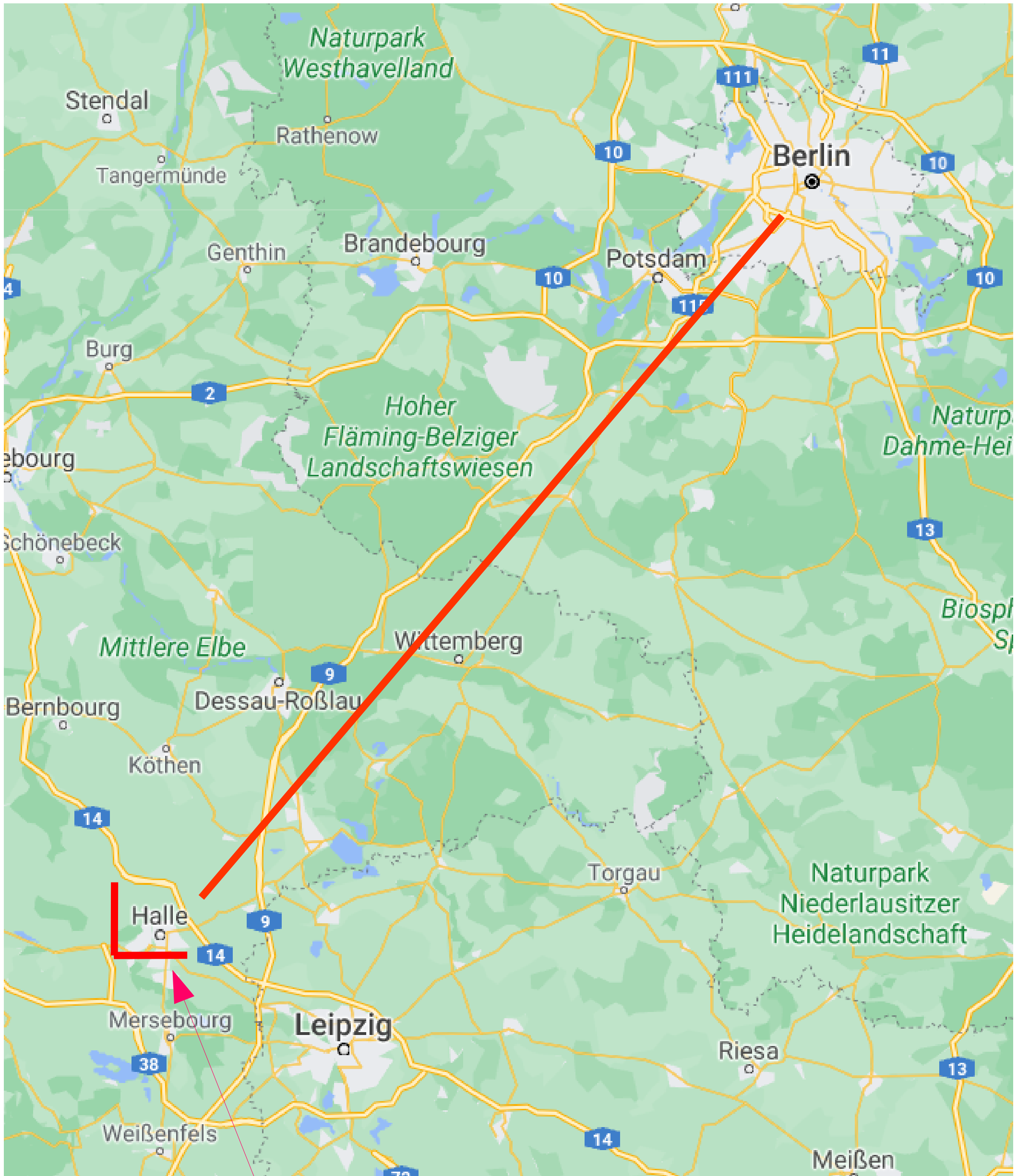
Le roi de Prusse Guillaume I^er^ devient Empereur d'Allemagne à Versailles dans la Galerie des Glaces du château,

le 18 janvier 1871

L'EMPIRE ALLEMAND
1871 - 1918



À Halle : habilitation de Cantor au printemps 1869



Halle (environ 150 km de Berlin à vol d'oiseau)

Eduard Heine (1821–1881)

professeur titulaire à Halle, il y accueille le jeune Cantor

Nombres réels (autour de 1870)

Karl Weierstraß (1815–1897)

nombres réels
et propriétés des
fonctions continues

Charles Méray (1835–1911)

Georg Cantor (1845–1918)

réels définis par des
suites de Cauchy

Richard Dedekind (1831–1916)

réels par coupures

Eduard Heine (1821–1881)

fait le point, dans un
article assez connu

handlung auf die Fundamentalsätze der Functionenlehre zu beziehen, welche mich dennoch zur Veröffentlichung der gegenwärtigen veranlasste, in der ich schliesslich diese Sätze beweise.

Zu besonderem Danke bin ich dem Herrn *Cantor* in Halle für seine mündlichen Mittheilungen verpflichtet, welche einen bedeutenden Einfluss auf die Gestaltung meiner Arbeiten ausübten, indem ich von ihm den Gedanken entlehnte, die allgemeinen Zahlen vermittelst jener besonders geeigneten Reihen einzuführen, die hier (A, §. 1, Def. 1) Zahlenreihen genannt werden. Es scheint mir dies eine, besonders für die Anwendungen auf die Functionenlehre (B, §. 2, Lehrs. 1), glückliche Fortbildung der ursprünglichen Einführungsart, bei welcher die allgemeineren Zahlen durch die in ihnen enthaltenen Vielfachen gewisser Grössen in unendlicher Anzahl bestimmt werden. Die Berechtigung, das durch die Reihen Eingeführte als Zahlengrösse zu betrachten, findet Herr *Cantor* darin, dass es möglich sei, auch hier die Begriffe des Grösser-, Kleiner- und Gleichseins festzustellen.

Die Frage, was eine Zahl sei, beantworte ich, wenn ich nicht bei den rationalen positiven stehen bleiben will, nicht dadurch dass ich die Zahl be-

Eduard Heine, « Die Elemente der Functionenlehre » (1872)

(c'est l'article qui contient le « théorème de Heine » sur la continuité uniforme)

Séries trigonométriques

Série trigonométrique,

$$\text{(T)} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \qquad x \text{ variable réelle,}$$

coefficients a_n, b_n réels.

de nos jours, on écrit plus souvent :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\, x}$$

Série trigonométrique,

$$\text{(T)} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \qquad x \text{ variable réelle,}$$

coefficients a_n, b_n réels.

Leonhard Euler (1707–1783)

Daniel Bernoulli (1700–1782)

Série trigonométrique,

$$\text{(T)} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

x variable réelle, coefficients a_n, b_n réels.

$$\boxed{\sin(-u) = -\sin(u), \qquad \cos(-u) = \cos(u)}$$

$$\text{(S)} \qquad \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

pour simplifier l'exposé on pourra, à l'occasion,
se restreindre ici à une série de fonctions sinus

Exemple (très joli je trouve) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

par le changement de variable

$$x \longrightarrow \pi - x$$

on obtient aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

cette série converge pour tout x

Euler :

(vers 1750 ?)

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} \qquad \text{si } |x| < \pi$$

pourrait-on exprimer la même fonction avec une ***autre*** série trigo ?

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

Leibniz vers 1675

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \cdots$$

Série trigonométrique,

$$\text{(T)} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \qquad x \text{ variable réelle,}$$

coefficients a_n, b_n réels.

Joseph Fourier (1768–1830) (1807)
Peter Gustav Dirichlet (1805–1859) (1829)
Bernhard Riemann (1826–1866) (1854)

Une fonction de Weierstrass (1872)

$$x \mapsto \sum_{n \geqslant 0} 2^{-n} \cos(5^n x)$$

continue, nulle part dérivable,
impossible à dessiner :
ça vibre tout le temps.

Premiers travaux trigonométriques de Cantor :

Cantor, G.: *Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*. Journal f. reine und angew. Math. *72* (1870), 130–138.

deux articles à la suite l'un de l'autre dans le « Journal » :

Cantor, G.: *Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*. Journal f. reine und angew. Math. *72* (1870), 139–142.

Cantor, G.: *Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f (x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*. Journal f. reine und angew. Math. *72* (1870), 139–142.

Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 73, S. 294—296 (1871).]

Théorème d'unicité de Cantor

Si la série (T) converge pour tout x réel et

$$\text{si} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) = 0$$

pour tout x réel, alors tous les coefficients sont nuls,

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0, \qquad b_1 = \ldots = b_n = \ldots = 0.$$

aucune autre hypothèse que la convergence pour tout x

par différence : si f(x) = g(x) pour tout x et si f et g sont chacune représentable en tout point x par une série trigonométrique, alors . . .

dans le premier des deux articles successifs
mentionnés précédemment on trouve le

Lemme de Cantor :

(intervalle ouvert)

si pour tout x d'un intervalle ouvert non vide (a, b) on a

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

(*)

alors les coefficients tendent vers 0,

$$a_n \underset{n}{\longrightarrow} 0, \qquad b_n \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

(en particulier, ces coefficients sont donc bornés)

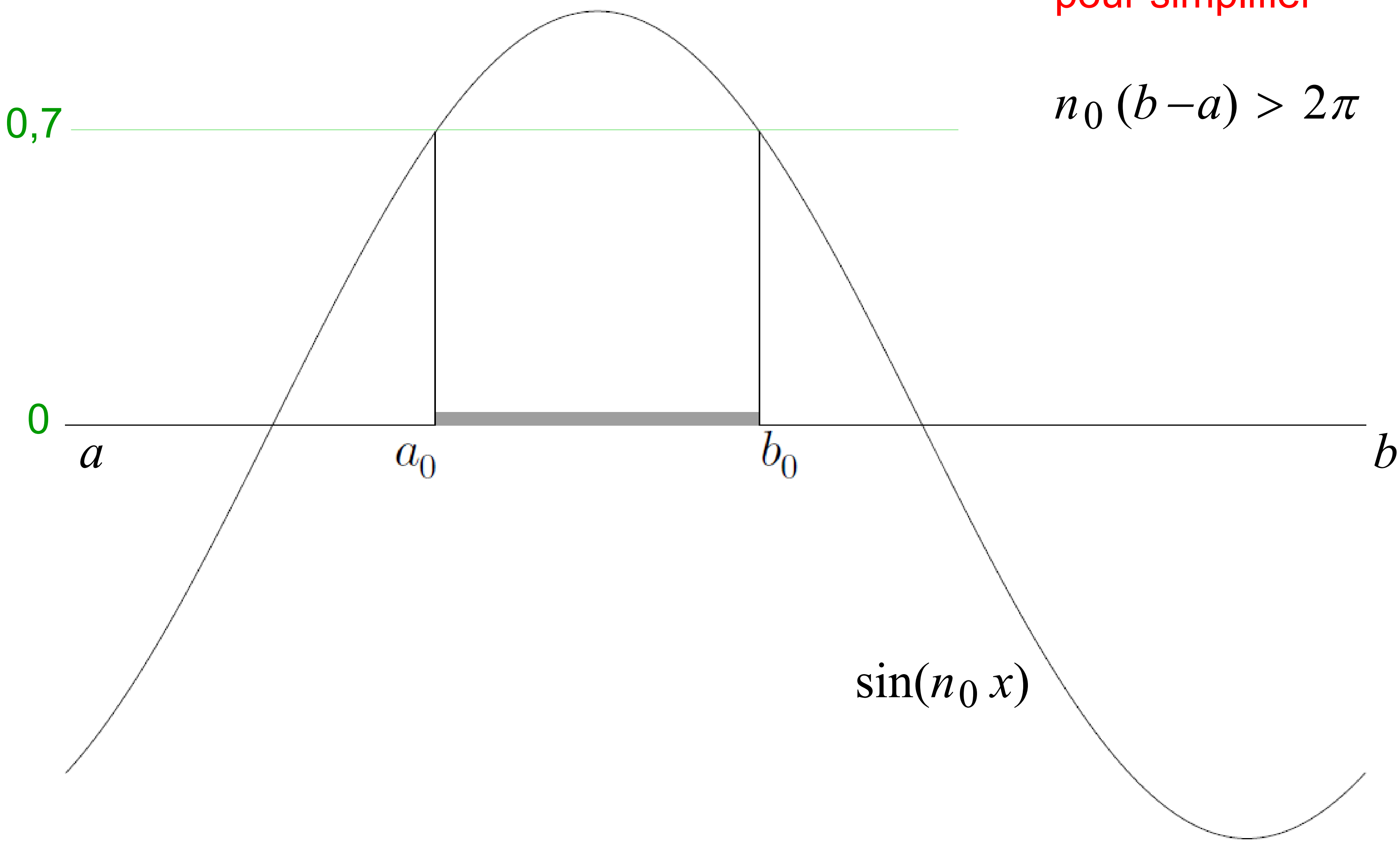
(noter que : si la série trigonométrique (T) converge
au point x , son terme général tend vers 0)

(*)

Lemme de Cantor :

fonctions sinus
pour simplifier

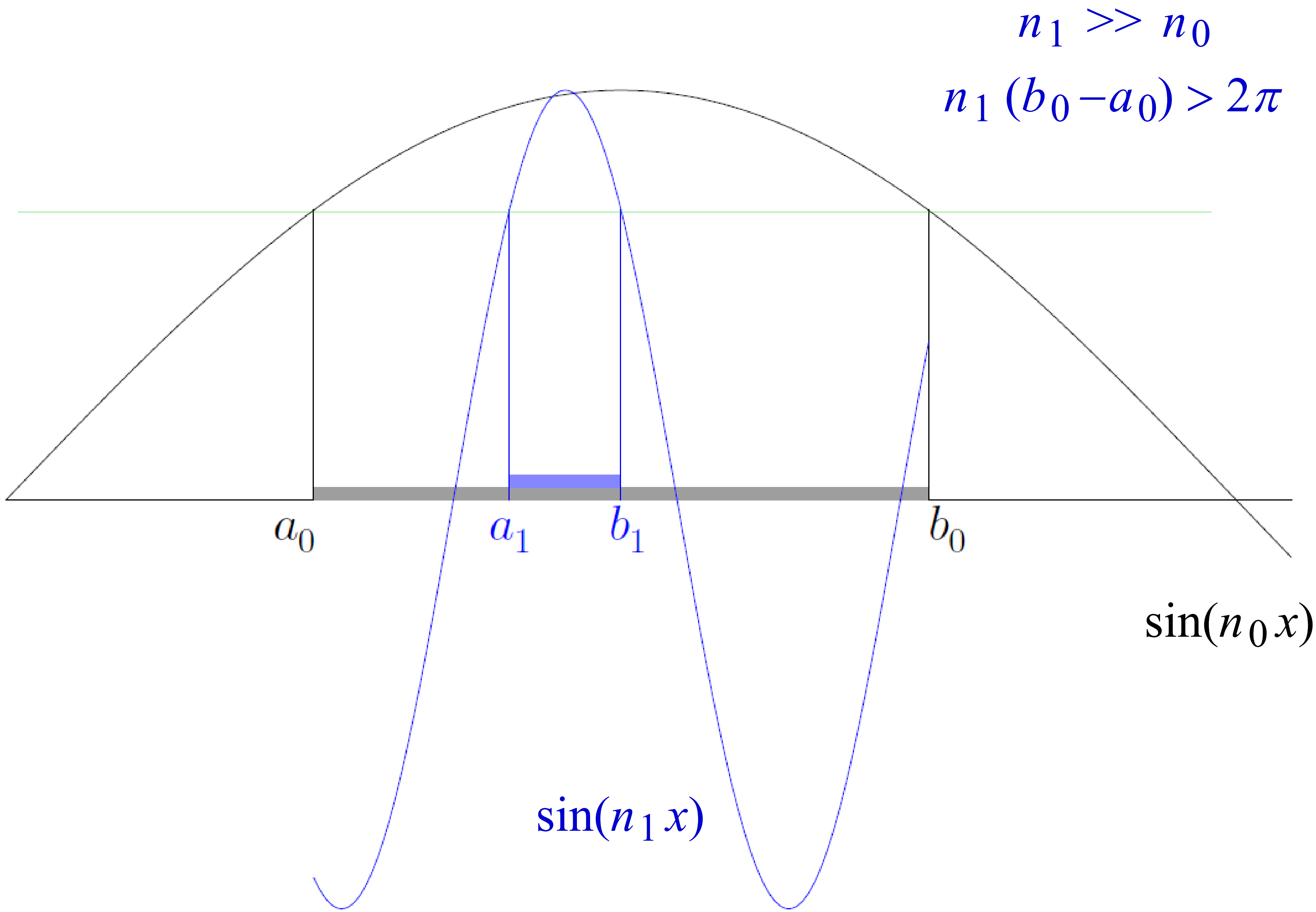
$n_0\,(b-a) > 2\pi$



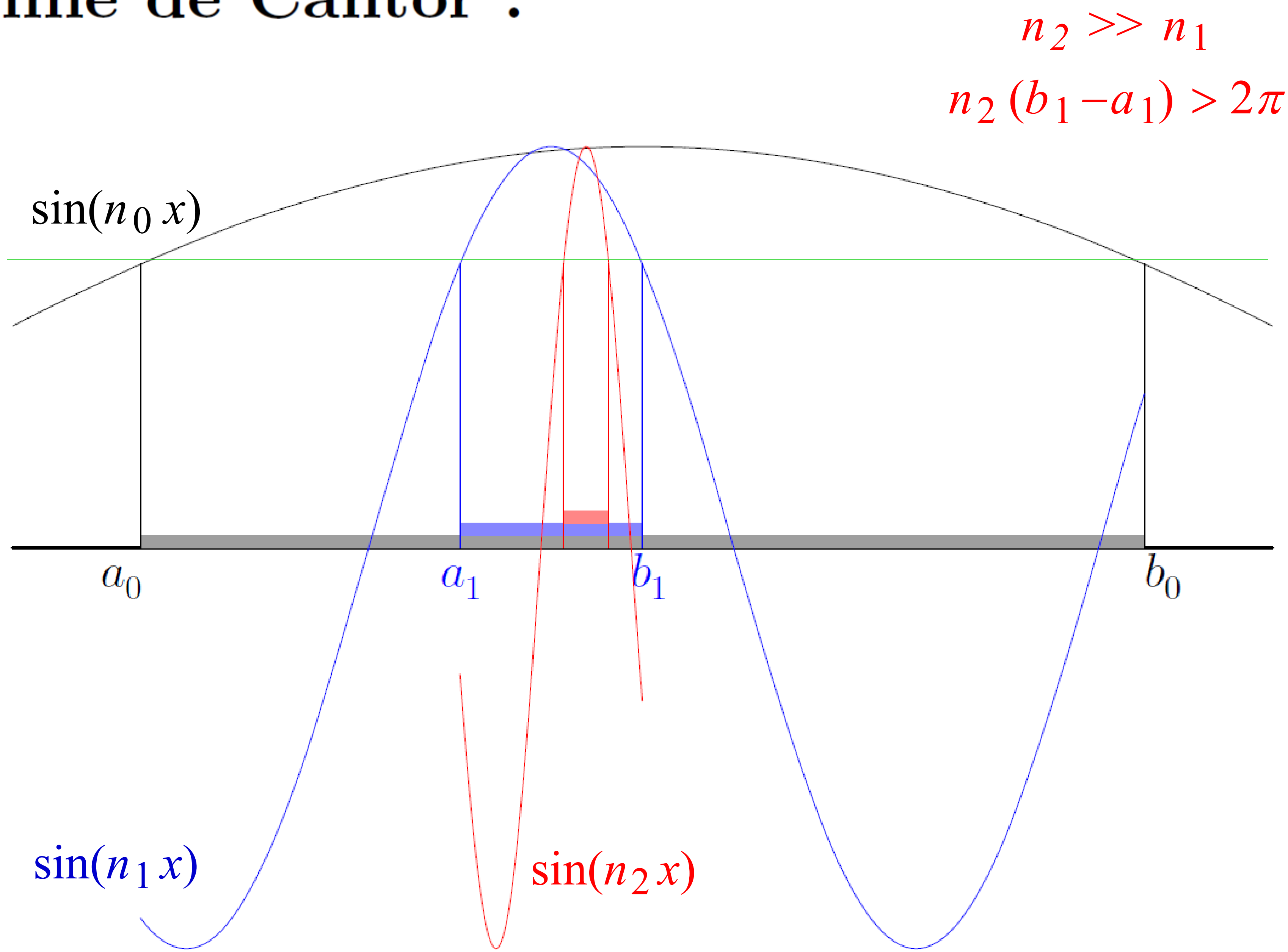
quand n est grand, la période de $\sin(n\,x)$
devient petite, le motif de base se répète plus vite

période $2\,\pi\,/\,n$

Lemme de Cantor :



Lemme de Cantor :



La suite de segments emboîtés détermine un nombre réel Ω

Preuve du

Lemme de Cantor :

pour tout intervalle (a, b) non vide et pour toute suite (n_j), il existe une sous-suite (n_{j_k}) et un nombre réel $\Omega \in (a, b)$ tels que

$$\sin(n_{j_k}\Omega) \geqslant 1/2 \quad \text{pour tout } k.$$

Preuve du

Lemme de Cantor :

(limitée à des fonctions sinus)

pour tout intervalle (a, b) non vide et pour toute suite (n_j), il existe une sous-suite (n_{j_k}) et un nombre réel $\Omega \in (a, b)$ tels que

$$\sin(n_{j_k}\Omega) \geqslant 1/2 \quad \text{pour tout } k.$$

Si $b_n \sin(nx)$ tend vers 0 pour tout $x \in (a, b)$,

mais si b_n ne tendait pas vers zéro, on aurait

$$|b_{n_j}| \geqslant \delta > 0 \text{ pour une sous-suite,}$$

alors

$$|b_{n_{j_k}} \sin(n_{j_k}\Omega)| \geqslant \delta/2 \qquad \text{pour tout } k$$

serait une contradiction.

Fin de la preuve du lemme $\square$

Pour passer du *lemme de Cantor*
au *théorème de Cantor* **:** Cantor va utiliser des

Résultats obtenus par Riemann dans son Habilitationsschrift de 1854, document publié peu après sa mort en 1866 :

(résultats limités ici à des fonctions sinus, pour simplifier)

Posons :

(R) $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$ (avec des coeff. b_n bornés)

Pour chaque x fixé **:**

si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ converge, alors

$$« \, F''(x) \, » = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Résultats obtenus par Riemann dans son Habilitationsschrift de 1854, document publié peu après sa mort en 1866 :

$$\text{(R)} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

$$\text{« } \mathrm{F}''(x) \text{ »} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

mais ce n'est pas la « vraie » dérivée seconde !

$$\text{« } \mathrm{F}''(x) \text{ »} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{F}(x-h) - 2\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x+h)}{h^2}$$

si la « vraie » dérivée seconde existe, elle a la même valeur que la « pas vraie »

Preuve du théorème d'unicité de Cantor

Supposons avec Cantor que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0$$

pour tout x d'un intervalle ouvert $\underline{(a, b)}$ non vide,

où $a < b$.

ce cas sera utile plus loin ;
mais on veut vraiment [0, 2 π]
pour conclure ici, au lieu de (a, b)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0, \qquad x \in (a,b).$$

(lemme de Cantor)

Les (b_n) tendent vers 0, ils sont donc bornés. Considérons avec Riemann

$$\text{(R)} \qquad\qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}.$$

La fonction F est continue et 2π-périodique.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0, \quad x \in (a,b),$$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}.$$

D'après Riemann, $\underline{\text{« } \mathrm{F}''(x) \text{ »} = -f(x) = 0}$ pour tout $x \in (a,b)$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0, \quad x \in (a, b).$$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2},$$

on a « $\mathrm{F}''(x)$ » $= 0$ pour tout $x \in (a, b)$;

(dans une lettre) Hermann Schwarz montre à Cantor que :

$$\mathrm{F} \text{ est affine sur } (a, b), \quad \underline{\mathrm{F}(x) = cx + d}.$$

Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) ;
ami de Cantor à l'époque

Gardons en mémoire pour plus tard
le cas $a < b$ quelconque, mais
revenons au véritable objectif, en
supposant la convergence « partout » :

Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0$$

pour tout x, alors

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

est affine sur $\mathbb{R}$, $\quad \mathrm{F}(x) = cx + d$

Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = 0$$

pour tout x, alors

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

est affine sur $\mathbb{R}$, et périodique, donc constante, donc nulle !

(prendre $x = 0$)

Pour tout x,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) = 0\,;$$

(Fourier, Dirichlet)

dans le cas d'une fonction continue F on sait calculer ses « coefficients de Fourier » par une intégrale :

$$\frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

$\square$

Rappel :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

on a posé

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

on a dit qu'on voulait garder en
mémoire ce résultat intermédiaire,

Retenons :

si « $f(x)$ est défini » ET $f(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b)$,
alors F est affine sur (a, b).

où on a posé :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,; \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

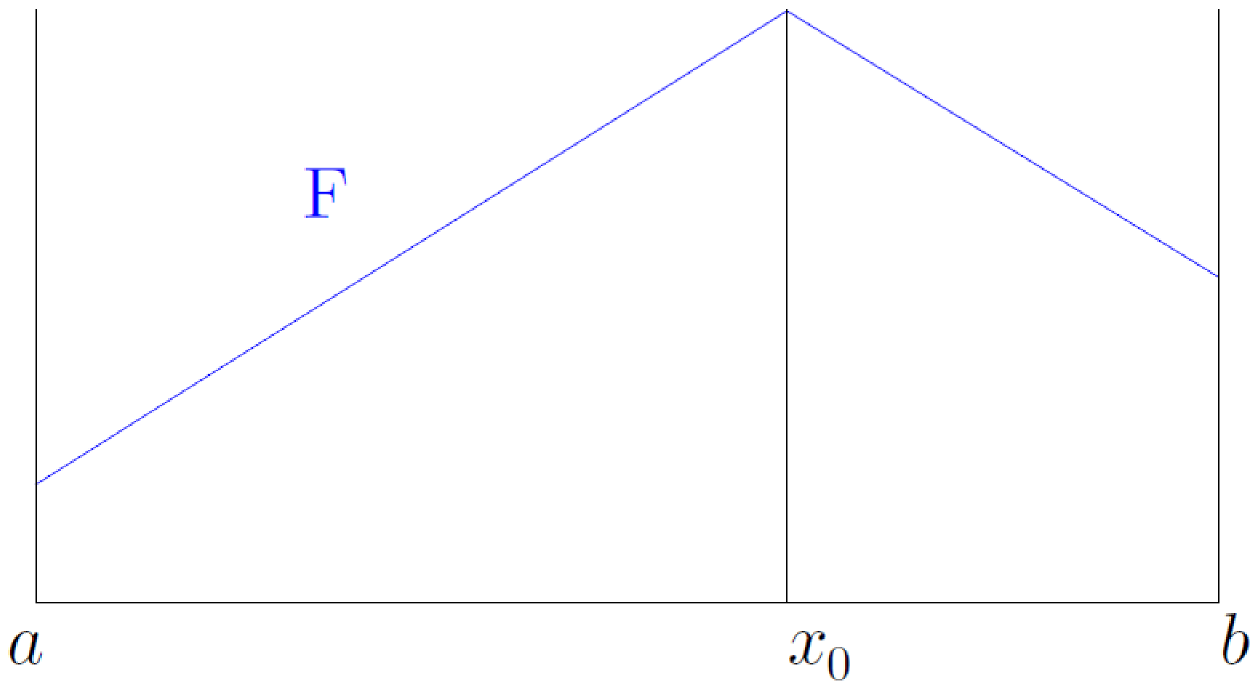
Si $f(x) = 0$ pour $x \in (a, b)$, F est affine sur (a, b).

Et si l'hypothèse $f(x) = 0$ est vraie SAUF

pour un point exceptionnel $x_0 \in (a, b)$?

Et si l'hypothèse est vraie sauf pour un point exceptionnel x_0 ?

D'après ce qui précède, la fonction F de Riemann est affine sur (a, x_0) ET sur (x_0, b), et de plus elle est continue.



En supposant seulement les b_n bornés, on a

$(\mathrm{F}(x-h)-2\,\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(x+h))\,/\,h \longrightarrow 0$

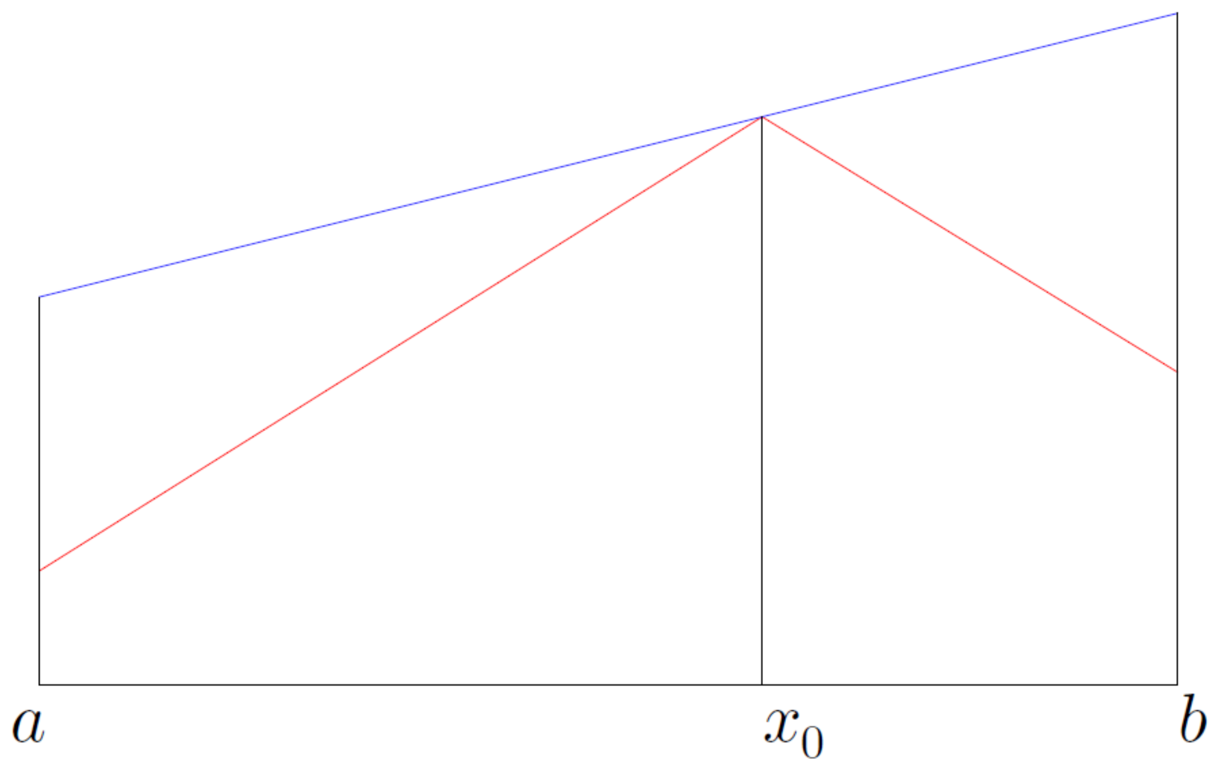
quand $h \to 0$

(Riemann encore)

il en résulte que le graphe de la fonction F ne peut pas présenter de « coins » :

(tester $F(x) = |x|$ en $x = 0$)

la fonction F est donc affine partout sur (a, b), et on est ramené au cas précédent.



Par récurrence on obtient :

si l'hypothèse $f(x) = 0$ est vraie SAUF pour des points exceptionnels $x_0, x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ alors ...

$$(a, x_n) \qquad\qquad (x_n, b)$$

(sur chacun de ces deux intervalles
on est dans un cas déjà vu)

cette histoire n'est pas finie . . .
mais on va avoir un entracte

Dénombrable, ou pas...

Non dénombrabilité de la droite réelle (1874)

on considère une suite de nombres réels :

$$(x_n)_{n\geqslant 0}$$

il s'agit de voir que ces nombres
« n'épuisent pas » la droite réelle

pour simplifier on supposera
que ces nombres sont
deux à deux distincts

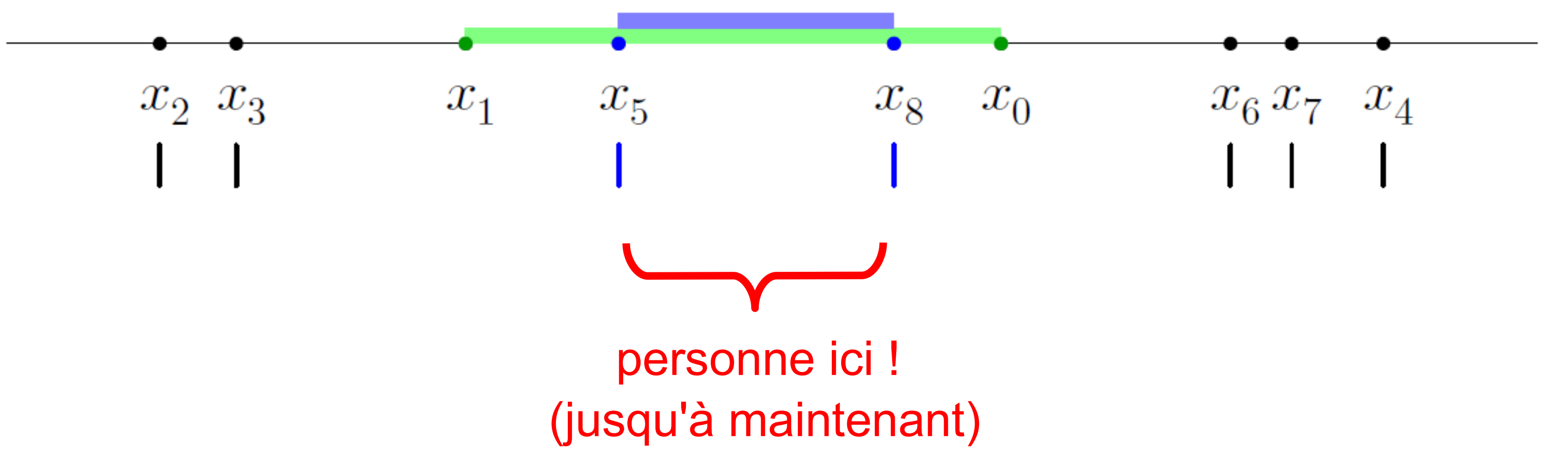
Non dénombrabilité de la droite réelle

$x_1 \neq x_0$, etc . . .

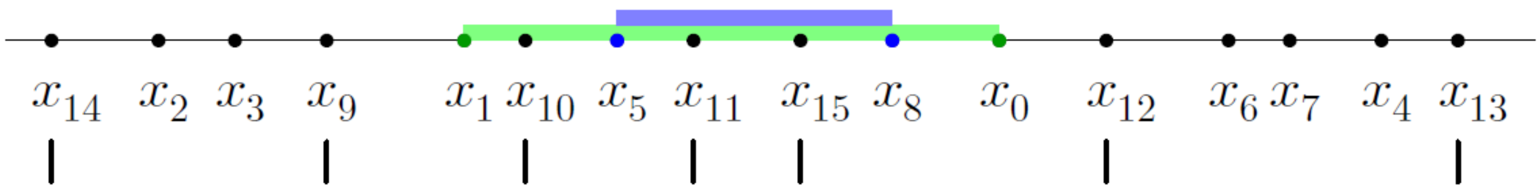
Non dénombrabilité de la droite réelle

Non dénombrabilité de la droite réelle

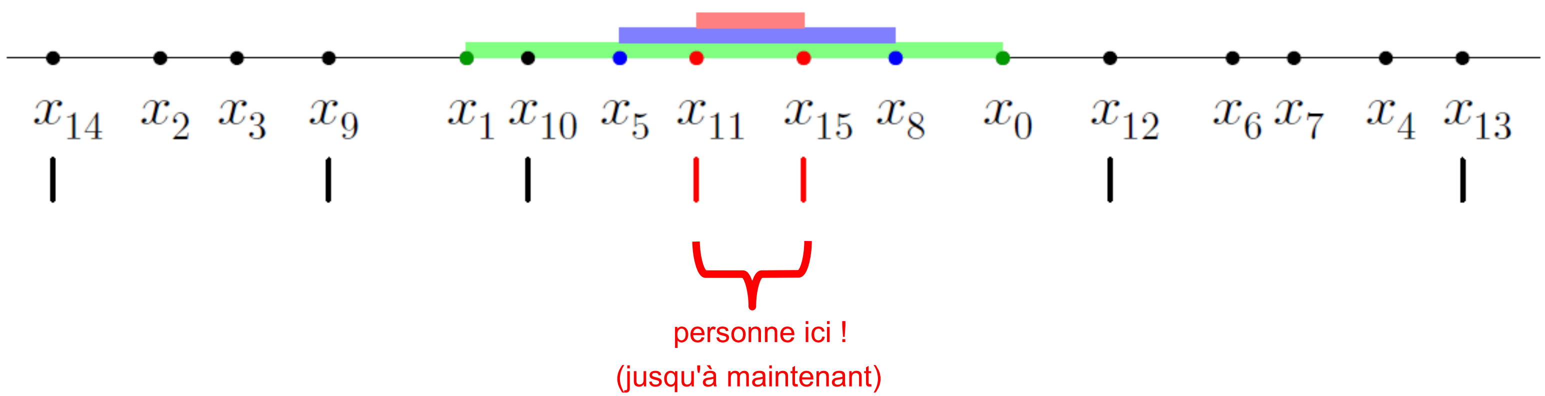
Non dénombrabilité de la droite réelle



Non dénombrabilité de la droite réelle



Non dénombrabilité de la droite réelle

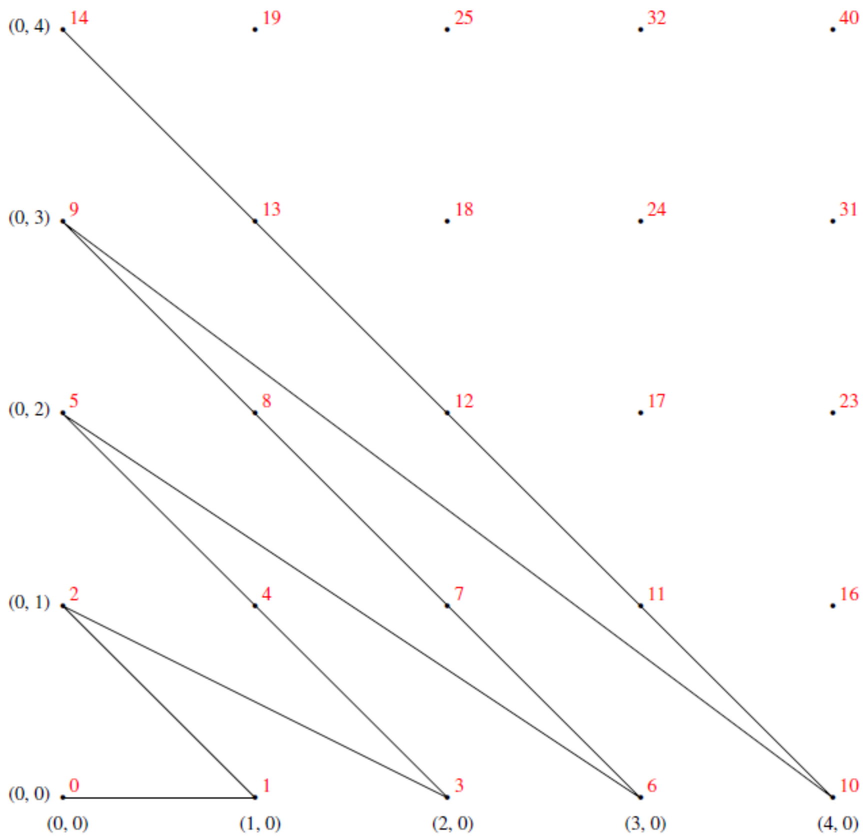


suite de segments emboîtés :

les points communs conviennent !
(et on sait qu'il y en a) $\square$

En 1874 on sait (en tout cas Cantor sait) jouer avec le dénombrable ;

Un parcours habituel de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:



$\mathbf{Q}$ est dénombrable

L'ensemble des suites finies d'entiers est dénombrable :

$$(n_0, n_1, \ldots, n_k)$$

$$n_j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}$$

dénombrable = en bijection avec l'ensemble des entiers

Les nombres algébriques

Le nombre θ est *algébrique* quand

$$a_n\theta^n + \cdots + a_1\theta + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ entiers relatifs $(a_i \in \mathbb{Z})$

$\sqrt{2}$: $\theta^2 - 2 = 0$, racines cubiques d'entiers, ...

les « quantités » constructibles à la règle et au compas sont algébriques

(à partir d'un segment de longueur 1)

Les nombres algébriques

Le nombre θ est *algébrique* quand

$$a_n\theta^n + \cdots + a_1\theta + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ entiers relatifs.

Les suites finies d'entiers $(a_0, \ldots, a_n)$ forment un ensemble dénombrable, l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable, chacun d'eux n'a qu'un nombre fini de racines

Les nombres algébriques

forment un ensemble dénombrable.

Il y a donc (vraiment) beaucoup de réels non algébriques !

Nombres transcendants :

Ceux qui ne sont pas algébriques.

construire à la règle
et au compas un carré
ayant la même surface
qu'un cercle de rayon 1

Il est en général très difficile de montrer qu'un nombre particulier donné est transcendant.

Le mathématicien suisse Johann Heinrich Lambert a eu déjà beaucoup de mal pour prouver (en 1767) que le nombre π n'est pas rationnel.

en rapport avec
le problème de
la ***quadrature***
du cercle

Nombres de Liouville : exemples relativement simples

Johann Heinrich Lambert (1728–1777)

Joseph Liouville (1809–1882)

Nombres de Liouville (1844) : exemples relativement simples de nombres transcendants

en gros on a $n\,!$ zéros successifs après le n ème **1**

$$x = 0{,}\mathbf{11}000\mathbf{1}00000000000000000\mathbf{1}\overbrace{000000000000000000000000000000000000}$$
$$00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\mathbf{1}\ldots$$

$$x = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + \cdots$$

$$x = \sum_{n\geqslant 1} 10^{-n!}.$$

Nombres transcendants

Charles Hermite (1822–1901) : e transcendant, 1873

Ferdinand Lindemann (1852–1939) : π transcendant, 1882

Cantor est « referee » de l'article de Lindemann pour la revue *Mathematische Annalen* (à la demande du « directeur » Felix Klein)

Felix Klein (1849–1925)

Ordinaux,

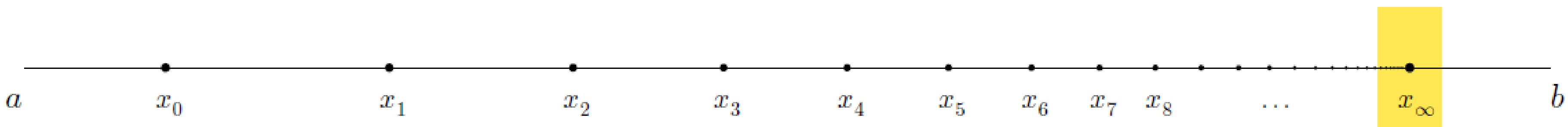
cardinaux

Revenons à l'unicité de la représentation trigonométrique :

un « ensemble exceptionnel » infini

(une suite convergente et sa limite)

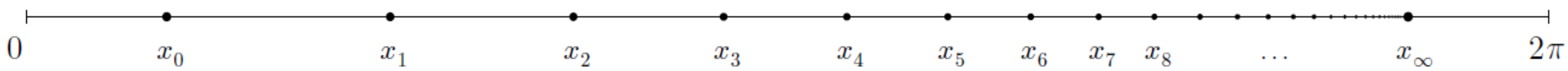
Un ensemble exceptionnel infini



Si $f(x) = 0$ sur (a, b) sauf aux points de la suite, alors . . .

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

Un ensemble exceptionnel infini



$$\mathrm{E} = \{x_\infty \,;\; x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \ldots\}$$

Si la série (T) converge vers 0 en tout point de $[0, 2\pi]$, sauf peut-être aux points de E, alors tous les coefficients sont nuls.

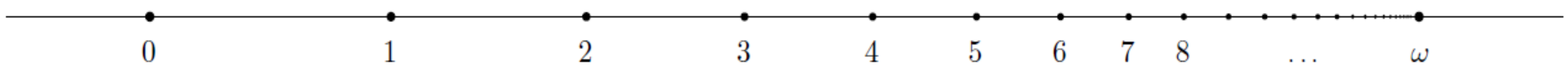
c'est une sorte de récurrence topologique . . .

si F est affine sur (a, c $-\,\varepsilon$) pour tout $\varepsilon > 0$,

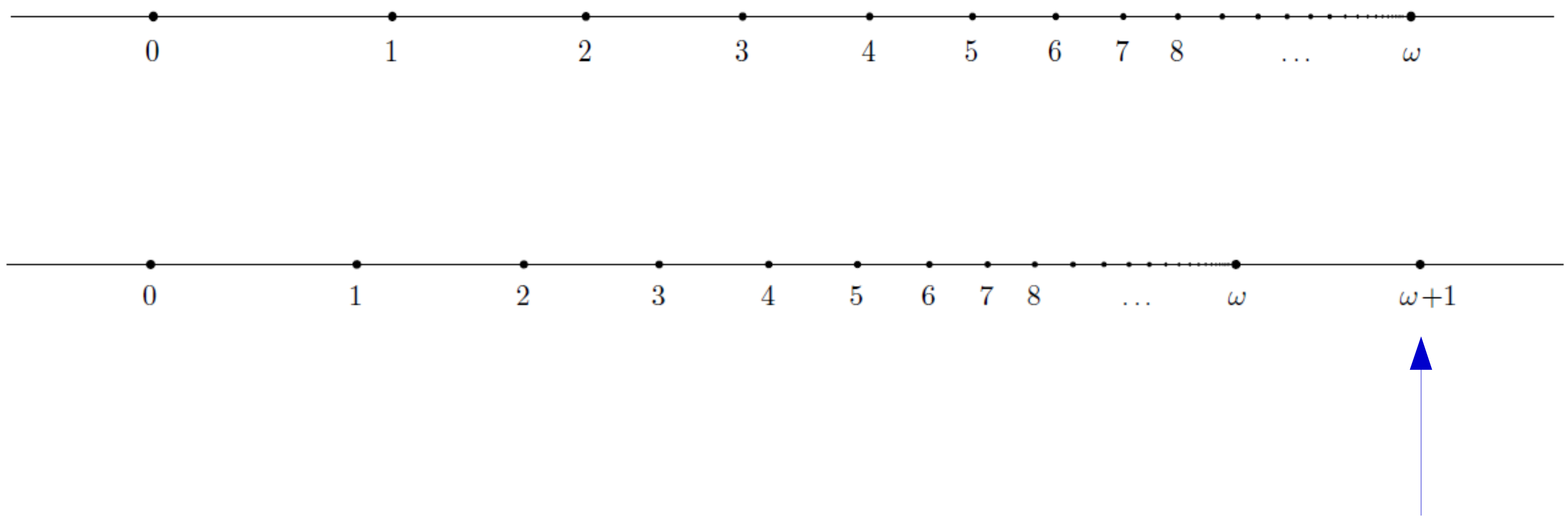
alors, elle est affine sur (a, c)

Ordinaux ;

on ne va plus regarder que la structure d'ordre :

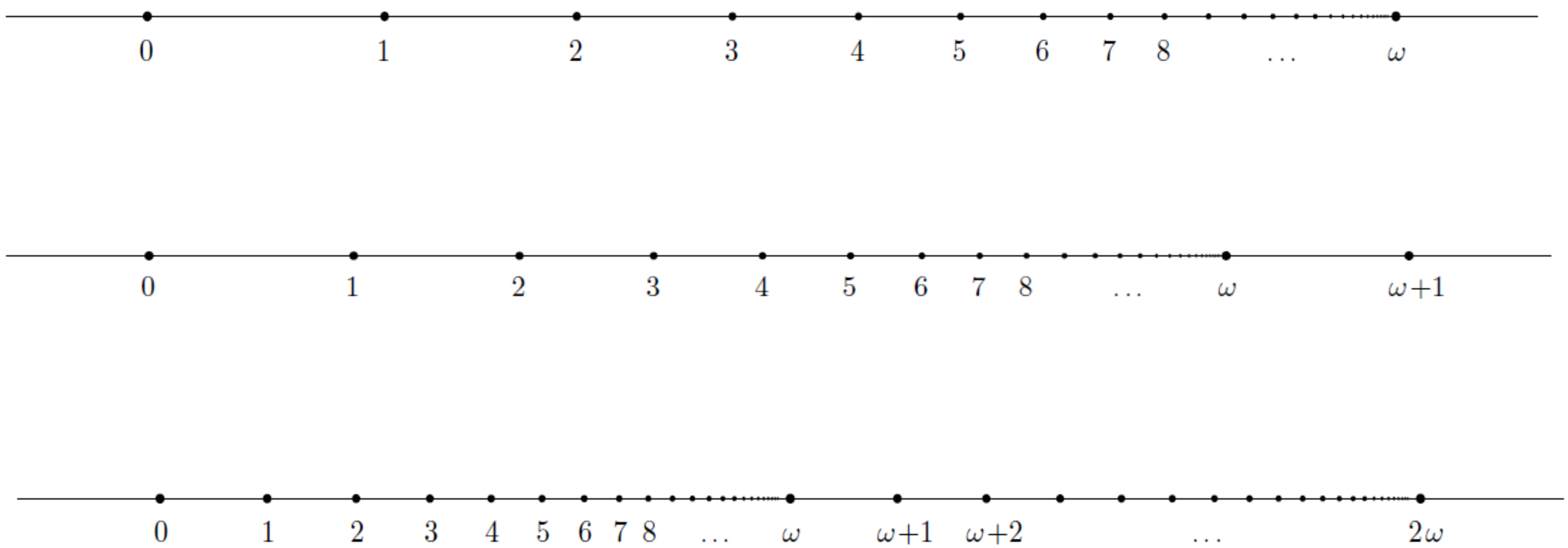


On ne regarde plus que la structure d'ordre :

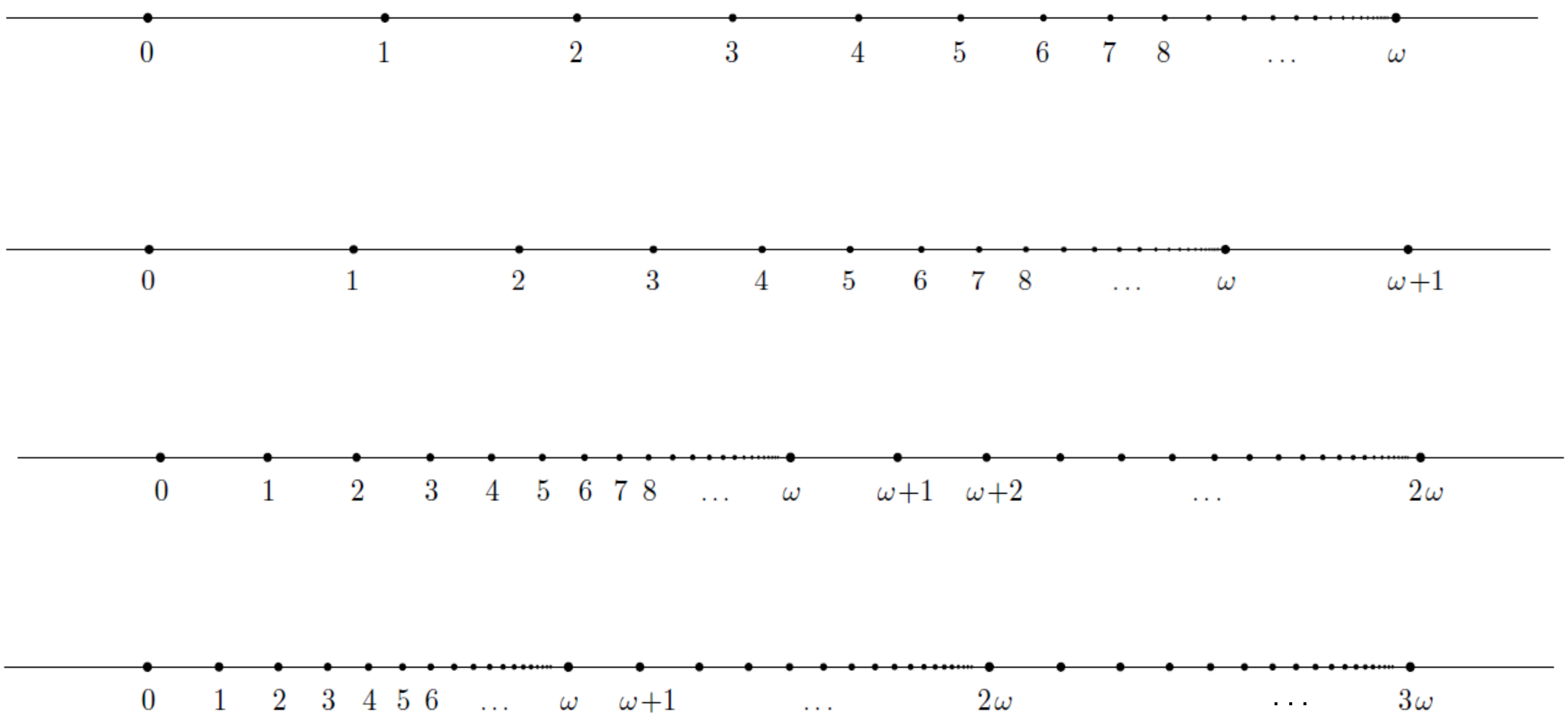


on peut toujours ajouter un point « à droite »,
puis deux, trois, etc . . .

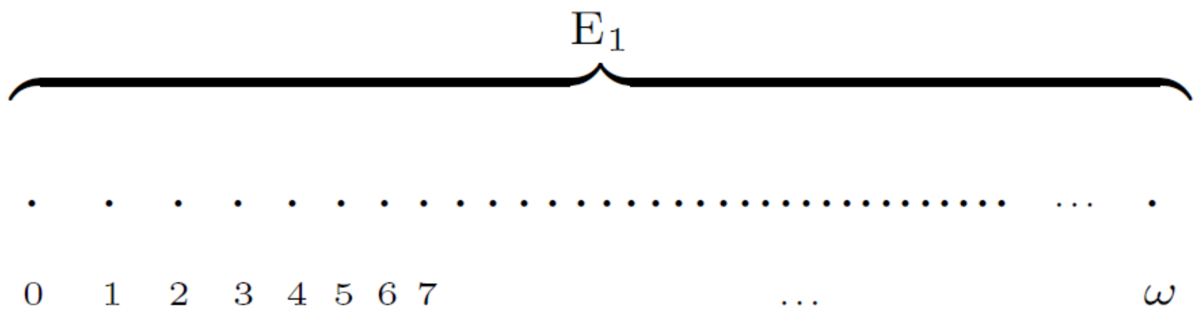
On ne regarde plus que la structure d'ordre :



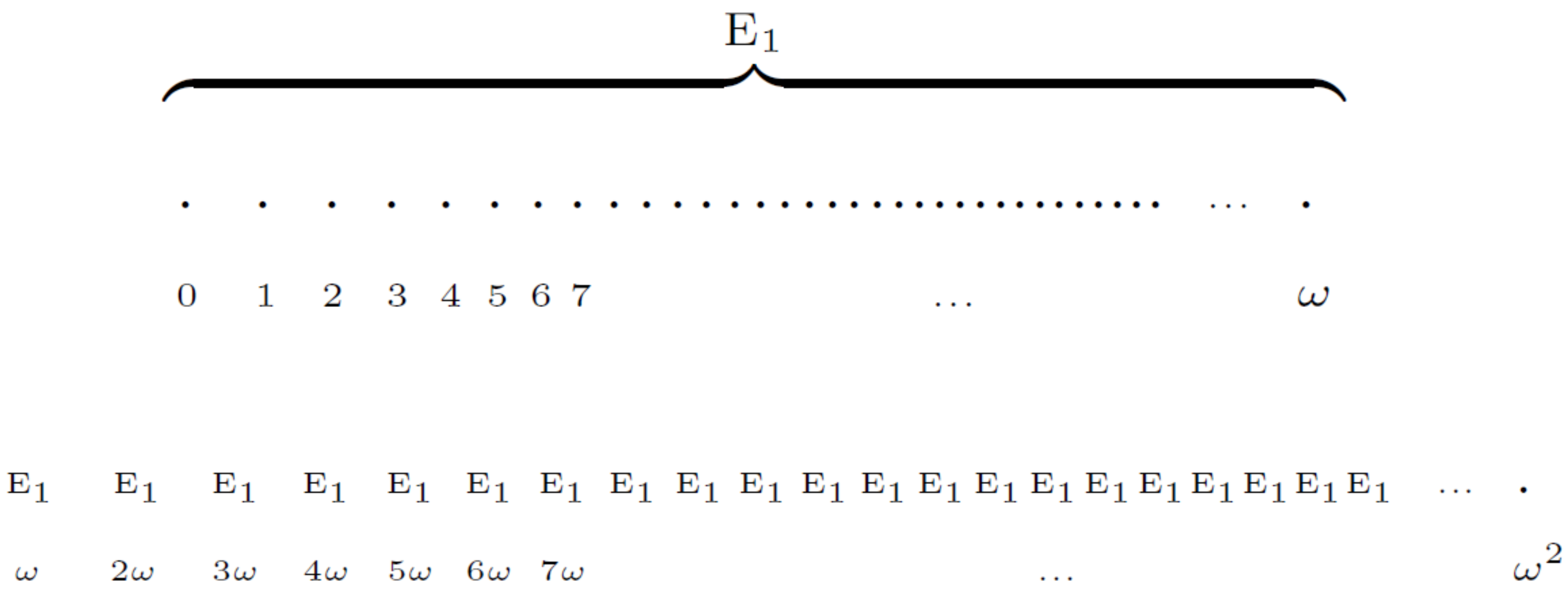
On ne regarde plus que la structure d'ordre :



La « récurrence topologique » s'applique encore ici pour avoir de nouveaux « ensembles exceptionnels » acceptables pour le théorème d'unicité du développement trigonométrique



il y a maintenant trop de points,
on n'arrivera plus à dessiner,
écrivons de manière symbolique :
« E_1 » pour représenter d'un seul
coup toute la suite des points ci-dessus



<u>ensemble dérivé</u> F ' d 'un ensemble F :

c'est l'ensemble des points limites de F

(points d'accumulation)

Le dérivé d'un ensemble fini est vide, mais :

[0, 1] ' = [0, 1] ,

ensemble *<u>parfait</u>*

La « dérivation » remplace E_1 par un point unique : la limite.

Le deuxième ensemble dérivé de E_1 est vide.

$$\overbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \; \bullet \cdots\cdots\cdots \quad \ldots \quad \bullet}^{E_1}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \qquad \ldots \qquad \omega$$

$$E_1 \quad \ldots \quad \bullet$$

$$\omega \quad 2\omega \quad 3\omega \quad 4\omega \quad 5\omega \quad 6\omega \quad 7\omega \qquad \ldots \qquad \omega^2$$

$$\overbrace{E_1 \quad \ldots \quad \bullet}^{E_2}$$

$$\omega \quad 2\omega \quad 3\omega \quad 4\omega \quad 5\omega \quad 6\omega \quad 7\omega \qquad \ldots \qquad \omega^2$$

Le troisième ensemble dérivé $(E_2)'''$ est vide

$$E_2 \quad \ldots \quad \bullet$$

$$\omega^2 \quad 2\omega^2 \quad 3\omega^2 \quad 4\omega^2 \quad 5\omega^2 \quad 6\omega^2 \quad 7\omega^2 \qquad \ldots \qquad \omega^3$$

Cantor manipule ces exemples déjà en 1872

si on a une *suite* d'exemples E_n de plus en plus compliqués,
on peut les rassembler en un exemple encore plus compliqué :

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccccccc} \mathrm{E}_1 & \mathrm{E}_2 & \mathrm{E}_3 & \mathrm{E}_4 & \mathrm{E}_5 & \mathrm{E}_6 & \mathrm{E}_7 & \dots & \mathrm{E}_n & \dots & \bullet \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 & \dots & \omega^n & \dots & \omega^\omega \end{array}}_{\mathrm{E}}$$

L'ensemble dérivé d'ordre ω d'un ensemble F est l'intersection de ses dérivés d'ordre fini

$$\mathrm{F}^{(0)} = \mathrm{F}$$

$$\mathrm{F}^{(n+1)} = \left(\mathrm{F}^{(n)}\right)'$$

$$\mathrm{F}^{(\omega)} = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{F}^{(n)}$$

L'ensemble dérivé d'ordre ω de l'ensemble E ci-dessus est réduit à un point unique et par conséquent

$$\mathrm{E}^{(\omega+1)} = \left(\mathrm{E}^{(\omega)}\right)' = \emptyset$$

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	$\ldots$	E_n	$\ldots$	$.$
ω	ω^2	ω^3	ω^4	ω^5	ω^6	ω^7	$\ldots$	ω^n	$\ldots$	ω^ω

un ordinal est un « type d'ordre » (qui représente tous les ensembles ordonnés « du même type »)

Un ensemble ordonné X est *bien ordonné* quand tout sous-ensemble non vide de X possède un plus petit élément

par exemple :

$$\mathbb{N}, \qquad \omega,$$

$$\omega^2, \ \omega^3, \ \ldots, \ \omega^\omega, \ \ldots$$

Cantor envisage de continuer ***indéfiniment*** le processus de création ou de « production » de nouveaux ordinaux **;**

« Erzeugungsprincip »

il envisage même d'épuiser la droite réelle de cette façon, en plaçant tous les réels dans une très lo...ongue liste bien ordonnée (pas dans l'ordre usuel évidemment).

Il faut alors imaginer une succession « continue » d'opérations, comportant autant d'étapes qu'il y a de nombres réels !

Beaucoup de contemporains ne sont pas d'accord.

Cantor invente la

Récurrence ordinale

Pour que la propriété $\mathrm{P}(\alpha)$ dépendant d'un ordinal arbitraire α soit vraie pour tout ordinal α, il suffit que

- la propriété $\mathrm{P}(0)$ soit vraie
- et que pour tout ordinal α, on puisse prouver que :

  si $\mathrm{P}(\beta)$ *est vraie pour tout* $\beta < \alpha$, *alors* $\mathrm{P}(\alpha)$ *est vraie.*

Faut être «gonflé» pour prétendre inventer une nouvelle façon de démontrer et de raisonner, dans des mathématiques déjà bi-millénaires,

et de plus, une méthode fondée sur ces ordinaux qui sont de pures vues de son esprit.

$$\mathrm{F}^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} (\mathrm{F}^{(\beta)})' \qquad \mathrm{F}^{(\alpha+1)} = (\mathrm{F}^{(\alpha)})'$$

cas particulier

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. Math. Annalen 21, p. 563-564

En 1883, dans des considérations philosophiques d'une bonne dizaine de pages sur la nature des mathématiques et de l'infini mathématique, Cantor se réfère à Platon, Aristote, Démocrite, Thomas d'Aquin, Descartes, Locke, Spinoza, Leibniz, Kant, entre autres **. . .** avant de développer plusieurs points de sa théorie des ordinaux **;** c'est à la fin de la « section philosophique » qu'on peut lire **:**

Es ist, wie ich glaube, nicht nöthig in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von Vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, dass sie der Willkür einen äusserst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nöthige Correctiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmässig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann, wegen mangelnden Erfolgs, fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

Revenons à des questions de cardinalité

Suites d'entiers et continu

ici 1 est exclus

Rappel : Développement en base 2 de $x \in [0, 1)$

$$x = {}^{2}\overline{0,\, a_1\, a_2\, \dots\, a_k\, \dots}\,, \qquad a_k = 0 \text{ ou } 1$$

$$x = \sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots$$

développement propre : infinité de $a_k = 0$

$${}^{2}\overline{0,\, 0\,1\,1\,1\, \dots\, 1\, \dots} = {}^{2}\overline{0,\, 1\,0\,0\,0\, \dots\, 0\, \dots}$$

impropre :
que des 1 à partir
d'un certain rang

propre :
infinité de 0

Suites d'entiers et continu

exemple :

$$x = \sum_{k \geqslant 1} \frac{a_k}{2^k} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots$$

$$\begin{aligned} {}^{2}\overline{0,\,0\,1\,0\,1\,\ldots\,0\,1\,\ldots} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chaque réel x de [0, 1) possède un <u>unique</u> développement propre

de la forme ci-dessus : $x = \overline{0, \ldots}$

Julius König (1849 – 1913)

Suites d'entiers (adapté d'une variante due à Julius König, apparue un
et nombres réels peu après la version donnée par Cantor en 1877)

À la suite $3,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 5,\ 0,\ 2,\ \ldots$

on associe

et inversement, si le développement est propre

$$x = {}_2\overline{0,\underbrace{1\ 1\ 1\ 0}_{3}\ \underbrace{0}_{0}\ \underbrace{1\ 0}_{1}\ \underbrace{0}_{0}\ \underbrace{1\ 1\ 0}_{2}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0}_{5}\ \underbrace{0}_{0}\ \underbrace{1\ 1\ 0}_{2}\ \ldots}$$

le principe du codage :

entier k $\longrightarrow$ k chiffres 1 suivis de un 0

en particulier :

entier 0 $\longrightarrow$ 0 chiffre 1 suivi de un 0

$$x = {}^{2}\overline{0,\underbrace{1\;1\;1\;0}_{3}\;\underbrace{0}_{0}\;\underbrace{1\;0}_{1}\;\underbrace{0}_{0}\;\underbrace{1\;1\;0}_{2}\;\underbrace{1\;1\;1\;1\;1\;0}_{5}\;\underbrace{0}_{0}\;\underbrace{1\;1\;0}_{2}\;\ldots}$$

$$x = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}}_{3} \underset{0}{+} \underset{1}{\frac{1}{2^6}} \underset{0}{+} \underbrace{\frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}}}_{2} + \underbrace{\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{16}}}_{5} \underset{0}{+} \underbrace{\frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{2^{20}}}_{2} + \cdots$$

Suites d'entiers

on vient de voir que :

ens. des suites d'entiers

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

(par ce signe on veut dire :
peuvent être mis en bijection)

Suites d'entiers

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

Les suites de couples d'entiers

ou aussi bien les couples de suites d'entiers,

$$(m_0, n_0),\ (m_1, n_1),\ (m_2, n_2),\ \ldots,\ (m_k, n_k),\ \ldots$$

tels que : $(\,(m_0, m_1, m_2, \ldots),\ (n_0, n_1, n_2, \ldots)\,)$

sont en bijection avec les suites d'entiers

$$m_0,\ n_0,\ m_1,\ n_1,\ m_2,\ n_2,\ \ldots,\ m_k,\ n_k,\ \ldots$$

simplement en intercalant les éléments successifs
des ***deux*** suites pour former ***une*** nouvelle suite

Le continu sous plusieurs formes

$$[0,1) \times [0,1) \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

ens. des couples de réels

ens. des suites d'entiers

ens. des couples de suites d'entiers

Suites d'entiers et continu :

première idée : le mélange des « décimales » ;

à

$$x \;=\; {}^{2}\overline{0,\, a_1\, a_2\, \dots\, a_k\, \dots}\;,$$

on associe le couple (y, z) :

$$y \;=\; {}^{2}\overline{0,\, a_1\, a_3\, a_5\, \dots\, a_{2k+1}\, \dots}\;,$$

$$z \;=\; {}^{2}\overline{0,\, a_2\, a_4\, a_6\, \dots\, a_{2k}\, \dots}$$

Problème !

$$x = {}^{2}\overline{0,\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,\ldots\,0\,1\,\ldots}$$

$$\mapsto \quad y = 0, \quad z = {}^{2}\overline{0,\,0\,1\,1\,1\,\ldots\,1\,1\,\ldots}$$

identique à

$$y = 0, \quad z = {}^{2}\overline{0,\,1\,0\,0\,0\,\ldots\,0\,0\,\ldots}$$

$$x = {}^{2}\overline{0,\,0\,1\,0\,0\,\ldots\,0\,0\,\ldots}$$

$x \longrightarrow (y, z)$ est surjective, mais pas injective (comme la courbe de Peano) ; il faut travailler plus, si on veut obtenir le résultat de cette façon.

Le statut du « continu » est clarifié :

Le continu sous plusieurs formes

$$[0,1) \times [0,1) \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

du point de vue *cardinalité* :

c'est devenu très BANAL !

$$\mathbb{R}^2 \underset{\text{bij}}{\equiv} \mathbb{R}$$

Pourtant . . .

$$\mathbb{R}^d \underset{\text{bij}}{\equiv} \mathbb{R}^n$$

(mais pas topologiquement : Brouwer 1911)

Luitzen Egbertus Brouwer (1881 – 1966)

«Entschuldigen Sie es gütigst meinem Eifer für die Sache, wenn ich Ihre Güte und Mühe so oft in Anspruch nehme; die Ihnen jüngst von mir zugegangenen Mittheilungen sind für mich selbst so unerwartet, so neu, dass ich gewissermassen nicht eher zu einer gewissen Gemüthsruhe kommen kann, als bis ich von Ihnen, sehr verehrter Freund, eine Entscheidung über die Richtigkeit derselben erhalten haben werde. Ich kann, so lange Sie mir nicht zugestimmt haben, nur sagen: je le vois, mais je ne le crois pas.»

Cantor à Dedekind, lettre du 29 juin 1877
(dans le livre de Walter Purkert et Hans Joachim Ilgauds, p. 50)

Ayez la bonté d'excuser mon ardeur impatiente à propos de cette question, alors que je fais déjà si souvent appel à votre gentillesse et à vos efforts ; les résultats que je vous ai communiqués récemment sont pour moi-même si inattendus, si nouveaux, que je ne pourrai retrouver une certaine sérénité que quand j'aurai obtenu de vous, très cher ami, une confirmation de leur exactitude. Tant que vous ne vous êtes pas déclaré d'accord avec moi, je ne peux que dire : « je le vois, mais je ne le crois pas » [*en français dans le texte !*].

Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 84, S. 242—258 (1878)].

dénombrable

et entre les deux ?

continu

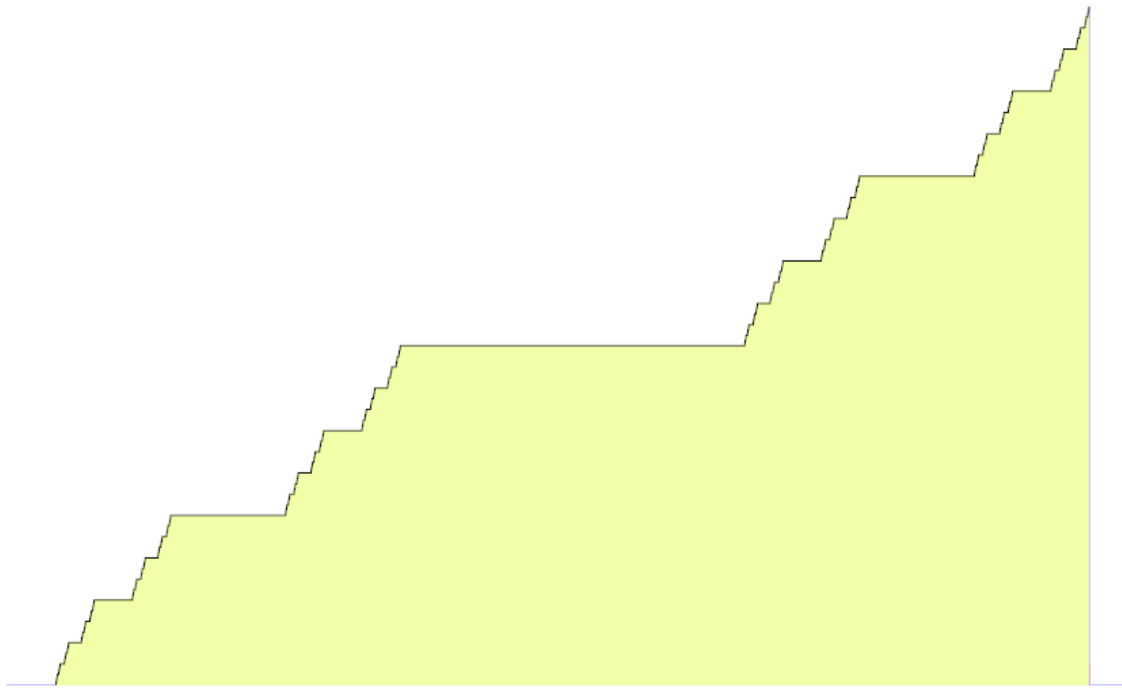
1878 : Cantor suppose
qu'il n'y a pas de
cardinalité entre
ces deux-là,

c'est

l'hypothèse du continu

Connaissez-vous la fonction de Cantor ?

découverte
fin 1883 ;
un complément
à « l'ensemble
(triadique)
de Cantor »



en tout cas, vous avez déjà vu « l'argument diagonal »

Suite diagonale et cardinalités

Définir un sous-ensemble E de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers revient à donner une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de 0 et de 1, par exemple en posant

$$x_n = 1 \iff n \in \mathrm{E}.$$

Exemple : si les entiers commencent avec l'entier 0, on associera :

(pour certains c'est avec 1 que les entiers commencent)

E = l'ensemble des multiples de 3 : 0, 3, 6, 9, . . .

avec la suite :

(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, . . .)

0 3 6 9 ← places numérotées occupées par des 1

Petits jeux de cardinalité

$$\mathbb{N} \equiv \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\} \subset [0,1)$$

ce sont deux ensembles
complémentaires dans [0, 1)

$$[0,1) \equiv \mathrm{Y} \oplus \mathbb{N} \equiv \mathrm{Y} \oplus \mathbb{N} \oplus \mathbb{N} \equiv$$

$$\equiv (\mathrm{Y} \oplus \mathbb{N}) \oplus \mathbb{N} \equiv [0,1) \oplus \mathbb{N}$$

développements dyadiques : propres ou impropres

(ensemble des
sous-ensembles de $\mathbf{N}$)

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \equiv [0,1) \oplus \mathbb{N} \equiv [0,1)$$

$$[0,1) \equiv (0,1) \equiv \mathbb{R}$$

Suite diagonale et cardinalités

Définir un sous-ensemble E de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers revient à donner une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de 0 et de 1, par exemple en posant

$$x_n = 1 \iff n \in \mathrm{E}.$$

Considérons $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Définir une application $\phi : k \mapsto \mathrm{E}_k$ de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ revient alors à donner une suite $(x^{(k)})_{k\geqslant 0}$ de suites formées de 0 et de 1 ; on a : $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\geqslant 0} \sim \mathrm{E}_k = \phi(k)$.
La suite diagonale (y_n), formée de 0 et de 1, est définie par

$$\underline{y_n \neq x_n^{(n)}} \quad \text{c-à-d.} \quad y_n = 1 - x_n^{(n)}.$$

$$y_n \neq x_n^{(n)} \quad \text{c-à-d.} \quad y_n = 1 - x_n^{(n)}.$$

Si $\mathrm{F} \subset \mathbb{N}$ est le sous-ensemble associé à la suite (y_n),

$$n \in \mathrm{F} \;\Leftrightarrow\; y_n = 1 \;\Leftrightarrow\; x_n^{(n)} = 0 \;\Leftrightarrow\; n \notin \mathrm{E}_n \;\equiv\; n \notin \phi(n)$$

effet « contrariant »

$$n \in \mathrm{F} \;\Leftrightarrow\; y_n = 1 \;\Leftrightarrow\; x_n^{(n)} = 0 \;\Leftrightarrow\; n \notin \mathrm{E}_n \;\equiv\; n \notin \phi(n)$$

Cas général (1891) :

Si X est un ensemble quelconque et si ϕ est une application de X dans $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, le sous-ensemble

$$\mathrm{Y} \;=\; \{x \in \mathrm{X} \;:\; x \notin \phi(x)\} \subset \mathrm{X}$$

Y $\in \mathscr{P}$(X)

n'est pas dans l'image de ϕ (ϕ n'est jamais surjective)

si Y = ϕ(y), y $\in$ Y ? y $\notin$ Y ?

implique y $\in \phi$(y) = Y, contradiction

implique y $\notin \phi$(y) = Y, contradiction

$\mathcal{P}(\mathrm{X})$ . . . est toujours plus « gros » que . . . X

Cardinaux

Suite strictement croissante de cardinalités :

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \ldots \quad ,$$

ens. des réels

ens. des fonctions sur **R**, quelconques

ça devient vite trop gros pour des mathématiciens !

et l'ensemble X réunion de cette suite est encore plus « gros » que chacun des termes de la suite ;
et $\mathscr{P}$(X) encore plus gros, et ainsi de suite !

Les ensembles selon Cantor

« Mannigfaltigkeit » (encore en 1891)

devient définitivement « Menge » (1895)

Ensembles selon Cantor : la « définition »

« Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzem. »

apparaît comme première phrase de :

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre[1].

[Math. Annalen Bd. 46 S. 481—512 (1895); Bd. 49, S. 207—246 (1897).]

„Hypotheses non fingo.“ [Newton.]

„Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.“

„Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.“

il est temps pour Cantor de rassembler les résultats de sa théorie : opérations sur les ordinaux et sur les cardinaux, comparaison d'ensembles bien ordonnés, . . .

Ensembles selon Cantor :

« Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzem. »

Tentative de traduction :
Par le mot « ensemble », nous entendons le rassemblement en un tout, que nous désignons par M*, de certains objets bien différenciés* m *(qu'on appellera les « éléments » de* M*), objets provenant de notre intuition ou de notre pensée.*

Traduction de deux des citations en tête d'article :

Je n'avance pas d'hypothèses (Newton)

The time will come when diligent research over long periods will bring to light things which now lie hidden (Sénèque, traduction Loeb)

Ensembles selon Cantor

« Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzem. »

Tentative de traduction :
Par le mot « ensemble », nous entendons le rassemblement en un tout, que nous désignons par M, *de certains objets bien différenciés* m *(qu'on appellera les « éléments » de* M*), objets provenant de notre intuition ou de notre pensée.*

C'est vague !

Axiomatique

Le temps des paradoxes (1890–1900, environ)

le paradoxe dit « de Russell » :

Soit E l'ensemble des F tels que $F \notin F$.

Est-ce que $E \in E$?

Il faut que les gens arrêtent de dire n'importe quoi . . .

Il est temps de mettre de l'ordre !

Quelques travaux sur les « fondements » :

Richard Dedekind (1831–1916),
« Was sind und was sollen die Zahlen ? » (1888)

Giuseppe Peano (1858–1932),
« Arithmetices principia, nova methodo exposita », en latin (1889)

Gottlob Frege (1848–1925),
« Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens » (1879) ;

Frege fonde le calcul des prédicats :

dans le calcul propositionnel on a :

NON, ET, OU, =

dans le calcul des prédicats on ajoute : $\forall x\, P(x)$ $\exists\, x\, P(x)$

Frege (1879), traduit en anglais :

Generality

§ 11. In the expression of a judgment we can always regard the combination of signs to the right of $\vdash\!\!-\!\!-$ as a function of one of the signs occurring in it. *If we replace this argument by a German letter and if in the content stroke we introduce a concavity with this German letter in it, as in*

$$\vdash\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\!\!-\, \Phi(\mathfrak{a}), \qquad \boxed{\forall a \ \ \Phi(a)}$$

this stands for the judgment that, whatever we may take for its argument, the function is a fact. Since a letter used as a sign for a function, such as Φ in $\Phi(A)$, can itself be regarded as the argument of a function, its place can be taken, in the manner just specified, by a German letter. The meaning of a German letter is subject only to the

Peano (1889,
traduit du latin
en anglais)

§ 1. Numbers and addition

Explanations

The sign N means *number* (*positive integer*).

The sign 1 means *unity*.

The sign $a + 1$ means *the successor of* a, or a *plus* 1.

The sign $=$ means *is equal to*. We consider this sign as new, although it has the form of a sign of logic.

Axioms

1. $1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a = a$.
3. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset:\, a = b \,.=.\, b = a$.
4. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset\therefore\, a = b \,.\, b = c \,:\supset.\, a = c$.
5. $a = b \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,:\supset.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
6. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
7. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset:\, a = b \,.=.\, a + 1 = b + 1$.
8. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a + 1 \,-\!\!= 1$.
9. $k \,\varepsilon\, \mathrm{K} \therefore 1 \,\varepsilon\, k \therefore x \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, x \,\varepsilon\, k \,:\supset_x.\, x + 1 \,\varepsilon\, k \,::\supset.\, \mathrm{N} \supset k$.

Definitions

10. $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$; $4 = 3 + 1$; and so forth.

Theorems

11. $2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.

Proof:

P 1 $.\supset:$	$1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(1)
1 [a] (P 6) $.\supset:$	$1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(2)
(1) (2) $.\supset:$	$1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(3)
P 10 $.\supset:$	$2 = 1 + 1$	(4)
(4) . (3) . (2, 1 + 1) [a, b] (P 5) $:\supset:$	$2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(Theorem).

Note. We have written explicitly all the steps of this very easy proof. For the sake of brevity, we now write it as follows:

$$\mathrm{P}\,1 \,.\, 1\,[a]\,(\mathrm{P}\,6) \,:\supset:\, 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{P}\,10 \,.\, (2, 1+1)\,[a, b]\,(\mathrm{P}\,5) \,:\supset:\, \mathrm{Th}.$$

or

$$\mathrm{P}\,1 \,.\, \mathrm{P}\,6 \,:\supset:\, 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathrm{P}\,10 \,.\, \mathrm{P}\,5 \,:\supset:\, \mathrm{Th}.$$

12. $3, 4, \ldots \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
13. $a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a = b \,.\, b = c \,.\, c = d \,:\supset:\, a = d$.

Proof: Hyp. P 4 $:\supset:\, a, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a = c \,.\, c = d \,.\,$ P 4 $:\supset:$ Thes.

14. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a = b \,.\, b = c \,.\, a \,-\!\!= c \,:=\, \Lambda$.

Axiomes de Peano (1889)

Axioms

(pour Peano **1** est le plus petit entier)

1. $1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}.$
2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!.\, a = a.$
3. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!:\, a = b \,.\!=\!.\, b = a.$
4. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!\therefore\, a = b \,.\, b = c \,:\!\supset\!.\, a = c.$
5. $a = b \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,:\!\supset\!.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{N}.$
6. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!.\, a + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}.$
7. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!:\, a = b \,.\!=\!.\, a + 1 = b + 1.$
8. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!.\, a + 1 \,-\!\!=\, 1.$
9. $k \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,\therefore\, 1 \,\varepsilon\, k \,\therefore\, x \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, x \,\varepsilon\, k \,:\!\supset_x\!.\, x + 1 \,\varepsilon\, k \,::\!\supset\!.\, \mathrm{N} \supset k.$

1. ↓ 6. ↓ 8. ↓

$$1 \in \mathbf{N}\,; \quad \forall a \in \mathbf{N} \,:\; a+1 \in \mathbf{N},\; a+1 \neq 1$$

7. $\forall a, b \in \mathbf{N},\; a = b \;\Leftrightarrow\; a+1 = b+1$

9. le principe de récurrence, k est un ensemble d'entiers

11. $2 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$.

Proof:

P 1 .Ɔ:	$1 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$	(1)
1 [*a*] (P 6) .Ɔ:	$1 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$.Ɔ. $1 + 1 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$	(2)
(1) (2) .Ɔ:	$1 + 1 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$	(3)
P 10 .Ɔ:	$2 = 1 + 1$	(4)
(4) . (3) . (2, 1 + 1) [*a*, *b*] (P 5) :Ɔ:	$2 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$	(Theorem).

Note. We have written explicitly all the steps of this very easy proof. For the sake of brevity, we now write it as follows:

P 1 . 1 [*a*] (P 6) :Ɔ: $1 + 1 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$. P 10 . (2, 1+1) [*a*, *b*] (P 5) :Ɔ: Th.

or

P 1 . P 6 :Ɔ: $1 + 1 \, \varepsilon \, \mathrm{N}$. P 10 . P 5 :Ɔ: Th.

une preuve selon Peano

David Hilbert (1862–1943)

(photo prise au début
des années 1900)

installé à Göttingen
depuis 1895

Grundlagen der Geometrie, 1899

Traduction française, publiée dès 1900

en allemand : « Dinge »
(choses)

Les éléments de la Géométrie et les cinq groupes d'axiomes.

Convention. — Concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du PREMIER système, nous les nommerons *points* et nous les désignerons par A, B, C, ...; les êtres du DEUXIÈME système, nous le nommerons *droites* et nous les désignerons par *a*, *b*, *c*, ...; les êtres du TROISIÈME système, nous les nommerons *plans* et nous les désignerons par α, β, γ, ...; les points seront aussi nommés *éléments de la Géométrie linéaire* ; les points et les droites, *éléments de la Géométrie plane*; et les points, les droites et les plans, *éléments de la Géométrie de l'espace* ou *éléments de l'espace*.

Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT », « CONTINU » ; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des *axiomes de la Géométrie*

Le groupe d'axiomes I : Axiomes d'association.

Les axiomes de ce groupe établissent une *association* entre les notions précédemment indiquées, points, droites et plans. Ces axiomes sont les suivants :

I, 1. *Deux points distincts,* A, B, *déterminent toujours une droite* a; *nous poserons* $AB = a$ *ou* $BA = a$.

Au lieu de « DÉTERMINENT », nous emploierons aussi d'autres tournures de phrase; par exemple : A « EST SITUÉ SUR » a; A « EST UN POINT DE » a; a « PASSE PAR » A « ET PAR B »; « a JOINT A ET B » ou « JOINT A A B ». Lorsque A est situé sur a et, en outre, sur une autre droite b, nous emploierons aussi le mode d'expression : « LES DROITES a ET b ONT LE POINT A EN COMMUN », et ainsi de suite.

I, 2. *Deux points distincts quelconques d'une droite déterminent cette droite, et sur toute droite il y a au moins deux points; c'est-à-dire que, si l'on a* $AB = a$ *et* $AC = a$ *et* $B \neq C$, *on a aussi* $BC = a$.

I, 3. *Trois points* A, B, C *non situés sur une même droite déterminent toujours un plan* α; *nous poserons* $ABC = \alpha$.

ou « consistance » du système d'axiomes

La non-contradiction des axiomes.

Les axiomes des cinq groupes d'axiomes dont nous avons parlé dans le Chapitre I ne sont pas en contradiction, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'en déduire par un raisonnement logique une proposition qui soit en contradiction avec un de ces axiomes. Pour le prouver il suffit d'assigner une géométrie où l'ensemble des cinq groupes soit vérifié.

A cet effet, considérons le domaine Ω de tous les nombres algébriques qui prennent naissance, lorsque, partant du nombre 1, l'on effectue un nombre fini de fois les quatre opérations, addition, soustraction, multiplication, division et une cinquième opération : $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω désigne chaque fois un nombre ayant déjà pris naissance par le moyen de ces cinq opérations.

Nous regarderons un couple de nombres (x, y) du domaine Ω comme un point et le rapport $(u:v:w)$ de trois nombres quelconques de Ω, pourvu que u, v ne soient pas tous deux nuls, comme une droite; enfin l'équation

$$ux + vy + w = 0$$

l'axiome d'Archimède V.

De tout cela on conclut que toute contradiction dans les conséquences tirées de nos axiomes devrait aussi apparaitre dans l'arithmétique du domaine Ω.

Les considérations analogues relatives à la Géométrie de l'espace ne présenteraient aucune difficulté.

Dans les développements qui précèdent, si l'on choisissait, au lieu du domaine Ω, le domaine de tous les nombres réels nous obtiendrions également une géométrie où l'ensemble des axiomes I-V serait aussi vérifié; mais pour notre démonstration il suffisait d'employer le domaine Ω qui renferme seulement un ENSEMBLE DÉNOMBRABLE d'éléments.

Indépendance de l'axiome de la continuité V.
(Géométrie non archimédienne.)

Pour démontrer l'indépendance de l'axiome V dit *d'Archimède*, il nous faut construire une Géométrie où seront vérifiés tous les axiomes à l'exception de cet axiome en question (1).

A cet effet, construisons le domaine $\Omega(t)$ de toutes les fonctions algébriques de t, qui proviennent de t au moyen des quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division, et de la cinquième opération $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω désigne une fonction quelconque, déjà obtenue au moyen de ces cinq opérations. L'ensemble des éléments de $\Omega(t)$ — de même qu'il en était précédemment de Ω — est un ensemble dénombrable. Les cinq opérations peuvent être toutes effectuées d'une manière univoque et réelle. Le domaine $\Omega(t)$ ne renferme donc que des fonctions de t univoques et réelles.

Bertrand Russell,
The Principles of Mathematics, Cambridge 1903.

Une référence incontournable pour la logique mathématique,
pour un bon nombre d'années :

Bertrand Russell et Alfred N. Whitehead,
Principia Mathematica, Cambridge 1910, 1912, 1913.

Ernst Zermelo (en 1907)

1871–1953

Théorème de Zermelo (1904)

Tout ensemble X peut être muni d'un bon ordre ;

C'est une conséquence de *l'axiome du choix* :

$$\exists\, \phi : \underbrace{\mathcal{P}(\mathrm{X}) \setminus \{\emptyset\}} \to \mathrm{X} \ \ \text{t.q.}\ \ \forall\, \mathrm{Y},\ \ \phi(\mathrm{Y}) \in \mathrm{Y}$$

pour tout sous-ensemble Y non vide de X

(fonction de choix)

(ensemble des sous-ensembles de X qui sont non vides)

Un ensemble bien ordonné est isomorphe (pour l'ordre) à un certain ordinal (uniquement déterminé)

Zermelo 1908 : axiomes pour la théorie des ensembles

Grundlegende Definitionen und Axiome.

1. Die Mengenlehre hat zu tun mit einem „*Bereich*“ $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als „*Dinge*“ bezeichnen wollen, unter denen die „Mengen“ einen Teil bilden. Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$. Von einem Dinge a sagen wir, es „existiere“, wenn es dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört; ebenso sagen wir von einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Dingen, „es gebe Dinge der Klasse $\mathfrak{K}$“, wenn $\mathfrak{B}$ mindestens ein Individuum dieser Klasse enthält.

« choses »

2. Zwischen den Dingen des Bereiches $\mathfrak{B}$ bestehen gewisse „*Grundbeziehungen*“ der Form $a \varepsilon b$. Gilt für zwei Dinge a, b die Beziehung $a \varepsilon b$, so sagen wir, „a sei *Element* der Menge b“ oder „b enthalte a als Element“ oder „besitze das Element a“. Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine *Menge* bezeichnet werden, aber auch nur dann — mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II).

3. Ist jedes Element x einer Menge M gleichzeitig auch Element der Menge N, so daß aus $x \varepsilon M$ stets $x \varepsilon N$ gefolgert werden kann, so sagen wir, „M sei *Untermenge* von N“, und schreiben $M \underline{\in} N$*). Es ist stets $M \underline{\in} M$, und aus $M \underline{\in} N$ und $N \underline{\in} R$ folgt immer $M \underline{\in} R$. „*Elementenfremd*“

axiome d'exten-sionnalité :

die Frage, ob $M \in N$ oder nicht.

Über die Grundbeziehungen unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden „*Axiome*“ oder „*Postulate*“.

Axiom I. Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \mathrel{\underline{\in}} N$ und $N \mathrel{\underline{\in}} M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

(Axiom der Bestimmtheit.)

Die Menge, welche nur die Elemente $a, b, c, \cdots, r$ enthält, wird zur Abkürzung vielfach mit $\{a, b, c, \cdots, r\}$ bezeichnet werden.

Axiom II. Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die „*Nullmenge*“ 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist a irgend ein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge $\{a\}$, welche a und nur a als Element enthält; sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge $\{a, b\}$, welche sowohl a als b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

(Axiom der Elementarmengen.)

5. Nach I sind die „Elementarmengen“ $\{a\}$, $\{a, b\}$ immer eindeutig bestimmt, und es gibt nur eine einzige „Nullmenge“. Die Frage

Axiomes de la théorie des ensembles

$$\mathfrak{B}$$

est le « domaine » (Bericht), collection de « choses » (Dinge)

$$a \,\varepsilon\, b$$

est la relation qui peut exister entre deux objets de la collection $\mathfrak{B}$

Axiomes de la théorie des ensembles

On dit qu'un objet b du domaine $\mathfrak{B}$ est un ENSEMBLE s'il existe a tel que

$$a \,\varepsilon\, b$$

et on dit que a est ÉLÉMENT de b.

Axiomes de la théorie des ensembles

Extensionnalité — X est déterminé par ses éléments

Existence des ensembles élémentaires — ensemble vide, singletons, paires

Axiome de la somme — (concerne les réunions)

Ensemble des parties — $X \longrightarrow \mathscr{P}(X)$

Axiome de l'infini

Axiome du choix

Compréhension

Axiome de

Compréhension :

Si $\mathrm{P}(x)$ est une propriété bien définie que peut posséder ou non un objet x quelconque du domaine $\mathfrak{B}$, et si un objet M du domaine est un ENSEMBLE, il existe un ENSEMBLE N, objet de $\mathfrak{B}$ dont les ÉLÉMENTS sont précisément les ÉLÉMENTS de M qui ont la propriété P :

$$\mathrm{N} = \{x \in \mathrm{M} \ : \ \mathrm{P}(x) \text{ est vraie}\}.$$

$\varnothing = \{\, x \in \mathrm{M} : x \neq x \,\}$ est un exemple

ci-dessus, la « propriété bien définie » $\mathrm{P}(x)$ n'est pas très bien définie !

Vers 1920

Le « programme de Hilbert » pour les nuls (pour moi)

On aimerait réduire les preuves mathématiques d'une théorie donnée (par exemple : l'arithmétique) à des manipulations quasiment mécaniques à partir des axiomes de cette théorie.

On espère pouvoir démontrer de cette manière la non-contradiction de l'arithmétique, et plus généralement de toutes les mathématiques.

Extrait d'un texte qu'on reverra plus loin :

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfas-

Le développement des mathématiques en direction d'une plus grande exactitude a conduit, comme on le sait, à ce que de larges domaines soient formalisés de telle manière que les preuves puissent y être ramenées à un petit nombre de règles mécaniques.

Les axiomes de Zermelo-1908 ne suffisent pas pour formaliser toutes les notions introduites par Cantor !

Thoralf Skolem (1887–1963) (en 1923)

Abraham Adolf Fraenkel (1891–1965) (en 1922)

John von Neumann (1903–1957) (en 1923, 1925)

Remplacement :

Si $x \mapsto f(x)$ est une application bien définie du domaine $\mathfrak{B}$ dans lui-même, et si un objet M du domaine est un ENSEMBLE, il existe un ENSEMBLE N, objet de $\mathfrak{B}$ dont les ÉLÉMENTS sont précisément les *images* par f des ÉLÉMENTS de M :

$$\mathrm{N} = \{ f(x) \ : \ x \in \mathrm{M} \},$$

exemple élémentaire :

M = $\mathscr{P}(\varnothing)$ = $\{\varnothing\}$;

f(x) = a pour tout x ;

N = {a} (singleton)

désormais en théorie axiomatique on peut tout ramener à un ENSEMBLE :

le couple, ensemble produit = ensemble des couples

$\langle x, y \rangle = \{x, \{x, y\}\}$, $\quad$ X × Y

identifiée à

application f de X dans Y $\equiv$ son graphe G, qui est un sous-ENSEMBLE de X × Y

Ordinaux selon von Neumann

Un *ordinal* est un ensemble α qui a les trois propriétés suivantes :

- la relation $x \in y$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble α, c-à-d

  si x, y, z sont des éléments de α, alors :

  $x \notin x$; $(x \in y \text{ et } y \in z) \Rightarrow x \in z$

- tout sous-ensemble non vide de α a un plus petit élément pour la relation $\in$,

- si $\beta \in \alpha$, alors $\beta \subset \alpha$.

bien ordonné pour la relation d'appartenance

$$\underbrace{\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ \ldots}$$

les premiers (les plus petits) ordinaux
pour l'inclusion

L'ordinal	$\emptyset,$	$\{\emptyset\},$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\},$	$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$	$\ldots$
représente l'entier :	0	1 = {0}	2 = {0, 1}	3 = {0, 1, 2}	. . .

L'ordre des ordinaux : $\alpha \leqslant \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subset \beta\,; \qquad \alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \beta$

$$\alpha + 1 \;=\; \alpha \cup \{\alpha\}$$

$$\emptyset \in \omega\,;$$

$$\alpha \in \omega \;\Rightarrow\; \alpha + 1 \in \omega$$

une forme de l'axiome de l'infini : il existe un objet ω tel que . . .

Et après...

Kurt Gödel vers 1925

Kurt Gödel (1906–1978)

Les théorèmes d'incomplétude

(1931)

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I[1]).

Von **Kurt Gödel** in Wien.

(1931)

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)[2]) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre[3]) andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt[4]), die sich aus den Axiomen nicht

Pseudologos le Crétois est un menteur pathologique ;
il n'ouvre la bouche que pour proférer des mensonges.

Un jour, Pseudologos a déclaré :

« je suis un menteur »

?

Une forme plus classique de ce paradoxe :

Pseudologos le Crétois déclare :
« tous les Crétois sont des menteurs »

bemerken, daß sich der Begriff „Klassenzeichen" sowie die ordnende Relation R im System PM definieren lassen. Sei α ein beliebiges Klassenzeichen; mit $[\alpha; n]$ bezeichnen wir diejenige Formel, welche aus dem Klassenzeichen α dadurch entsteht, daß man die freie Variable durch das Zeichen für die natürliche Zahl n ersetzt. Auch die Tripel-Relation $x = [y; z]$ erweist sich als innerhalb PM definierbar. Nun definieren wir eine Klasse K natürlicher Zahlen folgendermaßen:

$$n \varepsilon K \equiv \overline{Bew}\,[R(n); n] \qquad (1)$$ [11a]

(wobei $Bew\, x$ bedeutet: x ist eine beweisbare Formel). Da die Begriffe, welche im Definiens vorkommen, sämtlich in PM definierbar sind, so auch der daraus zusammengesetzte Begriff K, d. h. es gibt ein Klassenzeichen S[12], so daß die Formel $[S; n]$ inhaltlich gedeutet besagt, daß die natürliche Zahl n zu K gehört. S ist als Klassenzeichen mit einem bestimmten $R(q)$ identisch, d. h. es gilt

$$S = R(q)$$

für eine bestimmte natürliche Zahl q. Wir zeigen nun, daß der Satz $[R(q); q]$[13] in PM unentscheidbar ist. Denn angenommen der Satz $[R(q); q]$ wäre beweisbar, dann wäre er auch richtig, d. h. aber nach dem obigen q würde zu K gehören, d. h. nach (1) es würde $\overline{Bew}\,[R(q); q]$ gelten, im Widerspruch mit der Annahme. Wäre dagegen die Negation von $[R(q); q]$ beweisbar, so würde $\overline{n \varepsilon K}$, d. h. $Bew\,[R(q); q]$ gelten. $[R(q); q]$ wäre also zugleich mit seiner Negation beweisbar, was wiederum unmöglich ist.

Les axiomes sont réputés *vrais*, et
les règles de déduction correctes.

Un énoncé qui est déduit des axiomes au moyen
des règles de déduction est *démontrable*,

$$\text{démontrable} \quad \Rightarrow \quad \text{vrai.}$$

Dans un système *non contradictoire*,

$$\text{E démontrable} \;\Rightarrow\; \text{« NON E » n'est pas démontrable}$$

On se place en arithmétique, les « valeurs » considérées sont des entiers naturels. On s'intéresse aux énoncés $\mathrm{E} = \mathrm{E}(x)$ à une variable libre x, par exemple

$$\mathrm{E}_0 \equiv \text{« 5 divise } x \text{ » :} \qquad \exists y\,(x = 5\,.\,y)$$

on note $[\mathrm{E}\,;\,k]$ l'énoncé « clos » obtenu en remplaçant la variable libre x par l'entier k

cet énoncé clos est une *affirmation*, vraie ou fausse, démontrable ou pas : $[\mathrm{E}_0\,;\,20]$ est « 5 divise 20 », qui est à la fois vraie et démontrable

Les énoncés sont associés injectivement à des entiers et Gödel introduit des fonctions f *calculables* qui miment les principes de démonstration :

Si on a n = f(m), l'énoncé de numéro n peut être déduit de l'énoncé m par un axiome ou une règle logique

On considère une liste $(\mathrm{R}_n)_{n \geqslant 0}$ de tous les énoncés à une variable libre, puis

$$\mathrm{K} \;=\; \left\{ n \;:\; \textsc{non}\big(\mathrm{Dem}\,[\mathrm{R}_n\,;\,n]\big) \right\}\,;$$

(ensemble des n tels que l'énoncé clos $\mathrm{R}_n(n)$ n'est pas démontrable)

il existe $\mathrm{S} = \mathrm{S}(x)$ énoncé à une variable libre tel que

$$n \in \mathrm{K} \;\Leftrightarrow\; [\mathrm{S}\,;\,n]$$

$$\text{et il existe } q \text{ tel que } \quad \mathrm{S} = \mathrm{R}_q\,;$$

$$[\mathrm{R}_q\,;\,q] \;\equiv\; [\mathrm{S}\,;\,q] \;\Leftrightarrow\; q \in \mathrm{K} \;\equiv\; \textsc{non}\big(\mathrm{Dem}\,[\mathrm{R}_q\,;\,q]\big)$$

est indécidable !

Modèles

une collection de
de « choses » si
vous voulez !

Modèle de la théorie des ensembles :

au sens naïf, usuel, de tous vos jours mathématiques . . .

On peut considérer qu'un modèle est un ensemble $\mathcal{M}$ non vide qui a une structure de *graphe orienté*.

Les arcs du graphe modélisent l'« appartenance » :
l'arc (a, b) ou a $\longrightarrow$ b existe dans le graphe *M* quand
on veut exprimer $a \in b$ au sens du modèle

Modèle :

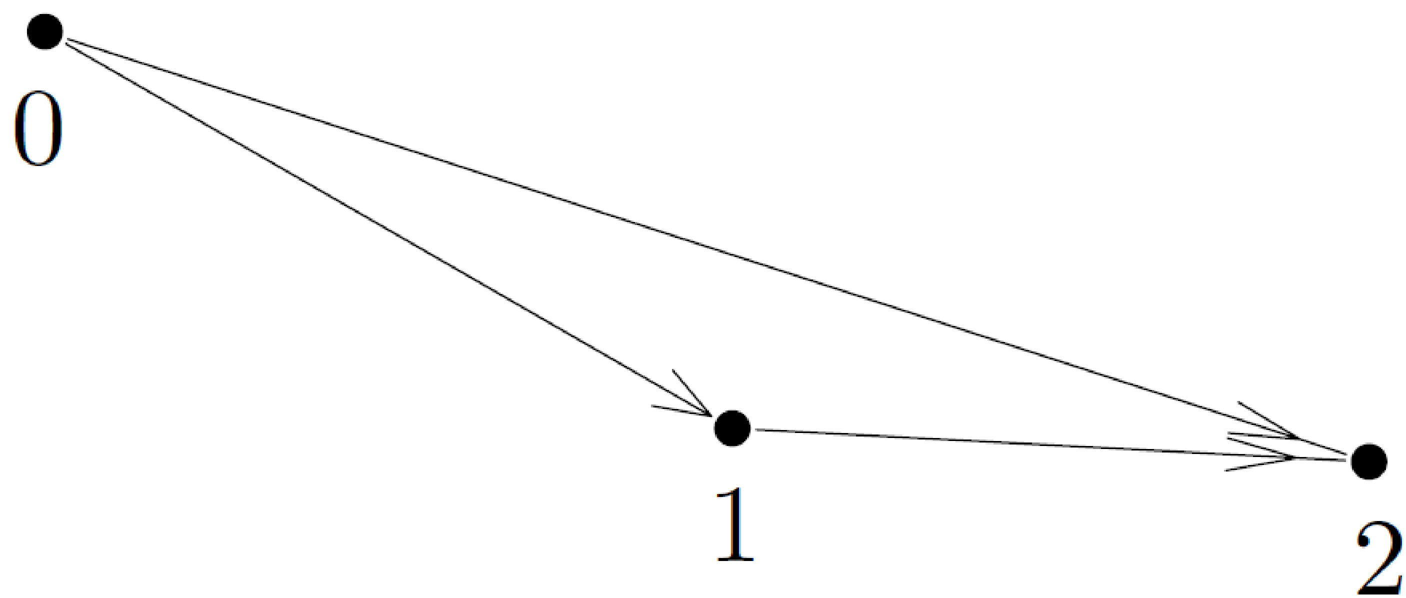
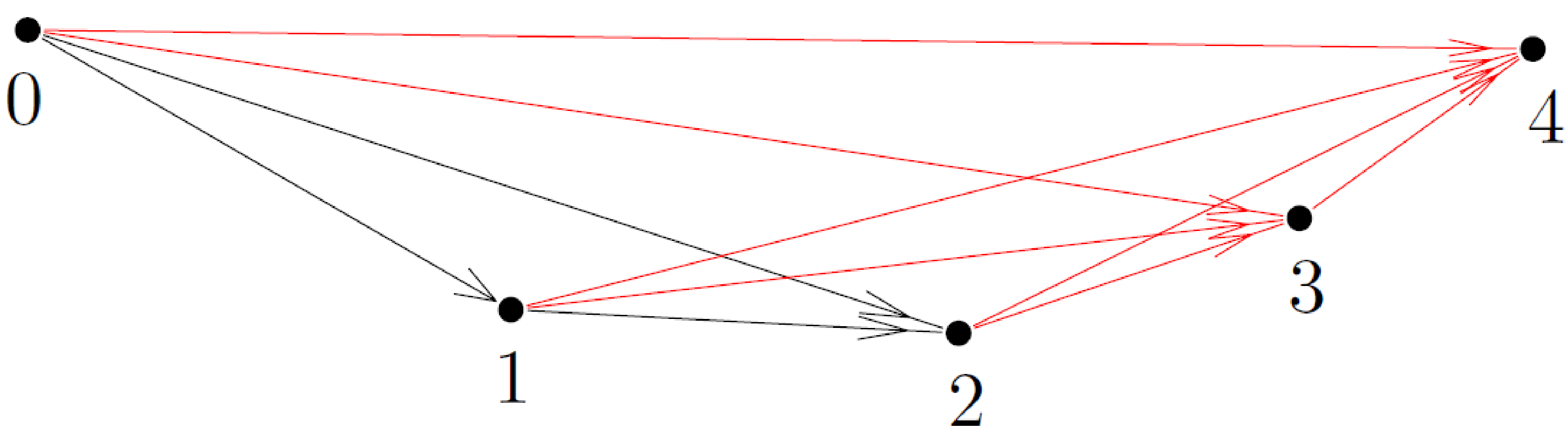
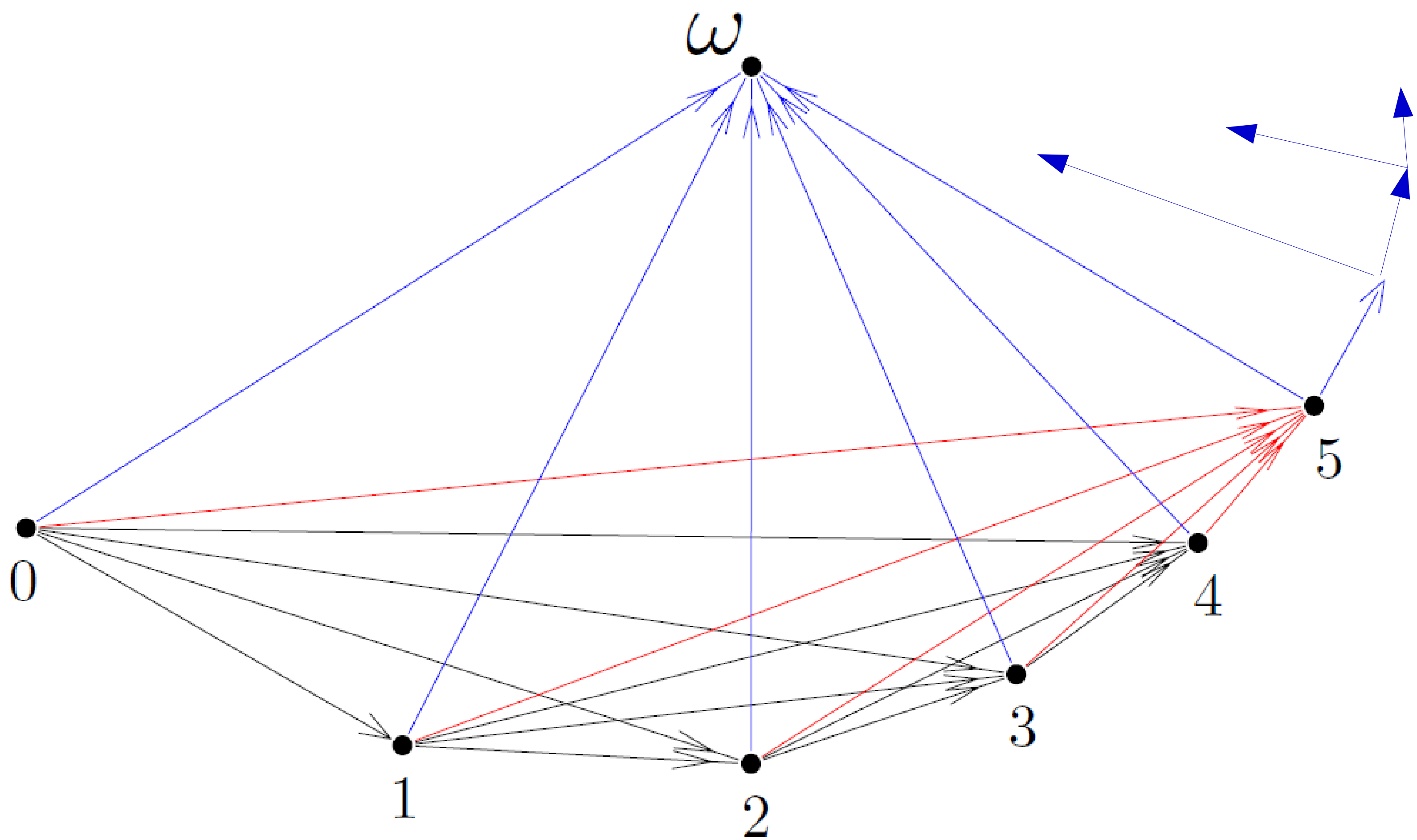


schéma pour les premiers entiers de von Neumann :
aucune flèche vers 0 (0 modélise l'ensemble vide)

Modèle :



Modèle : une figuration de ω



Axiomes de la théorie ZF (pour Zermelo–Fraenkel) :

Extensionnalité
Somme
Ensembles des parties
Infini
Remplacement

On ajoute en général l'axiome du choix AC
pour obtenir la théorie ZFC

Modèle :

on ne peut pas « fabriquer » un modèle de la théorie des ensembles ZF à partir des propres axiomes de ZF (cela résulte du *deuxième théorème d'incomplétude* de Gödel).

Dans un modèle de ZF, on définit des ordinaux (les ordinaux du modèle) en suivant la définition de von Neumann appliquée avec la notion d'appartenance propre au modèle.

L'axiome de l'infini implique l'existence d'un objet ω qui est le plus petit ordinal infini du modèle.

(au sens du modèle)

Un ordinal α du modèle est dit ***fini*** si tout ordinal non nul plus petit que α est de la forme $\beta+1$ (un *successeur*)

Modèle :

à l'intérieur d'un modèle se recréent
toutes les notions mathématiques,
mais réinterprétées au sens du modèle ;
on pourrait dire que les objets du modèle
vivent dans leur monde et ignorent,
ne voient pas le « monde extérieur ».

On ne peut pas « fabriquer » un modèle de
la théorie des ensembles (Gödel).

Mais on peut « bricoler » un modèle existant
pour construire un modèle différent,
avec des propriétés additionnelles.

Löwenheim-Skolem :

si on dispose d'un modèle M de ZF,

on peut construire un modèle M' dénombrable.

Si on dispose d'un modèle M de ZF,

on peut construire un modèle M' qui contient des entiers

non standard (des entiers infiniment grands).

Si on dispose d'un modèle M de ZF, on peut construire

un modèle M' qui satisfait l'axiome du choix

et l'hypothèse du continu (Gödel, 1940).

(c'est la consistance relative de AC et HC)

Paul Cohen (1964 environ) **:**

la méthode dite de *forcing*
produit un modèle où CH est fausse

Présentation visible sur internet à l'adresse :

https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/articles/MlV2021/MlV-2021.pdf

accompagnée d'un texte contenant une liste de références :

https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/articles/MlV2021/Cantor-CH.pdf

Trois références utilisées (pillées) ici, en particulier pour leurs images **:**

Heinz-Dieter Ebbinghaus, in cooperation with Volker Peckhaus,
Ernst Zermelo. An Approach to His Life and Work. Second Edition. Springer, 2015.

Walter Purkert & Hans Joachim Ilgauds, *Georg Cantor: 1845–1918*.
Vita Mathematica 1, Birkhäuser Verlag, 1987.

Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel.*
A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931.
Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.