Un ensemble simple E, formé des points d’une suite convergente et de sa limite ; l’ensemble dérivé E’ possède un seul point : la limite de la suite.

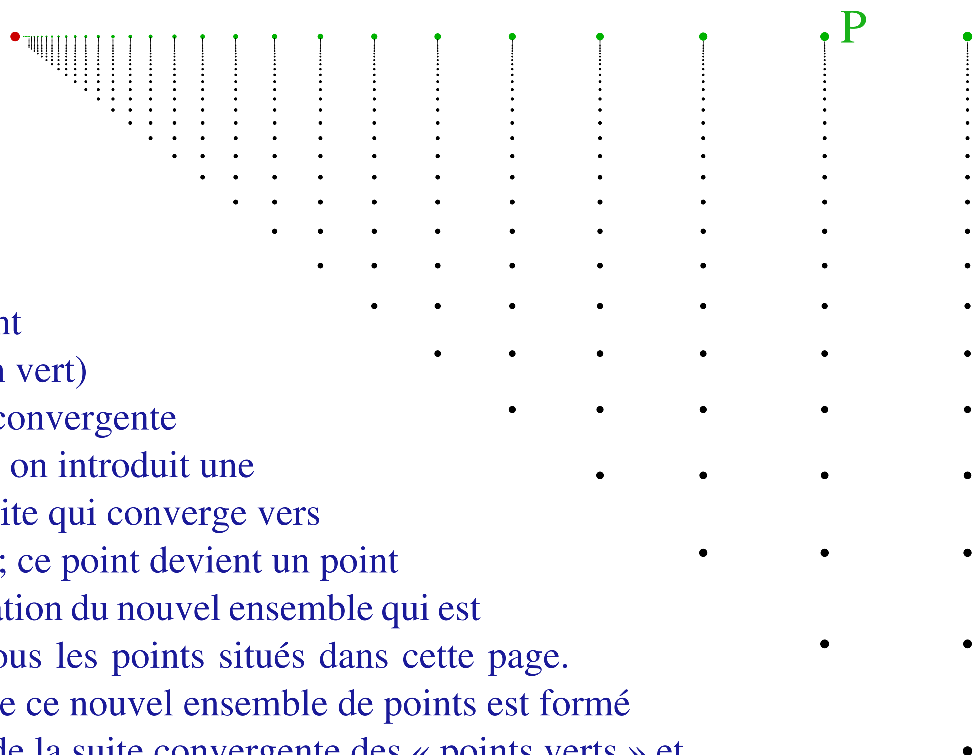
Les points « verts » sont isolés : on peut trouver un petit disque ouvert contenant un tel point et ne contenant aucun autre point de la suite ; le point « rouge » est le point limite de la suite ; tout disque ouvert qui contient ce point contient aussi une infinité de points de la suite.

Exemple numérique correspondant à l'image précédente :

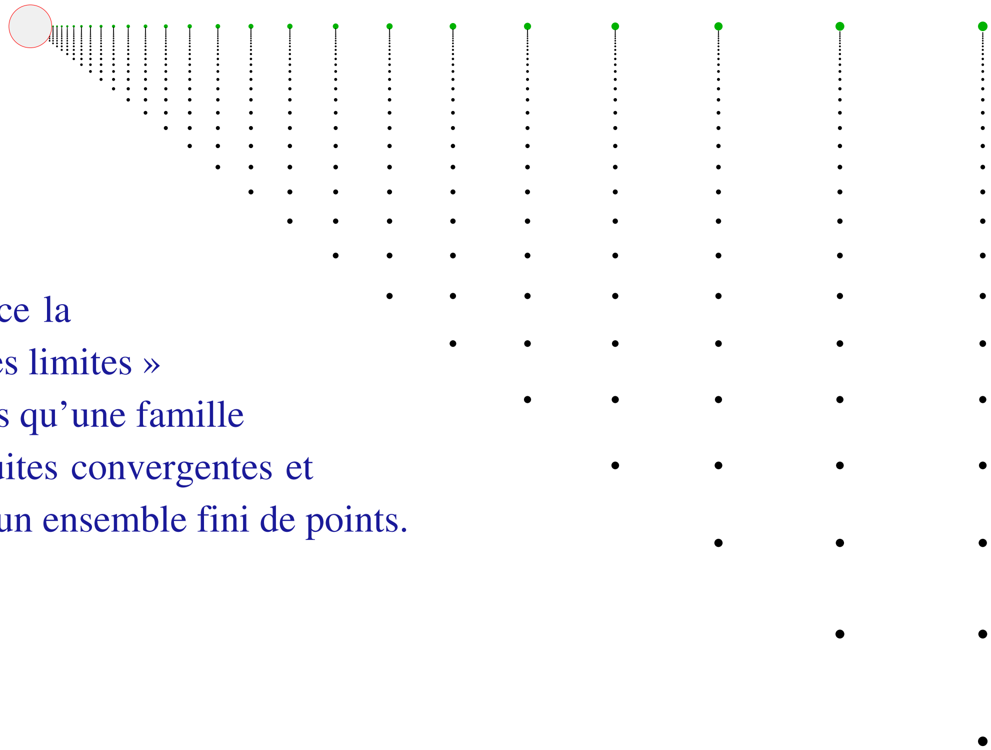
$$\frac{1}{n}, \quad n \text{ entier } \geqslant 1$$

On considère l'ensemble des points de la suite, auquel on ajoute la limite 0.

Si on « efface » un disque autour de la limite, il ne reste qu’un ensemble fini :



Pour
chaque point
isolé P (en vert)
de la suite convergente
précédente, on introduit une
nouvelle suite qui converge vers
ce point P ; ce point devient un point
d'accumulation du nouvel ensemble qui est
formé de tous les points situés dans cette page.
Le dérivé de ce nouvel ensemble de points est formé
des points de la suite convergente des « points verts » et
de leur limite : ce dérivé est l'ensemble vu dans ce qui précède.



Si on efface la
« limite des limites »
on n’a plus qu’une famille
finie de suites convergentes et
peut–être un ensemble fini de points.

Version numérique de la suite « double » :

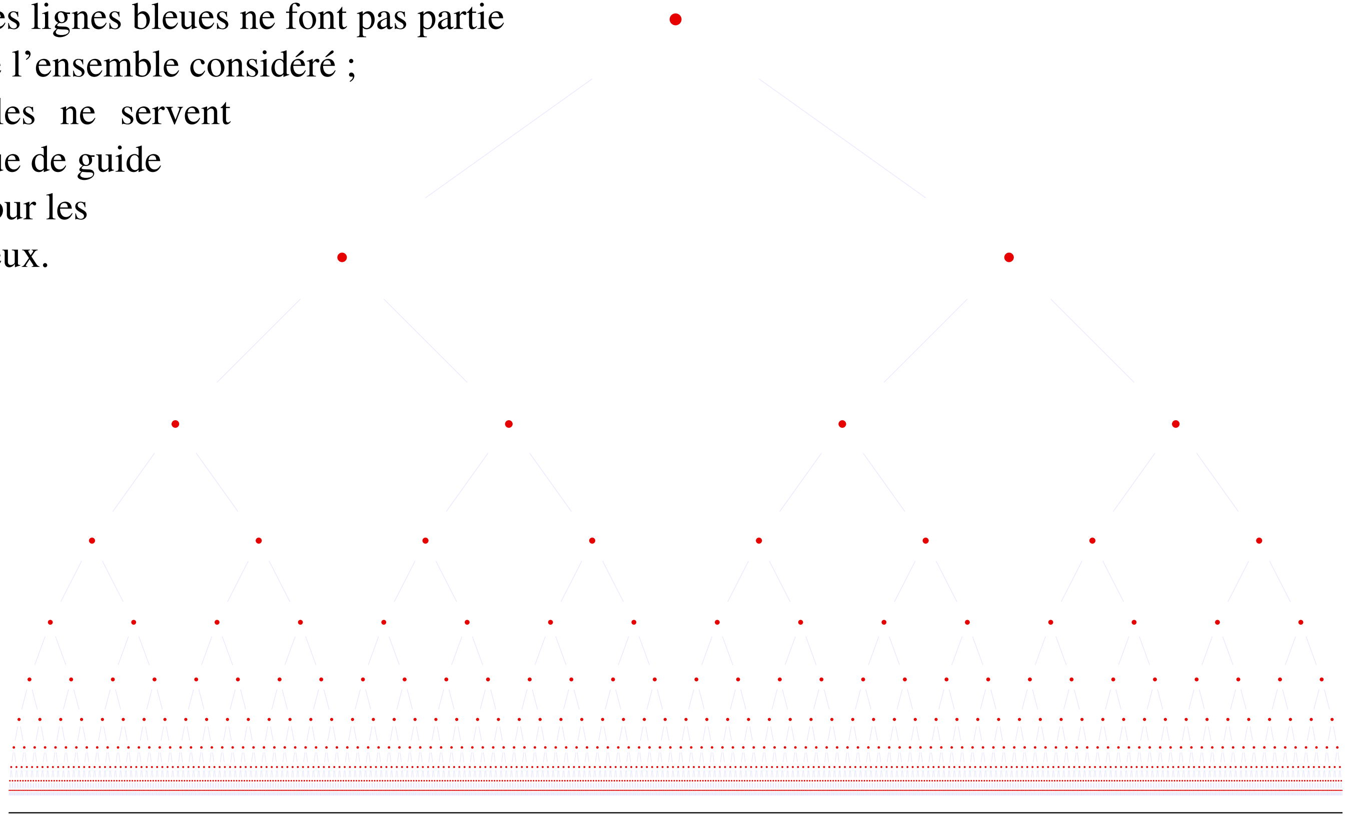
$$\frac{1}{n+\dfrac{1}{k}}, \qquad n, k \ \text{ entiers } \ \geqslant 1$$

Version numérique avec trois entiers :

$$\frac{1}{n + \dfrac{1}{k + \dfrac{1}{\ell}}}, \qquad n, k, \ell \ \text{ entiers } \ \geqslant 1$$

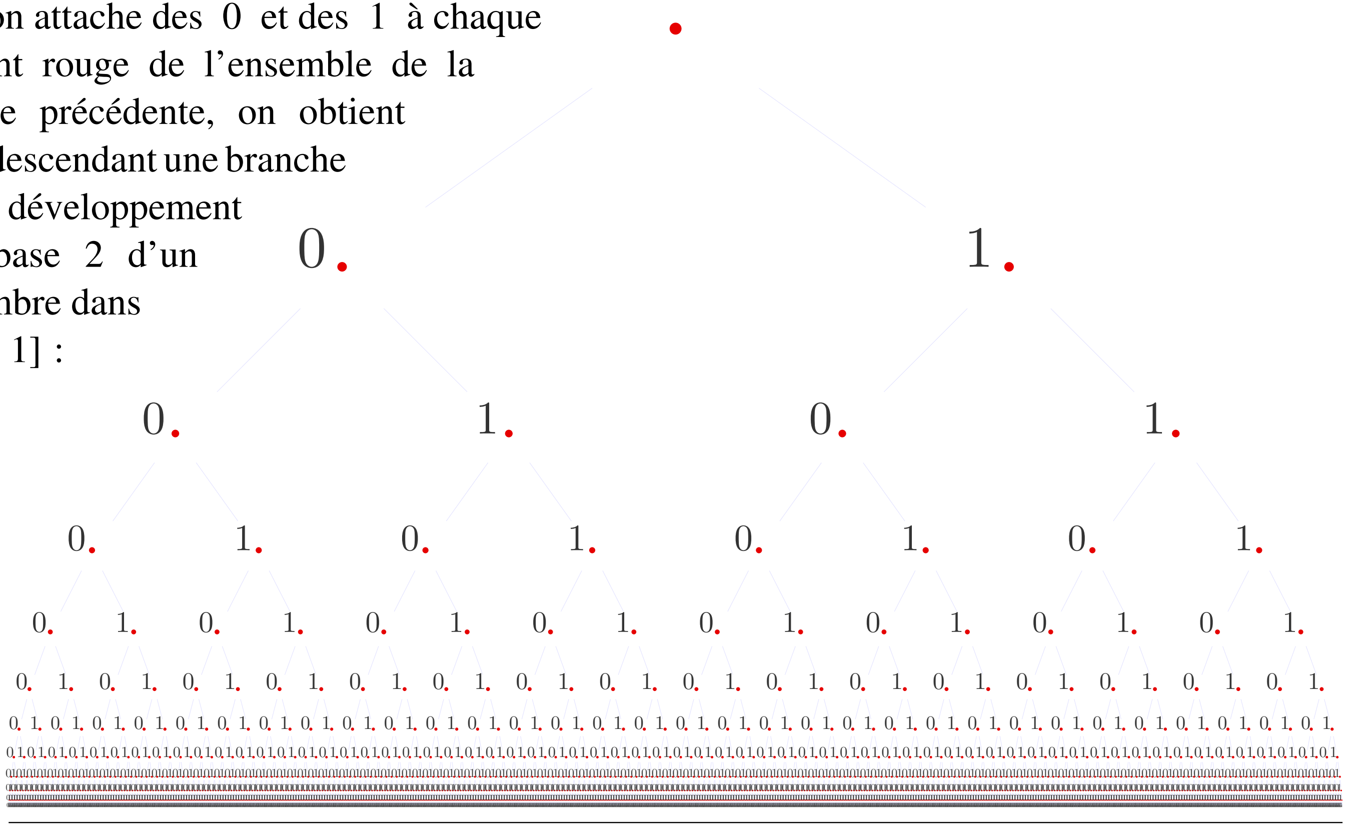
Cet exemple numérique ajoute à chaque point de l'exemple « double » qu'on a déjà vu une nouvelle suite qui converge vers ce point quand ℓ tend vers l'infini.

Les lignes bleues ne font pas partie
de l'ensemble considéré ;
elles ne servent
que de guide
pour les
yeux.



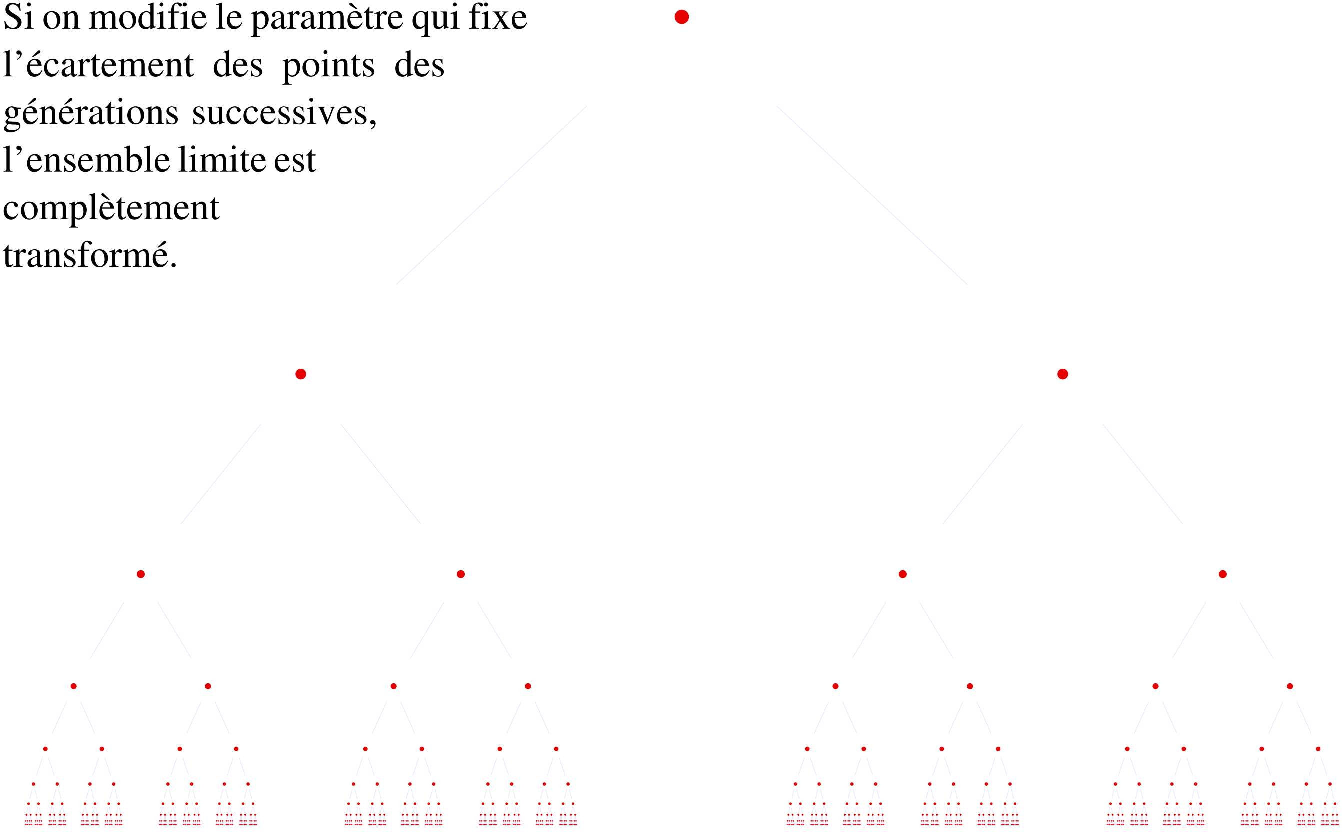
L'ensemble des points rouges admet le segment noir ci–dessus pour ensemble dérivé.

Si on attache des 0 et des 1 à chaque point rouge de l'ensemble de la page précédente, on obtient en descendant une branche le développement en base 2 d'un nombre dans $[0, 1]$:



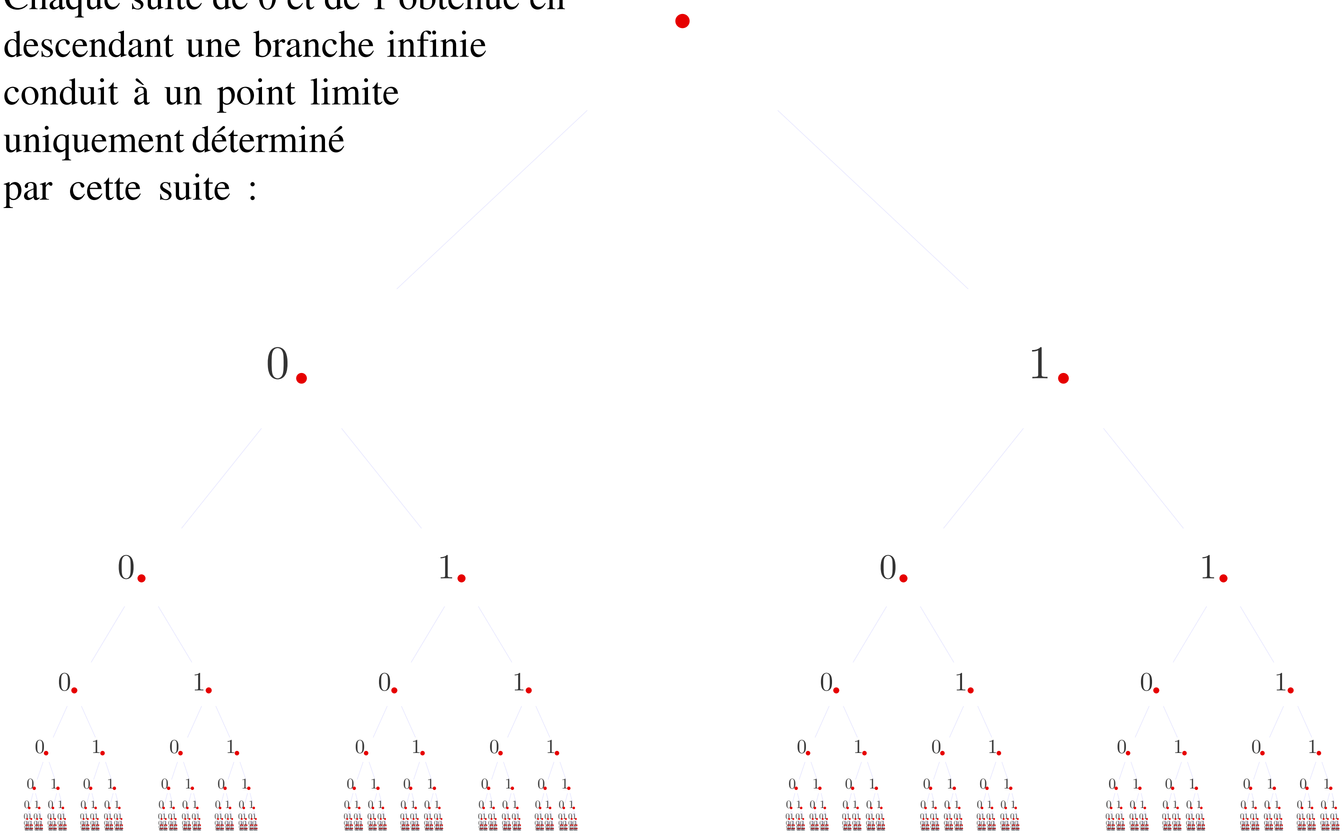
Le segment est identifié à [0, 1] ; certains nombres ont deux développements, un propre et un impropre (obtenu quand on prend toujours la branche droite à partir d'un moment).

Si on modifie le paramètre qui fixe l'écartement des points des générations successives, l'ensemble limite est complètement transformé.



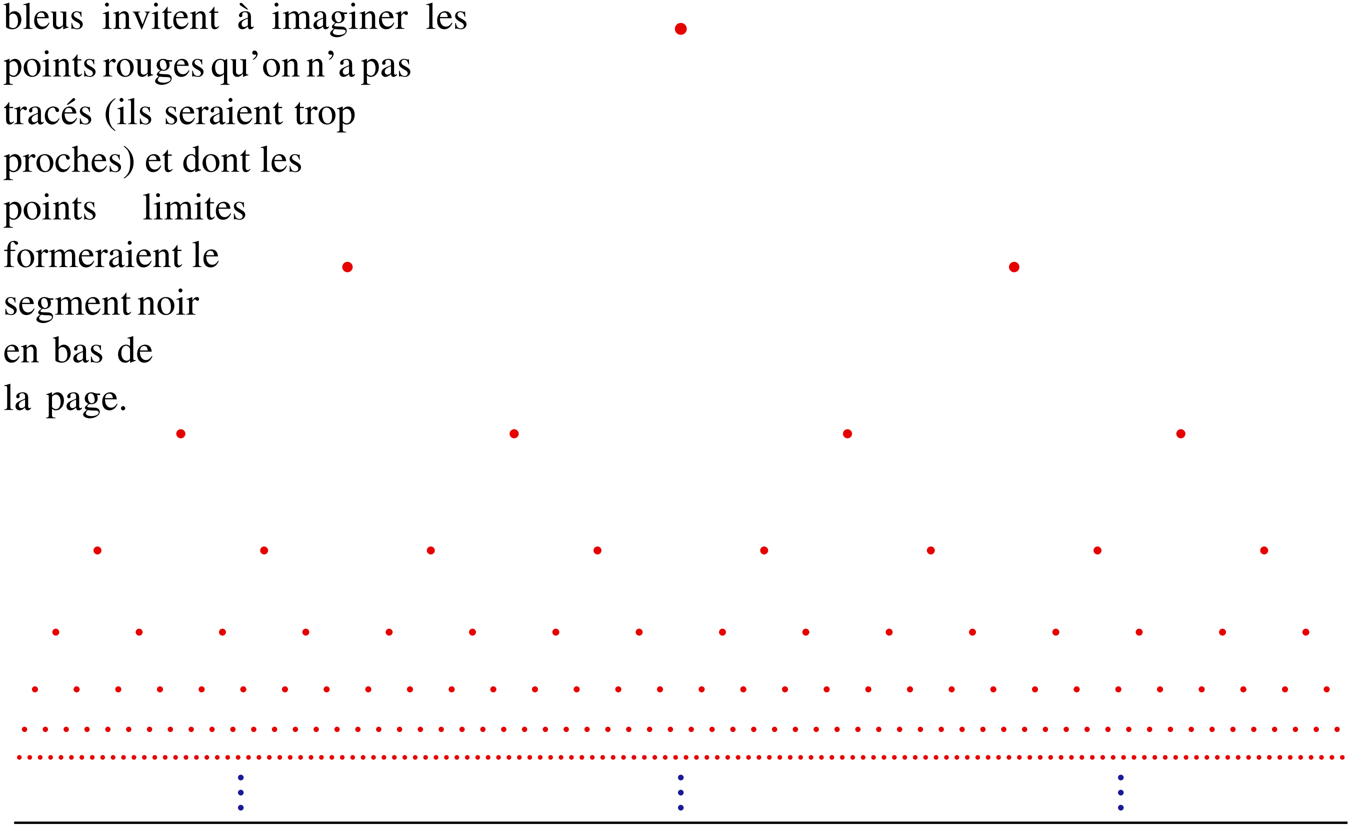
L'ensemble limite des points rouges est indessinable, c'est un ensemble de Cantor.

Chaque suite de 0 et de 1 obtenue en
descendant une branche infinie
conduit à un point limite
uniquement déterminé
par cette suite :



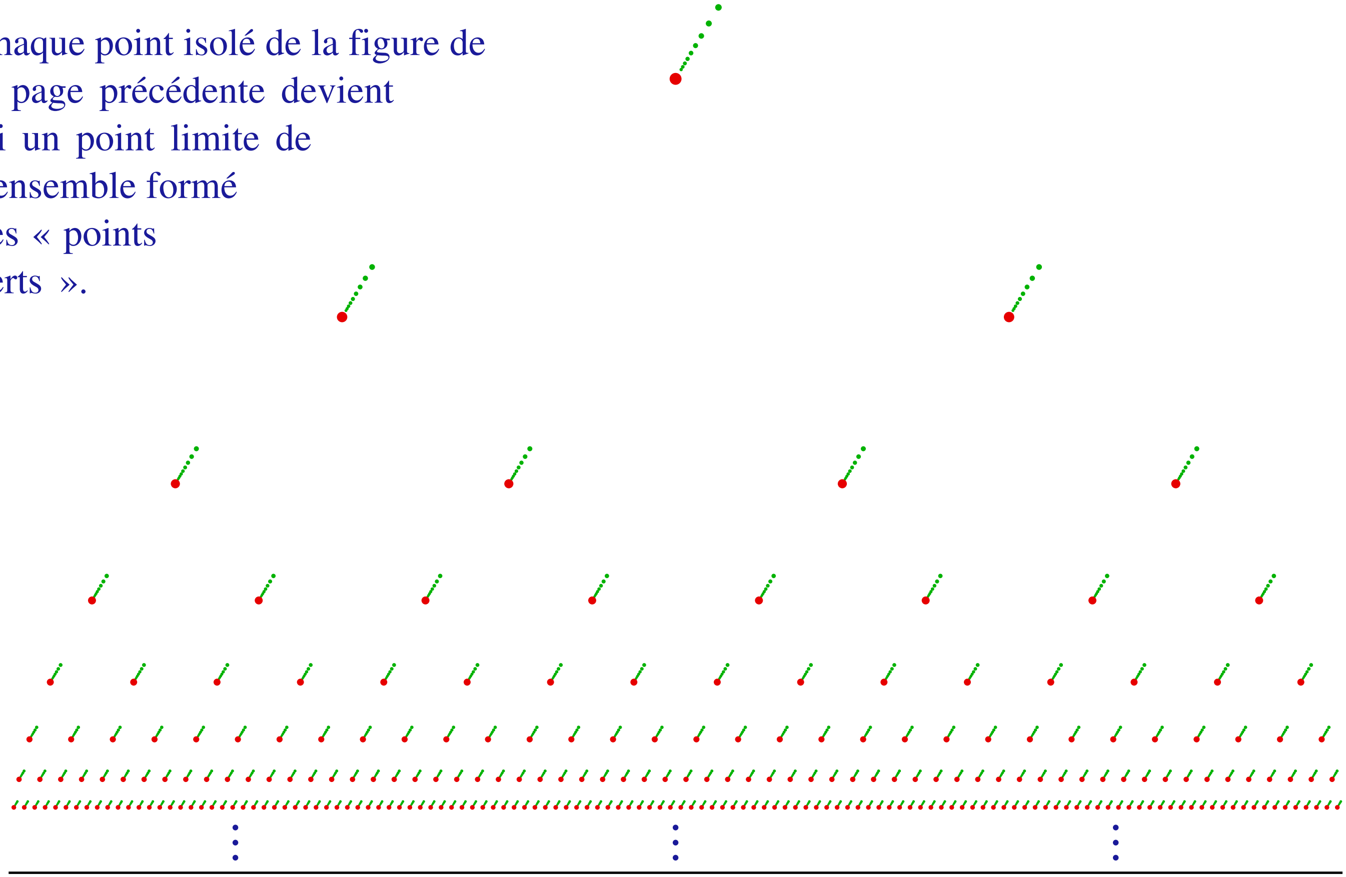
L'ensemble (de Cantor) limite est en bijection avec les suites de 0 et de 1.

Les points de suspension verticaux bleus invitent à imaginer les points rouges qu'on n'a pas tracés (ils seraient trop proches) et dont les points limites formeraient le segment noir en bas de la page.



On a redessiné un exemple déjà vu, pour le modifier à la page suivante.

Chaque point isolé de la figure de la page précédente devient ici un point limite de l'ensemble formé des « points verts ».



L'ensemble représenté à la page précédente est le dérivé de l'ensemble de cette page.