5 avril 2023

Jusqu'à l'infini, et après ?

(inspiré d'une histoire vraie)

Exposé du 5 avril 2023

Université Gustave Eiffel

Bernard Maurey

Collaborateur bénévole, IMJ–PRG, Sorbonne Université

https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/

Georg Cantor, vers 1870

(1845–1918)

Das Wesen der Mathematik
liegt in ihrer Freiheit.
G. Cantor

(1883)

Suites infinies arbitraires d'objets

Tiers exclu (logique classique)

succession infinie d'opérations

objets de la pensée

bijections, cardinalité

ensembles dénombrables

Karl Weierstrass

points limites, *ensemble dérivé*

ensemble parfait

Topologie de la droite (et de l'espace)

Berlin

ensemble bien ordonné, *ordinaux*

Leopold Kronecker

Autour de

1870

DE AEQUATIONIBUS SECUNDI GRADUS INDETERMINATIS.

DISSERTATIO INAUGURALIS
QUAM
CONSENSU ET AUCTORITATE
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
IN
ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA
BEROLINENSI
PRO
SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS
RITE CAPESSENDIS
DIE XIV. M. DECEMBRIS A. MDCCCLXVII
H. L. Q. S.
PUBLICE DEFENDET
AUCTOR
GEORGIUS CANTOR
PETROPOLITANUS.

(1867)

ADVERSARII ERUNT:
M. SIMON, DR. PHIL.
M. HENOCH, DR. PHIL.
E. LAMPE, DR. PHIL.

BEROLINI
TYPIS CAROLI SCHULTZII
KOMMANDANTEN-STRASSE.

Université de Berlin

Ernst Kummer (1810–1893)

Leopold Kronecker (1823–1891)

Karl Weierstrass (1815–1897)

Christoffel (56), Fuchs (58),
Schwarz (64), Cantor (67),
Frobenius (70), Killing (72),
Kovalevskaya (74), Schoenflies (77),
Runge (80), Kneser (84),
Hensel (84), Lerch (85),

Vita.

(1845)

Ego, Georgius Cantor, mense Martio anni MDCCCXLV patre Georgio, matre Maria, e gente Böhm, Petropoli natus sum, quo pater meus, negociator Copenhagcniensis commigraverat. — Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis in schola S. Petri imbutus, puer undecim annorum Germaniam cum parentibus petivi.

Darmstadiae scholam realem, deinde scholam polytechnicam, quae rectore beato Pr. Dr. Külp florebant, quatuor per annos frequentavi, ubi anno
(1862) MDCCCLXII testimonium maturitatis adeptus sum.

Sub hiemem ejusdem anni Turicum profectus sum, unde tamen morte patris mei, pia memoria per vitam colendi, jam ineunte vere anni MDCCCLXIII
(1863) revocatus sum. Auctumno ejusdem anni, inter cives universitatis litterariae Friderico Guilelmae a rectore magnifico Beseler receptus, a decano spect. Müllenhoff philos. ordini adscriptus sum.

Per octo semestria studiis mathematicis me dedi fere continuo Berolini, nisi quod per semestre aestivum anni MDCCCLXVI in civitate Georgia Augusta Gottingensi versatus sum. Legentes audivi Berolini viros ill. Arndt, Dove, Kronecker, Kummer, Magnus, Trendelenburg, Weierstrass; Gottingiae viros ill. Lotze, Minnigerode, Schering, Weber.

Excrcitationibus seminarii mathematici, quas moderantur viri ill. Kummer et ill. Wcierstrass per quattuor semestria interfui.

Quibus viris omnibus maxime de me meritis, imprimis ill. Kronecker, ill. Kummer, ill. Weierstrass, qui benevolentissime tironem adjuverunt, summas, quas possum, gratias ago.

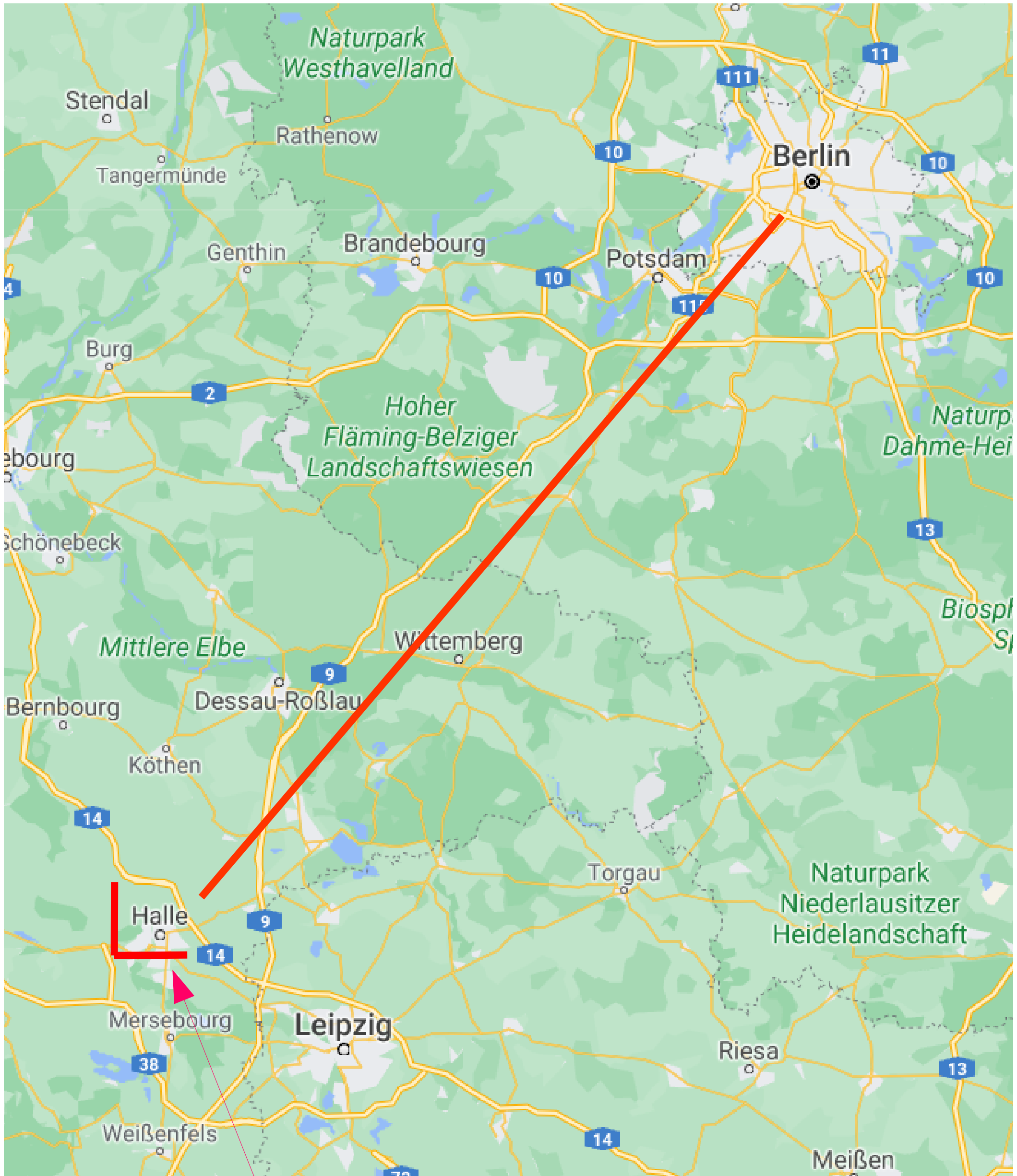
Anno proximo disquisitionibus arithmeticis cel. Gauss et theoriae numerorum cel. Legendre operam navavi, unde materiam dissertationis depromsi.

Theses.

I. In arithmetica methodi mere arithmeticae analyticis longe praestant.

II. Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiae naturam dijudicari non potest.

III. In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.



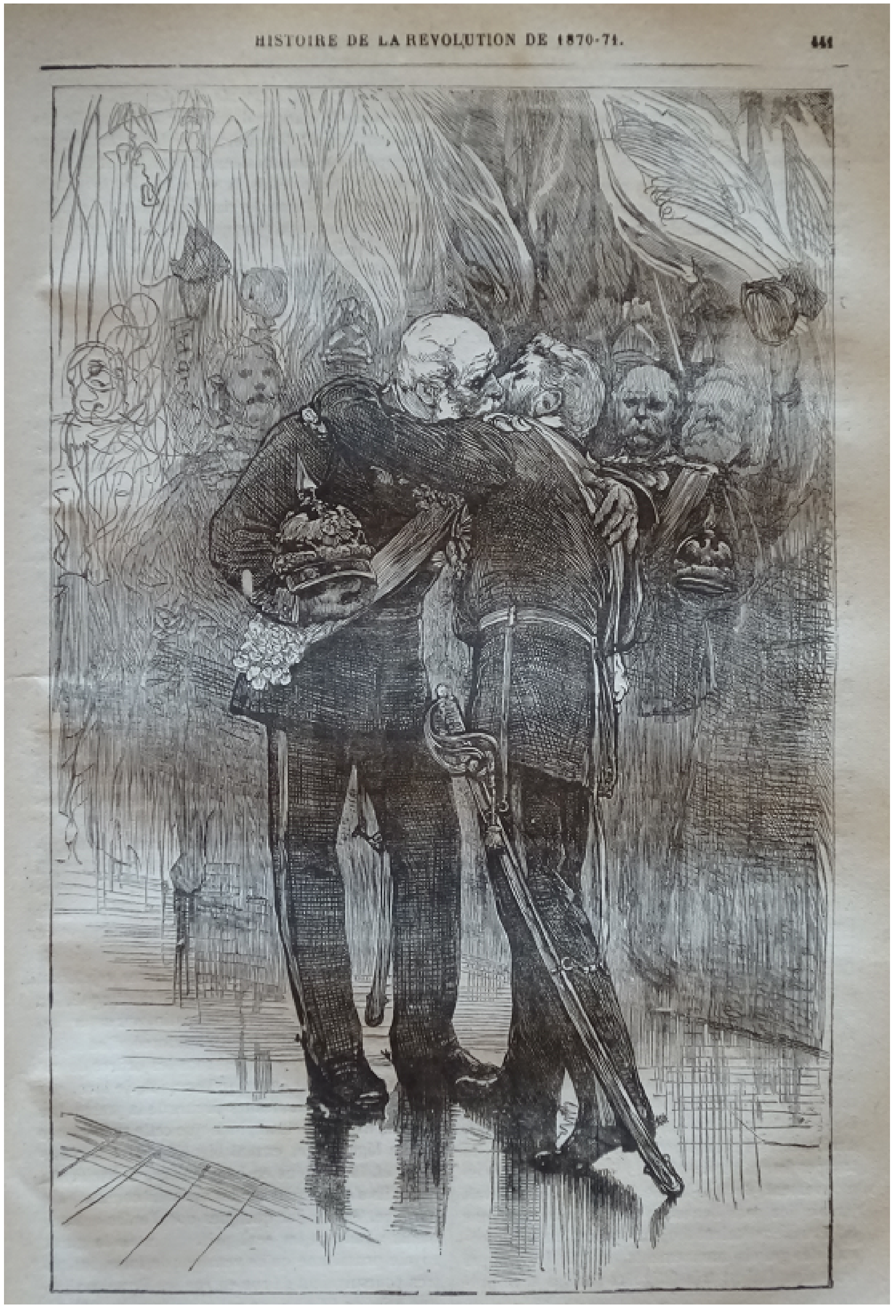
Halle (environ 150 km de Berlin à vol d'oiseau)

À Halle : habilitation de Cantor au printemps 1869

Eduard Heine (1821–1881)

professeur titulaire à Halle

Le siège de Paris – Prise de Bry-sur-Marne, le 30 novembre 1870 (J. Claretie)

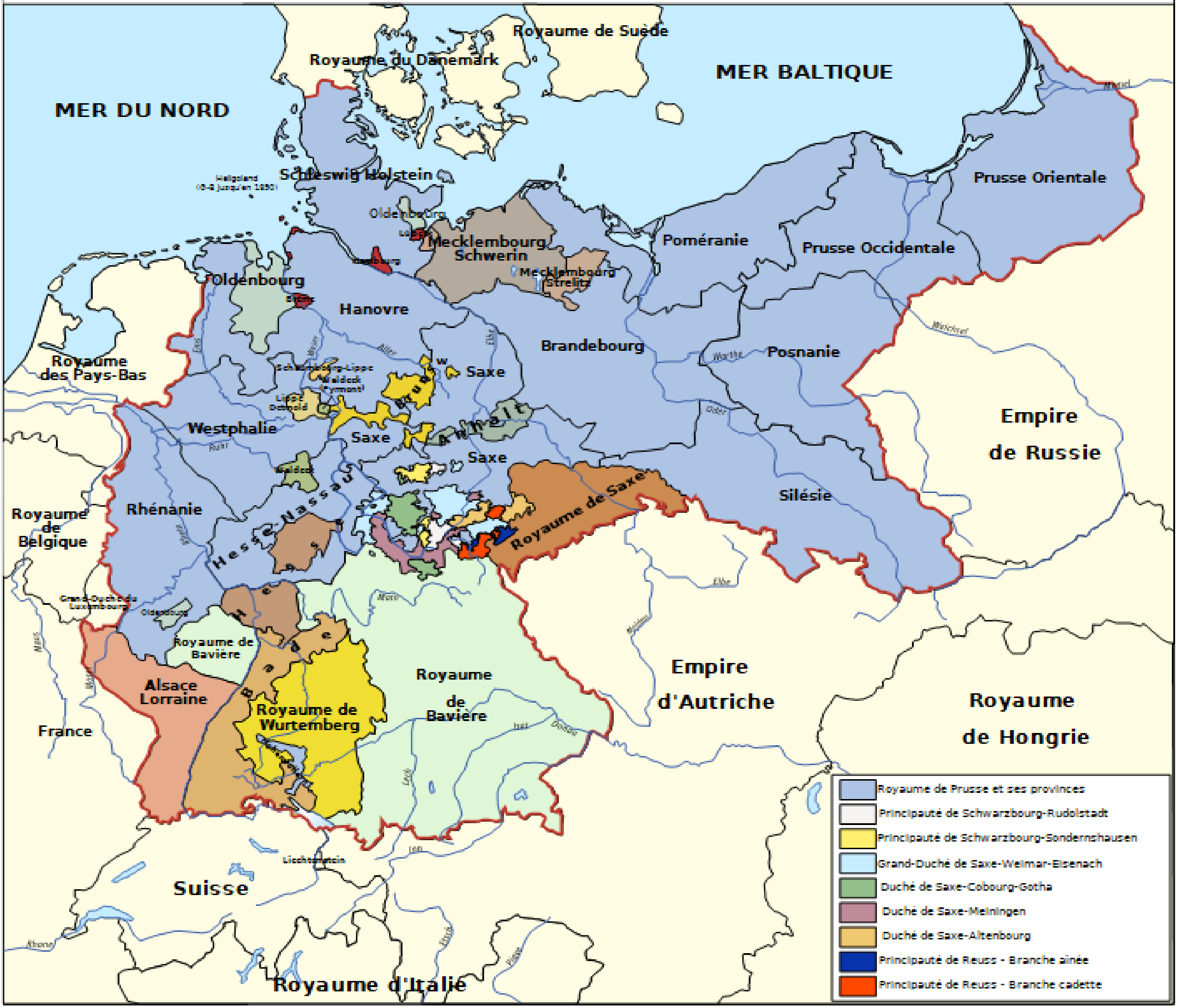


Le roi de Prusse Guillaume I^{er}
devient Empereur d'Allemagne
à Versailles dans la
Galerie des Glaces du château,

le 18 janvier 1871

Königsberg (Kaliningrad)
Memel (de nos jours : Klaipėda en Lituanie)
LE SECOND REICH
1871-1918
Royaume de Prusse
Danemark
Schleswig Holstein
Mecklembourg
Poméranie
Prusse Occidentale
Prusse Orientale
Pays Bas
Hanovre
Brandebourg
Berlin
Posnanie
Empire Russe
Westphalie
Saxe
SAXE
Belgique
Rhénanie
Nassau
Hesse
Thuringe
Royaume de Saxe
Silésie
Darmstadt
Bavière
Alsace
Lorraine
Bade
Wurtemberg
Bavière
Royaume de
FRANCE
Suisse
Empire Austro - Hongrois
1 Oldenbourg
2 Lauenbourg
3 Lubeck
4 Hambourg
5 Brème
6 Schaumbourg
7 Lippe Detmold
8 Waldeck
9 Braunschweig
10 Hesse Kassel
11 Anhalt
12 Strelitz
Zürich
Göttingen
Berlin

L'EMPIRE ALLEMAND
1871 - 1918



Séries trigonométriques

Série trigonométrique,

$$\text{(T)} \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

coefficients a_n, b_n réels.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n\, x}$$

Euler vers 1750 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Daniel Bernoulli (1700–1782)

Leonhard Euler (1707–1783)

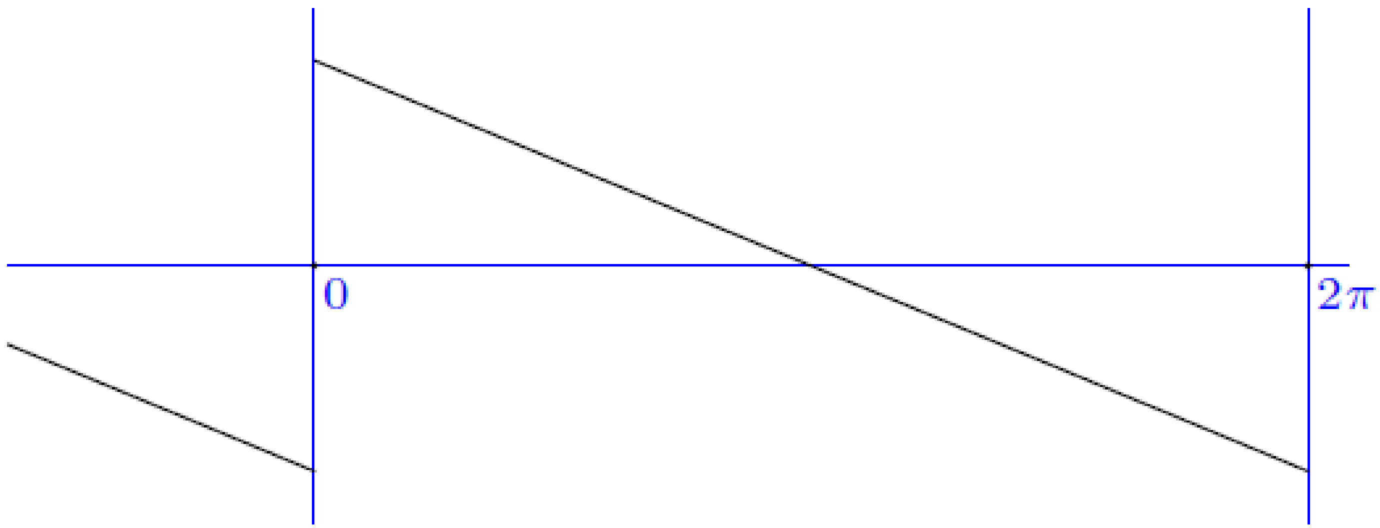
Joseph Fourier (1768–1830)

Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859)

Bernhard Riemann (1826–1866)

$$\sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots + \frac{\sin(nx)}{n} + \cdots \;=\; \frac{\pi - x}{2}$$

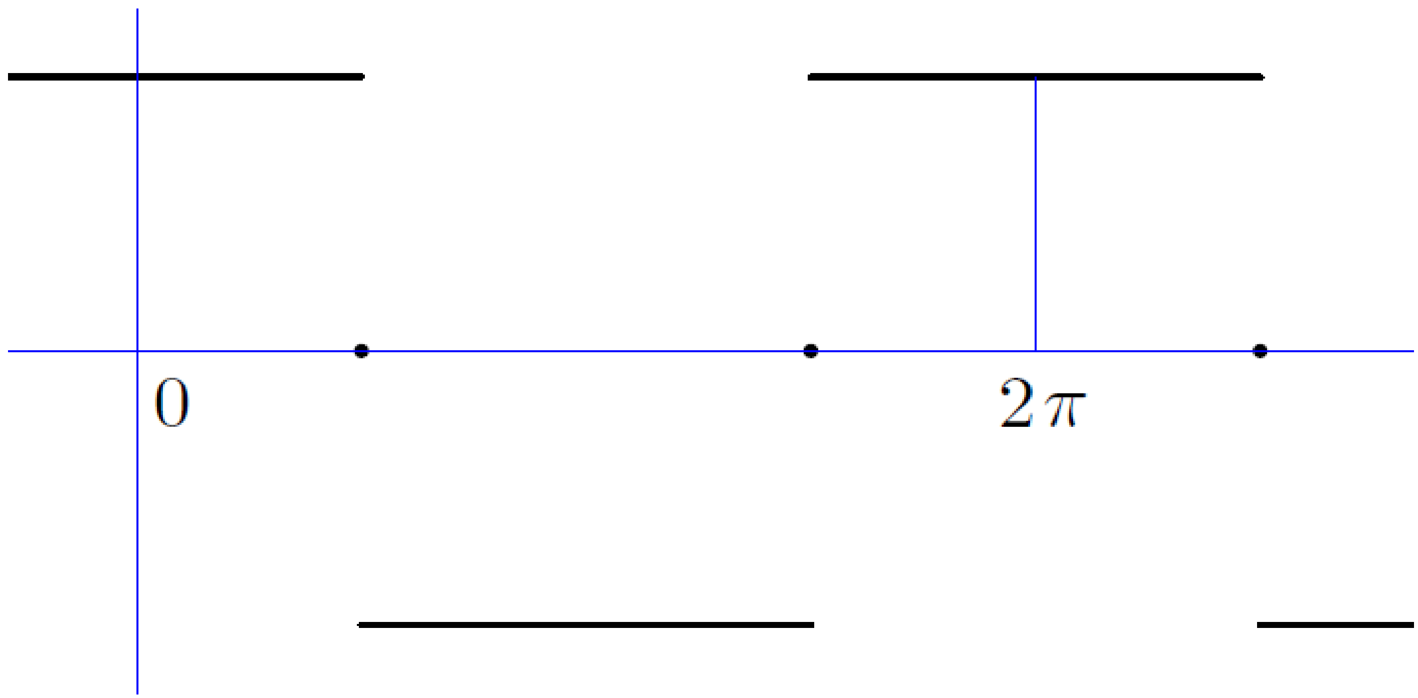
$$(0 \;<\; x \;<\; 2\pi)$$



Euler (exemple repris par Fourier)

Joseph Fourier (1805, 1812, 1822) :

$$\cos(x) - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{\cos(2nx+x)}{2n+1} + \cdots$$



fonction créneau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(5^n x)}{2^n}$$

(Weierstraß, 1872)

Cantor, G.: *Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*. Journal f. reine und angew. Math. *72* (1870), 130–138.

signé : à Berlin, le 20 Mars 1870

Cantor, G.: *Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt*. Journal f. reine und angew. Math. *72* (1870), 139–142.

signé : à Berlin, le 6 Avril 1870

« Preuve du fait qu'une fonction $f(x)$ qui est donnée pour toute valeur de x par une série trigonométrique ne peut se représenter sous cette forme que d'une seule manière »

Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz.

(Von Herrn *G. Cantor* in Halle *).)

Riemanns Forschungen im Gebiete der trigonometrischen Reihen sind in der Abhandlung „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Göttingen 1867" bekannt geworden.

note de bas de page :

---

*) Zu den folgenden Arbeiten bin ich durch Herrn *Heine* angeregt worden. Derselbe hat die Güte gehabt, mich mit seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen frühzeitig bekannt zu machen. Aus dem Versuche seine Resultate in der Richtung zu erweitern, dass jedwede Voraussetzung über die *Art* der Convergenz bei den auftretenden Reihen vermieden wird, sind beide hervorgegangen.

Théorème d'unicité de Cantor

Si la série (T) converge pour tout x réel et

$$\text{si} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = 0$$

pour tout x réel, alors tous les coefficients sont nuls,

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0, \qquad b_1 = \ldots = b_n = \ldots = 0.$$

Lemme de Cantor :

si pour tout x d'un intervalle ouvert non vide (u, v) on a

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

alors les coefficients tendent vers 0,

$$a_n \underset{n}{\longrightarrow} 0, \qquad b_n \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Cas plus simple *à écrire* :

$$b_n \sin(nx) \longrightarrow 0$$

Si

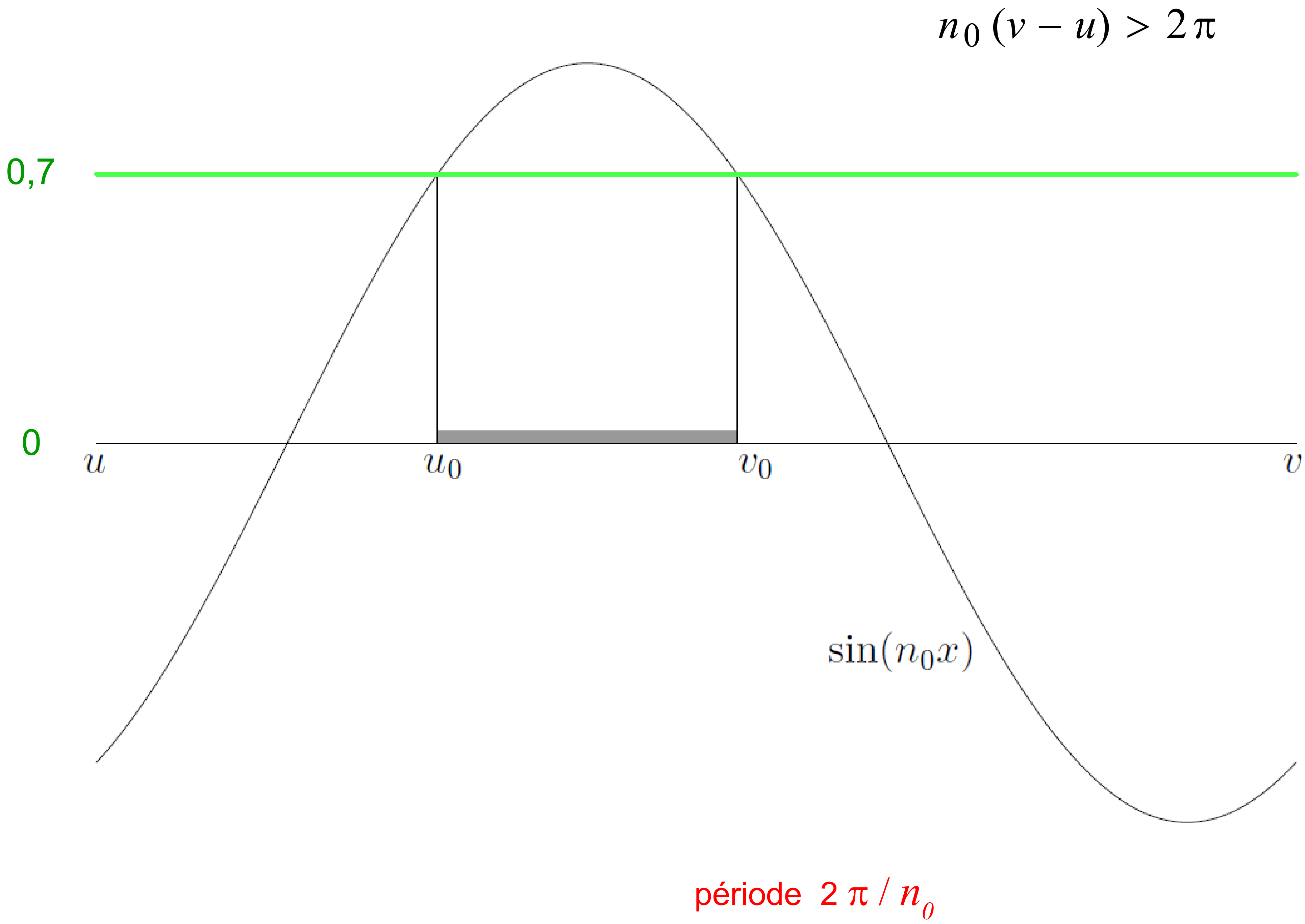
$$|b_{n_k}| \geqslant \delta > 0$$

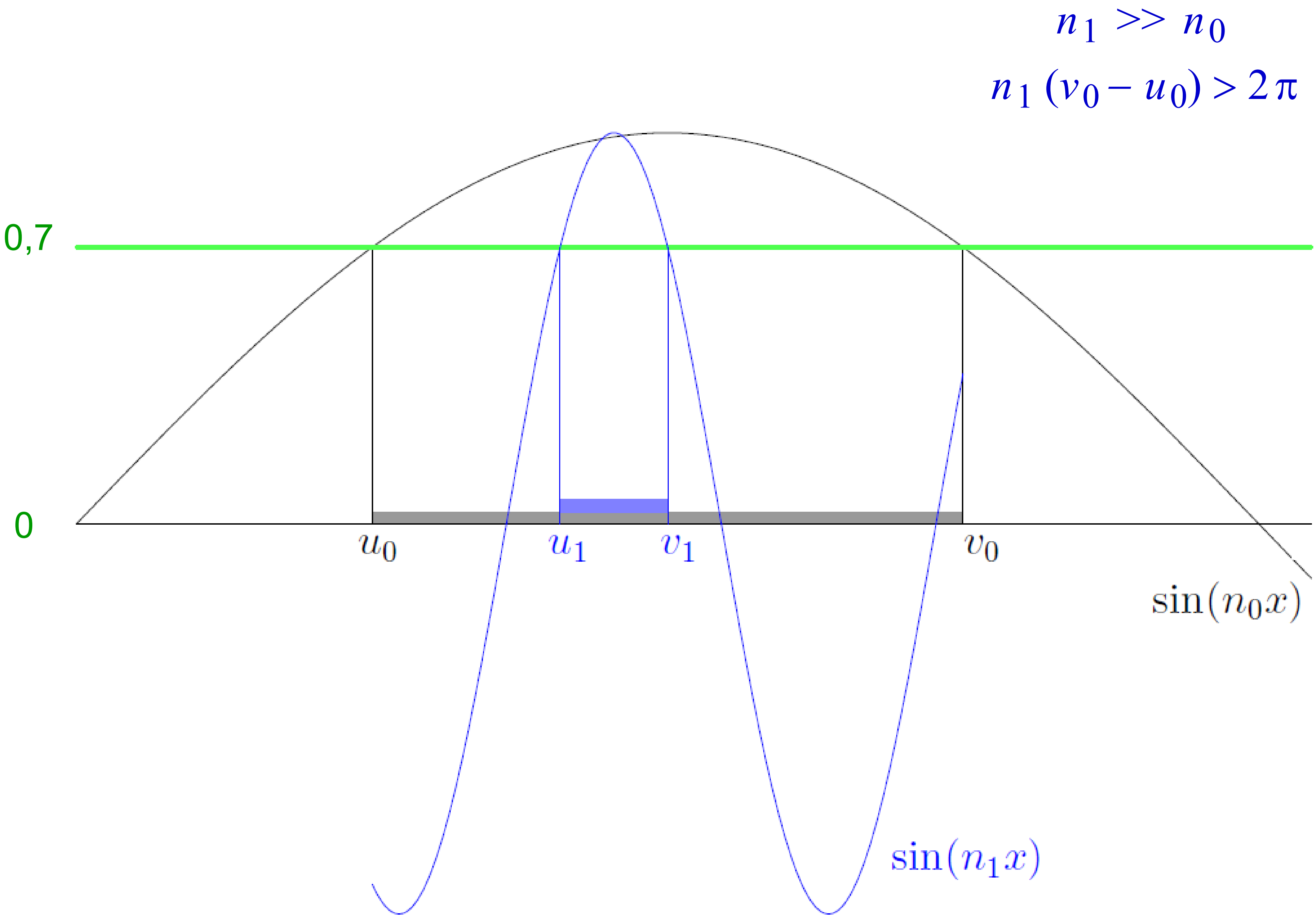
alors

$$\sin(n_k x) \longrightarrow 0$$

mais c'est impossible : $\longrightarrow$

$n_{k+1} \geqslant 100\, n_k$ et n_0 grand

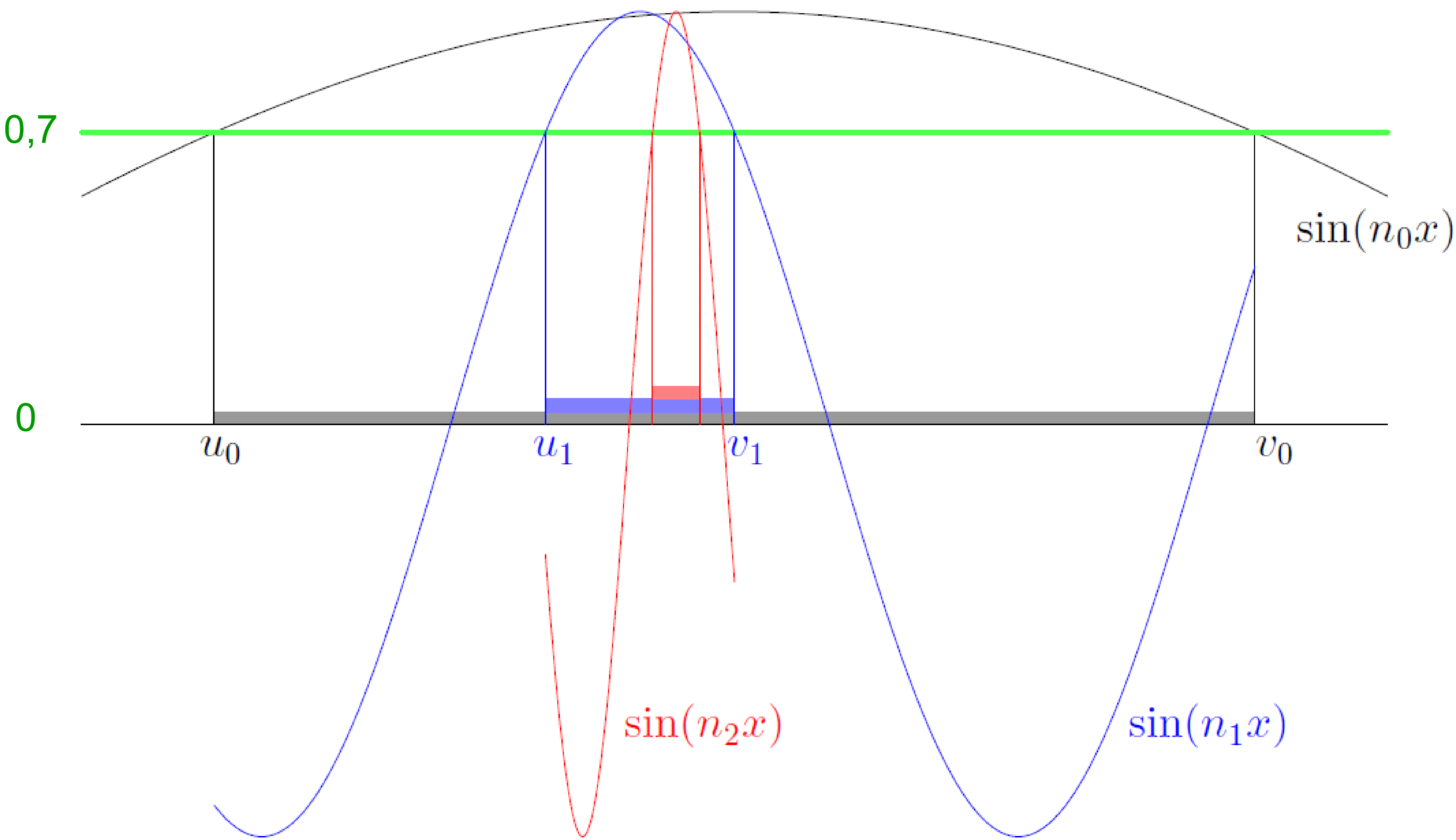

$n_0(v-u) > 2\pi$
0,7
0
u
u_0
v_0
v
$\sin(n_0 x)$
période $2\pi / n_0$



$n_1 >> n_0$
$n_1 (v_0 - u_0) > 2\pi$
0,7
0
u_0
u_1
v_1
v_0
$\sin(n_0 x)$
$\sin(n_1 x)$

$$n_2 >> n_1$$

$$n_2\,(v_1 - u_1) > 2\pi$$



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$$

Bernhard Riemann (1826–1866) en 1854

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{F}(x+h) + \mathrm{F}(x-h) - 2\mathrm{F}(x)}{h^2} = -f(x)$$

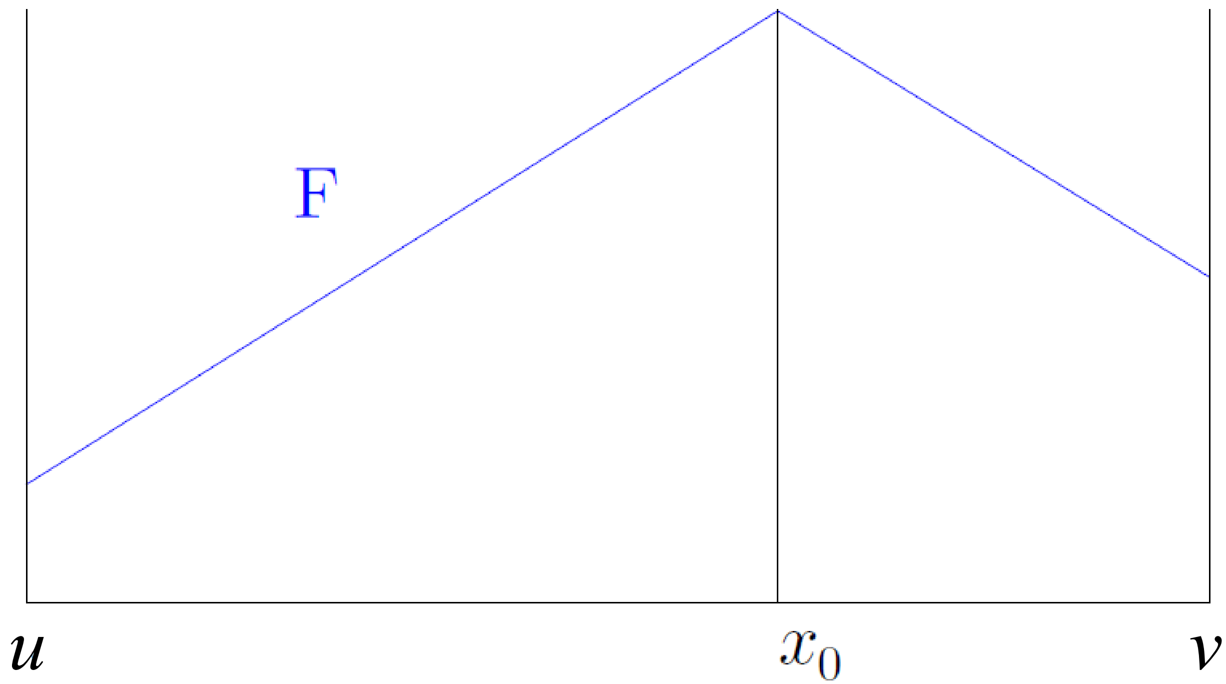
si « $f(x)$ est défini » ET $f(x) = 0$ pour tout $x \in (u, v)$,
alors F est affine sur (u, v).

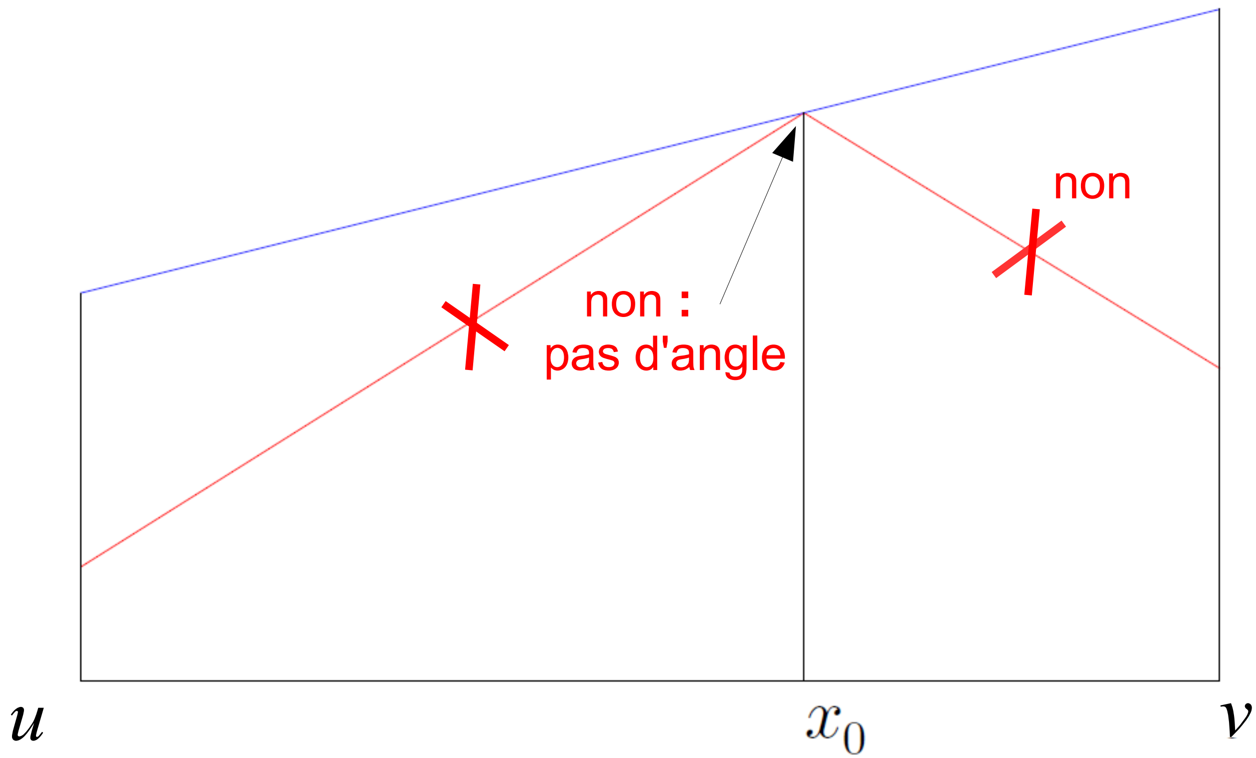
Et si la « nullité » de f a lieu pour tout x ?

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,; \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}.$$

Et si l'hypothèse est vraie sauf pour un point exceptionnel x_0 ?

D'après ce qui précède, la fonction F de Riemann est alors affine sur (u, x_0) ET sur (x_0, v), et de plus elle est continue.

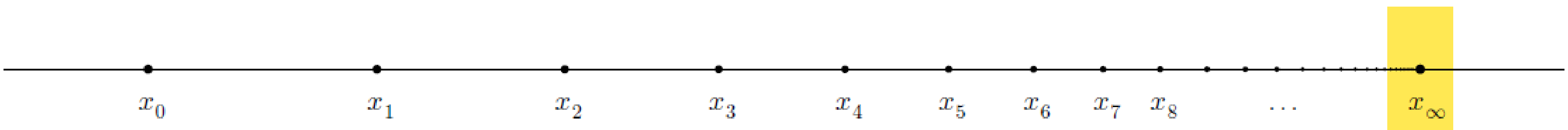




encore Riemann en 1854

Cantor en 1872

Supposons qu'il existe un « ensemble exceptionnel » infini :

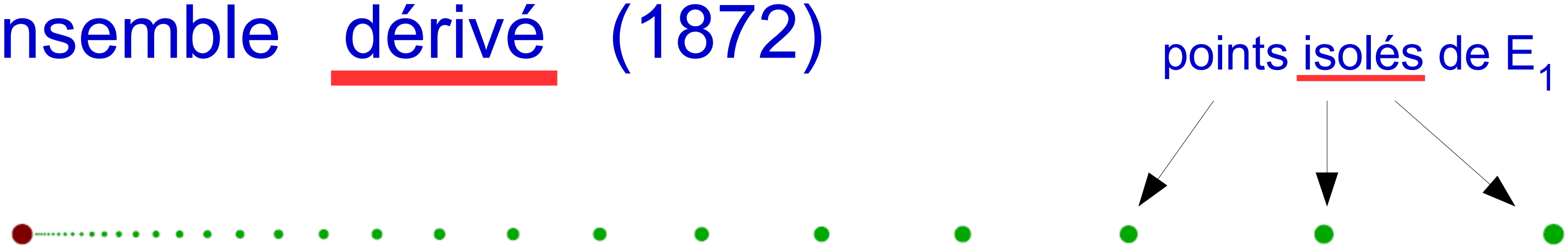


$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$$

point limite (point d'accumulation), voisinage d'un point ;
point isolé

Ensemble dérivé (1872)



si E_1 = la suite ET le point limite, alors

le dérivé $(\mathrm{E}_1)'$ n'a qu'un seul point

un ensemble fini « n'a pas » d'ensemble dérivé (1872)

plus tard (années 1880) :

un ensemble est *fermé* s'il contient son dérivé

un ensemble est *parfait* s'il est égal à son dérivé (non vide)

L'ensemble E_1 contient tous les points

$$\frac{1}{n}, \quad n \text{ entier } \geqslant 1$$

et le point limite 0

$$\frac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Ensemble dérivé :

$$(\mathrm{E}_1)' = \{0\}$$

Nombres réels

Nombres réels (autour de 1870)

Karl Weierstraß (1815–1897) | nombres réels et propriétés des fonctions continues

Charles Méray (1835–1911)

Georg Cantor (1845–1918) | réels définis par des suites de Cauchy

Richard Dedekind (1831–1916) — réels par coupures

Eduard Heine (1821–1881) — fait le point, dans un article assez connu handlung auf die Fundamentalsätze der Functionenlehre zu beziehen, welche mich dennoch zur Veröffentlichung der gegenwärtigen veranlasste, in der ich schliesslich diese Sätze beweise.

Zu besonderem Danke bin ich dem Herrn *Cantor* in Halle für seine mündlichen Mittheilungen verpflichtet, welche einen bedeutenden Einfluss auf die Gestaltung meiner Arbeiten ausübten, indem ich von ihm den Gedanken entlehnte, die allgemeinen Zahlen vermittelst jener besonders geeigneten Reihen einzuführen, die hier (A, §. 1, Def. 1) Zahlenreihen genannt werden. Es scheint mir dies eine, besonders für die Anwendungen auf die Functionenlehre (B, §. 2, Lehrs. 1), glückliche Fortbildung der ursprünglichen Einführungsart, bei welcher die allgemeineren Zahlen durch die in ihnen enthaltenen Vielfachen gewisser Grössen in unendlicher Anzahl bestimmt werden. Die Berechtigung, das durch die Reihen Eingeführte als Zahlengrösse zu betrachten, findet Herr *Cantor* darin, dass es möglich sei, auch hier die Begriffe des Grösser-, Kleiner- und Gleichseins festzustellen.

Die Frage, was eine Zahl sei, beantworte ich, wenn ich nicht bei den rationalen positiven stehen bleiben will, nicht dadurch dass ich die Zahl be-

Eduard Heine, « Die Elemente der Functionenlehre » (1872)

(c'est l'article qui contient le « théorème de Heine » sur la continuité uniforme)

«

Les nombres rationnels constituent le fondement pour établir le concept plus large de « Zahlengrösse » [*grandeur numérique*] ; je désignerai par A le domaine des rationnels (en y incluant 0).

Je parle de *Zahlengrösse* au sens élargi quand est donnée par une certaine loi une suite (a_n) de rationnels qui a la propriété que la différence $a_{n+m} - a_n$ devient infiniment petite quand n croît, m étant un entier positif quelconque. Autrement dit, étant donné ε arbitraire (rationnel, strictement positif) il existe n_1 tel que $a_{n+m} - a_n < \varepsilon$ quand $n \geq n_1$ et quand m est un entier positif quelconque.

»

Cantor 1872 (en allemand ; traduction française Acta Math. 1883)

Axiome de Cantor–Dedekind

Version de Cantor **:** les points de la droite de la géométrie classique correspondent bijectivement aux « Zahlengrösse ».

Rappel :

$$\frac{1}{n}, \quad n \text{ entier } \geqslant 1$$

$$\frac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

Ensemble dérivé :

$$(\mathrm{E}_1)' = \{0\}$$

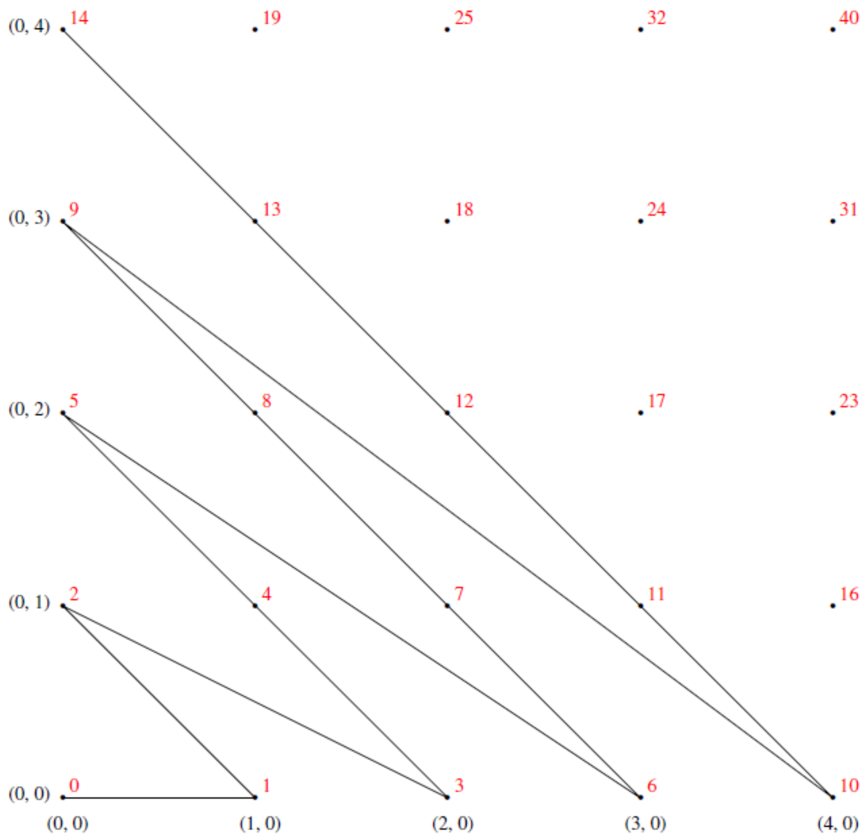
Illustrations

(dérivé et dérivés successifs)

Dénombrable,
ou pas...

Cantor vers 1874

Un parcours habituel de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:



Q est dénombrable

L'ensemble de toutes les suites finies d'entiers (où la longueur k varie) est dénombrable :

$$(n_0, n_1, \ldots, n_k)$$

$$n_j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}$$

dénombrable = en bijection avec l'ensemble **N** des entiers

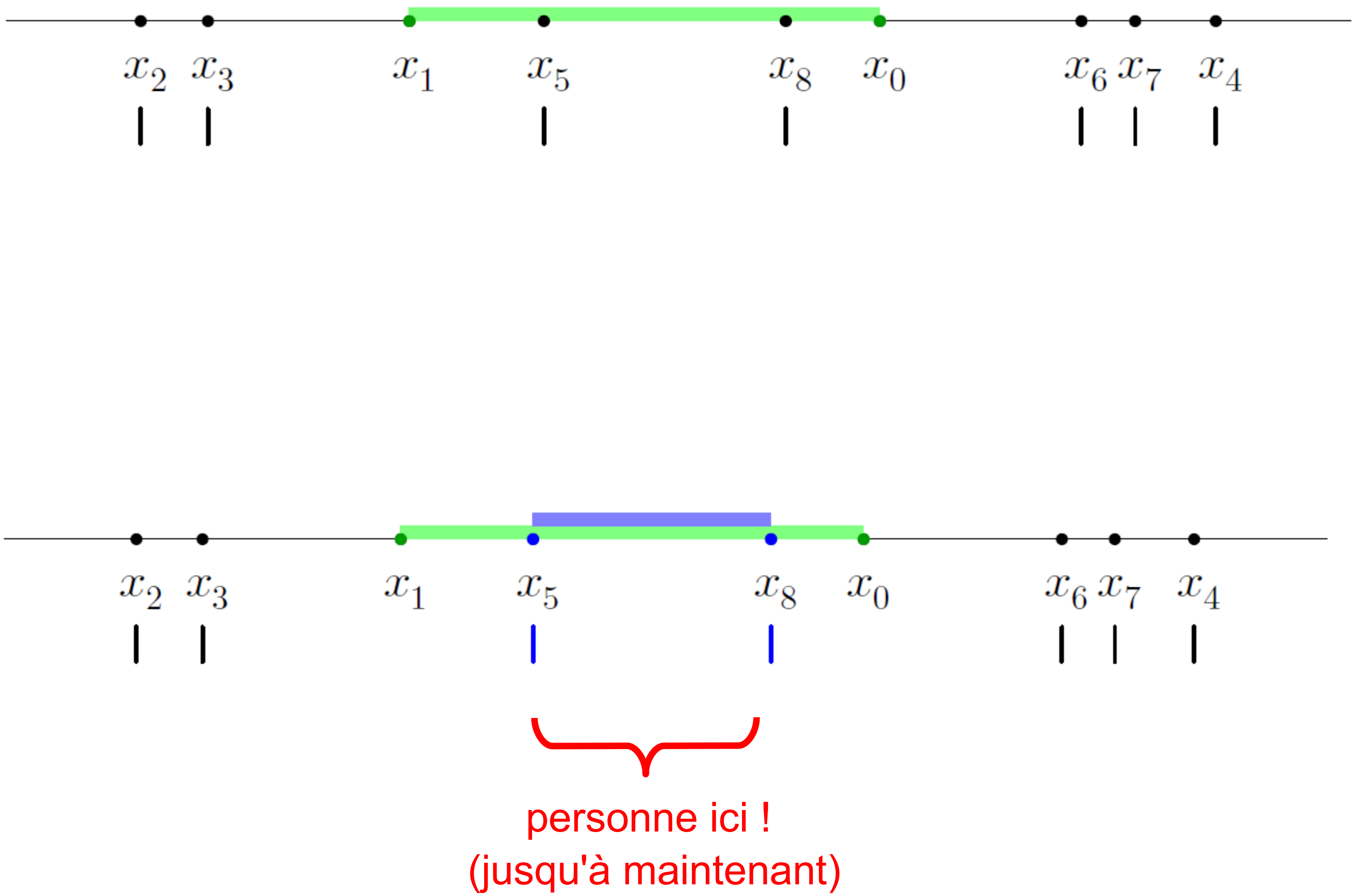
Non dénombrabilité de la droite réelle (1874)

on considère une suite de nombres réels :

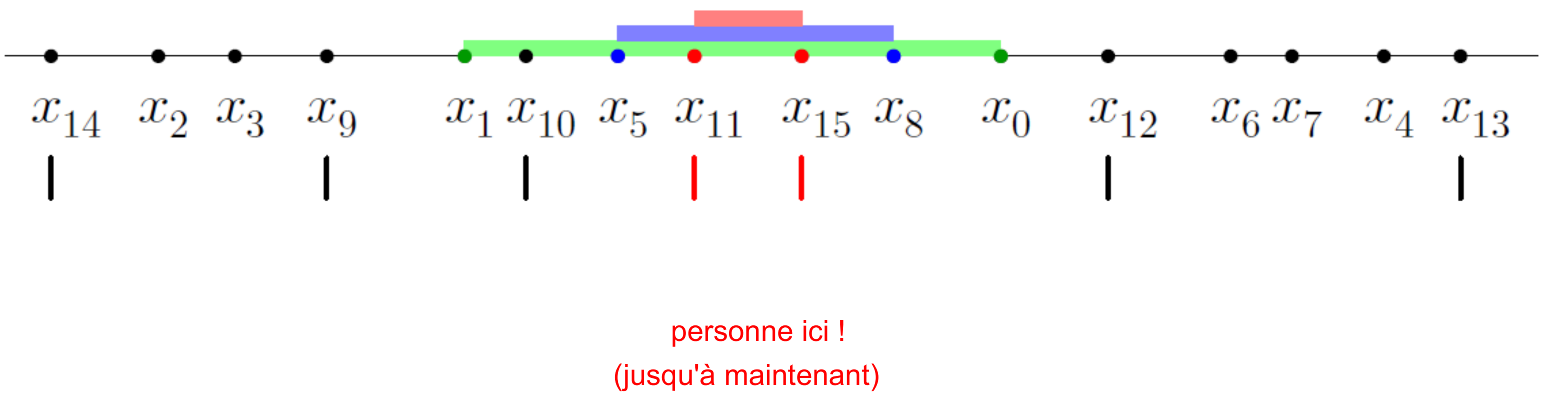
$$(x_n)_{n \geqslant 0}$$

On va laisser venir les points successifs de la suite donnée, en commençant avec x_0, x_1 :

$x_1 \neq x_0$, etc . . .



x2 x3 x1 x5 x8 x0 x6 x7 x4
x2 x3 x1 x5 x8 x0 x6 x7 x4
personne ici !
(jusqu'à maintenant)



suite de segments emboîtés

Les nombres algébriques

Le nombre θ est *algébrique* quand

$$a_n\theta^n + \cdots + a_1\theta + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n$ entiers relatifs $(a_i \in \mathbb{Z})$

$\sqrt{2}$: $\theta^2 - 2 = 0$, les racines cubiques d'entiers, . . .

les « quantités » constructibles à la règle et au compas sont algébriques

sinon le nombre θ est *transcendant*

Johann Heinrich Lambert (1728 –1777)

Charles Hermite (1822–1901)

Joseph Liouville (1809 –1882)

Ferdinand von Lindemann (1852 –1939)

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

un ensemble *parfait* dans $\mathbf{R}^n$ a la puissance du continu

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

Le continu sous plusieurs formes

$$[0,1) \times [0,1) \underset{\text{bij}}{\equiv} [0,1)$$

$$\mathbb{R}^2 \underset{\text{bij}}{\equiv} \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^d \underset{\text{bij}}{\equiv} \mathbb{R}^n$$

(mais pas topologiquement : Brouwer 1911 ;
Cantor a tenté une preuve)

Luitzen Egbertus Brouwer (1881 – 1966)

Cantor n'en revient pas :

«Entschuldigen Sie es gütigst meinem Eifer für die Sache, wenn ich Ihre Güte und Mühe so oft in Anspruch nehme; die Ihnen jüngst von mir zugegangenen Mittheilungen sind für mich selbst so unerwartet, so neu, dass ich gewissermassen nicht eher zu einer gewissen Gemüthsruhe kommen kann, als bis ich von Ihnen, sehr verehrter Freund, eine Entscheidung über die Richtigkeit derselben erhalten haben werde. Ich kann, so lange Sie mir nicht zugestimmt haben, nur sagen: je le vois, mais je ne le crois pas.»

Cantor à Dedekind, lettre du 29 juin 1877
(dans le livre de Walter Purkert et Hans Joachim Ilgauds, p. 50)

Ayez la bonté d'excuser mon ardeur impatiente à propos de cette question, alors que je fais déjà si souvent appel à votre gentillesse et à vos efforts ; les résultats que je vous ai communiqués récemment sont pour moi-même si inattendus, si nouveaux, que je ne pourrai retrouver une certaine sérénité que quand j'aurai obtenu de vous, très cher ami, une confirmation de leur exactitude. Tant que vous ne vous êtes pas déclaré d'accord avec moi, je ne peux que dire : « je le vois, mais je ne le crois pas » [*en français dans le texte !*].

Ordinaux

réunion et intersection d'une suite d'ensembles (1880)

~~Q, $\bar{Q}$ ein Multiplum von P.~~ Sind $P_1, P_2, P_3, \cdots$ irgend welche Punktmengen in endlicher oder unendlicher Anzahl, so gehört zu ihnen sowohl ein kleinstes gemeinsames Multiplum, welches wir mit:

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \cdots)$$ (réunion)

bezeichnen und welches die Menge ist, die aus allen verschiedenen Punkten von $P_1, P_2, P_2, \cdots$ besteht und sonst keine anderen Punkte als Elemente besitzt, — wie auch ein grösster gemeinsamer Divisor, den wir $\equiv$

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \cdots)$$ (intersection)

setzen und welcher die Menge der Punkte ist, die allen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ gemeinsam sind. Beispielsweise können wir, wenn $P', P'', P''', \ldots$

die andere R umfasst diejenigen Punkte, welche in *allen* Gliedern der Folge $P', P'', P''', \cdots$ erhalten bleiben, es ist also R definirt durch die Formel:

$$R = \mathfrak{D}(P', P'', P''', \cdots).$$

Diese aus der Menge P hervorgehende Punktmenge R werde nun durch das Zeichen:

$$P^{(\infty)}$$

ausgedrückt und Ableitung von P der Ordnung ∞ genannt.

Die erste Ableitung von $P^{(\infty)}$ werde mit $P^{(\infty+1)}$, die n^{te} Ableitung von $P^{(\infty)}$ mit $P^{(\infty+n)}$ bezeichnet; $P^{(\infty)}$ wird aber auch eine, im Allgemeinen von O verschiedene Ableitung von der Ordnung ∞ haben, wir nennen sie $P^{(2\infty)}$. Durch Fortsetzung dieser Begriffsconstructionen kommt man zu Ableitungen, die consequenterweise durch:

$$P^{(n_0\infty + n_1)}$$

zu bezeichnen sind, wo n_0, n_1 positive ganze Zahlen sind. Wir kommen aber auch darüber hinaus, indem wir:

$$\mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \cdots)$$

bilden und dafür das Zeichen $P^{(\infty^2)}$ festsetzen.

$$\mathrm{P}^{(\infty)} = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{P}^{(n)}, \qquad \mathrm{P}^{(\infty+1)} = \left(\mathrm{P}^{(\infty)}\right)'$$

$$\infty, \quad \infty + 1, \quad \infty + 2, \quad \ldots, \quad \infty + n, \quad \ldots, \quad 2.\infty$$

$$\infty, \quad 2.\infty, \quad 3.\infty, \quad \ldots, \quad n.\infty, \quad \ldots, \quad \infty^2$$

$$\infty, \quad \infty^2, \quad \infty^3, \quad \ldots, \quad \infty^n, \quad \ldots, \quad \infty^\infty$$

$$\infty, \quad \infty^\infty, \quad \infty^{\infty^\infty}, \quad \ldots$$

Es ist ferner zweckmässig ein Zeichen zu haben, welches die Abwesenheit von Punkten ausdrückt, wir wählen dazu den Buchstaben O; $P \equiv O$ bedeutet also, dass die Menge P *keinen einzigen* Punkt enthält, also streng genommen als solche gar nicht vorhanden ist. Um auch

(vide)

---

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zu:

$$P^{(n_0\infty^\nu + n_1\infty^{\nu-1} + \cdots + n_\nu)},$$

wo $n_0, n_1, \cdots, n_\nu$ positive ganze Zahlen sind. Zu weiteren Begriffen gelangt man, indem man ν variabel werden lässt; man setze:

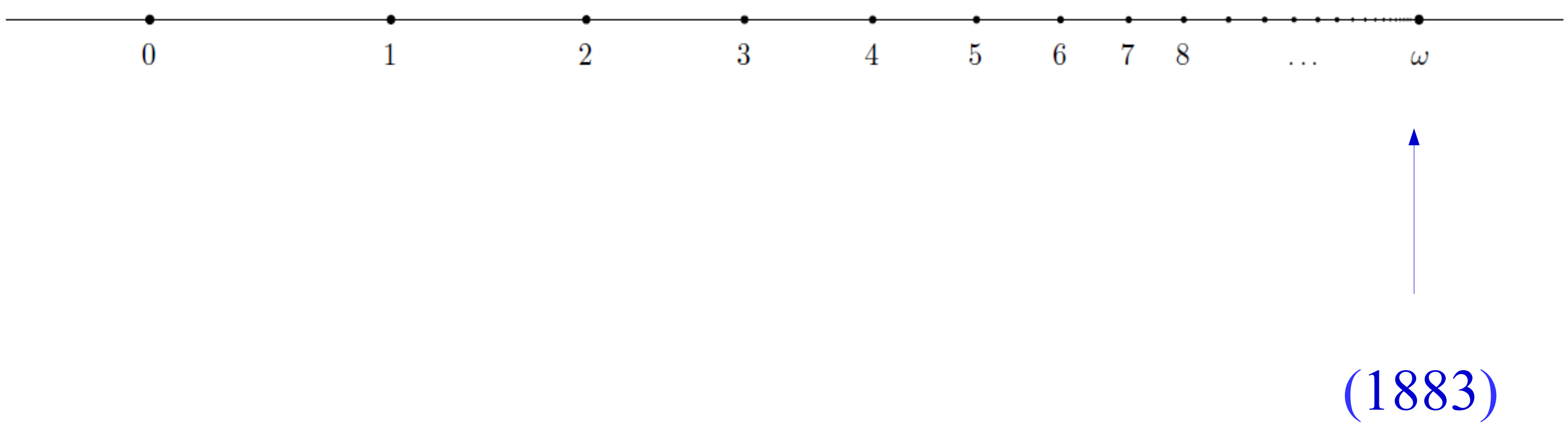
$$P^{(\infty^\infty)} \equiv \mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(\infty^2)}, P^{(\infty^3)}, \cdots).$$

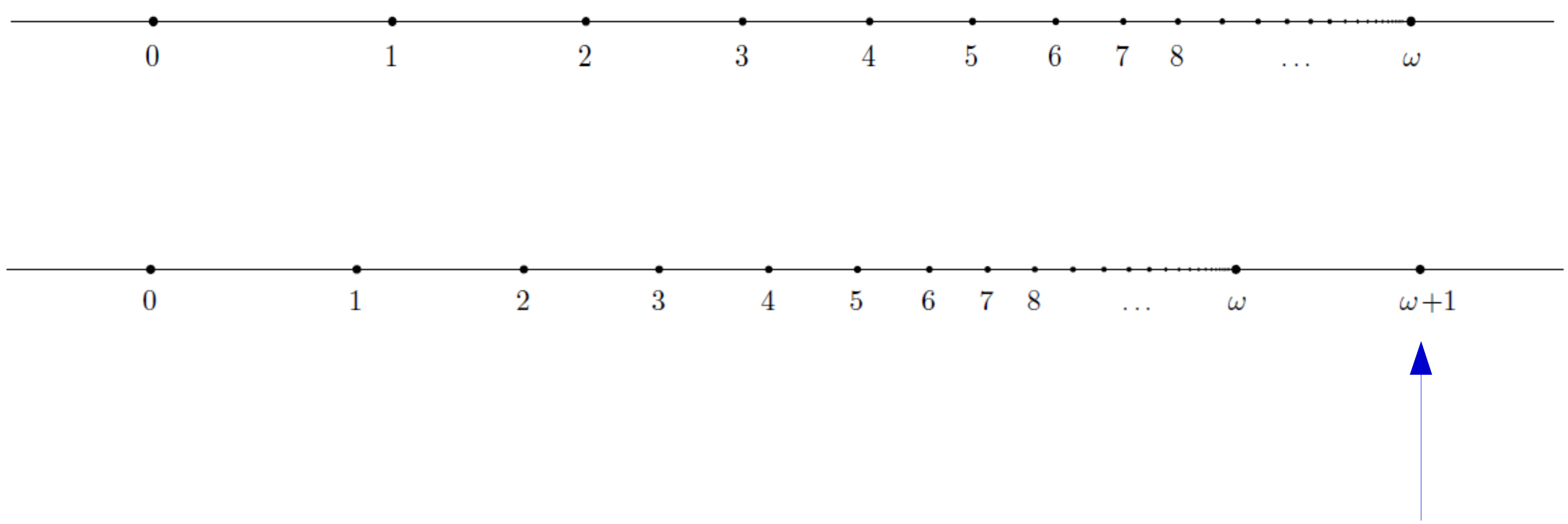
Durch consequentes Fortschreiten gewinnt man successive die weiteren Begriffe:

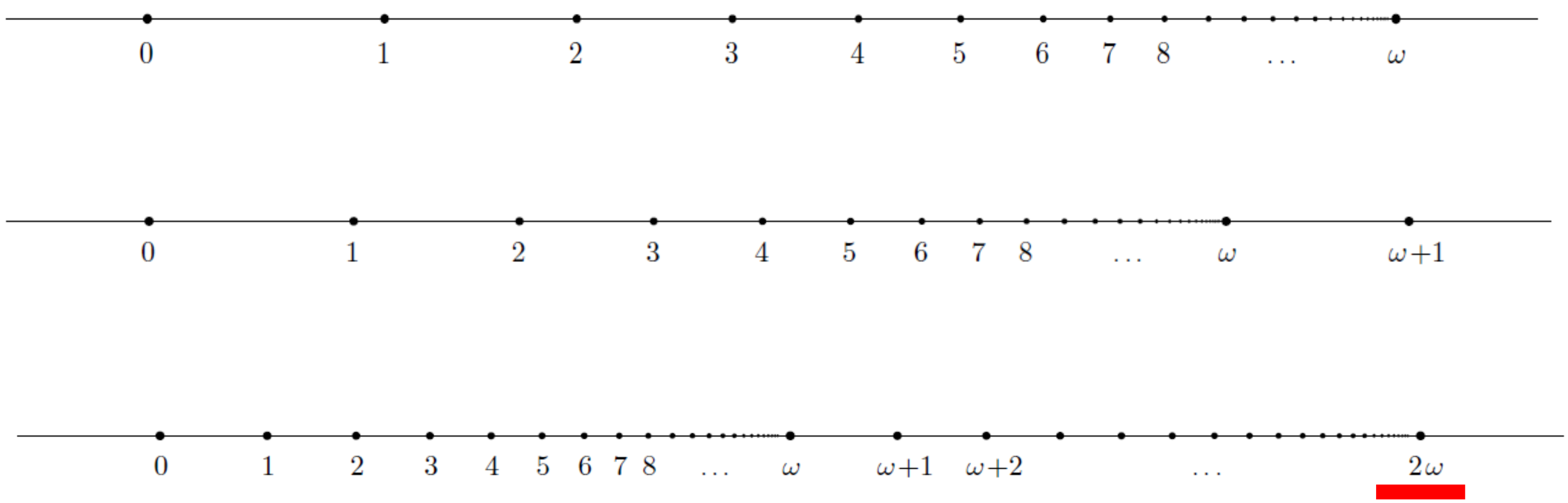
$P^{(n\infty^\infty)}$, $P^{(\infty^\infty+1)}$, $P^{(\infty^\infty+n)}$, $P^{(\infty^{n\infty})}$, $P^{(\infty^{\infty^n})}$, $P^{(\infty^{\infty^\infty})}$ u. s. w.;

wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung*), welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich nothwendig und consequent bleibt.

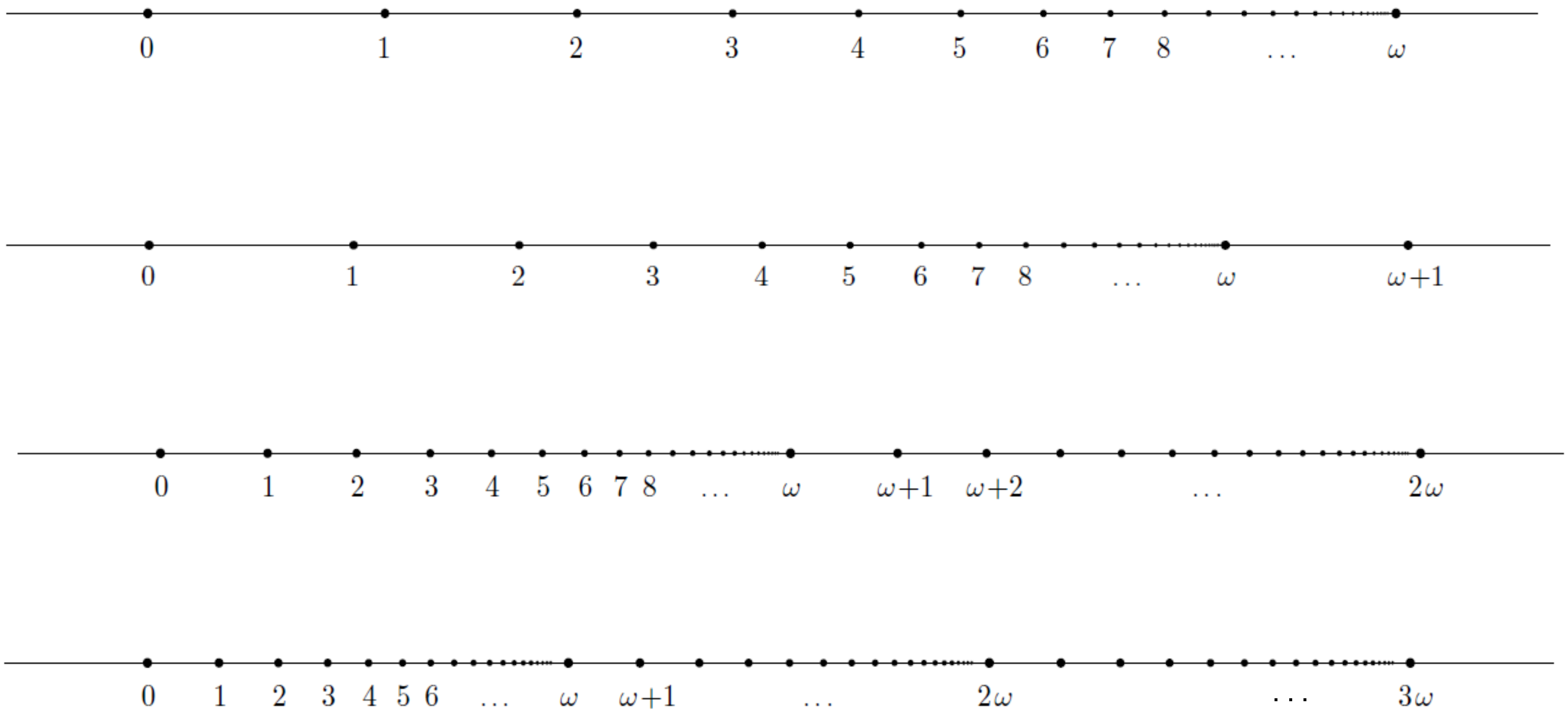
ne regardons plus que la *structure d'ordre*
d'une famille de points tendant vers une limite :



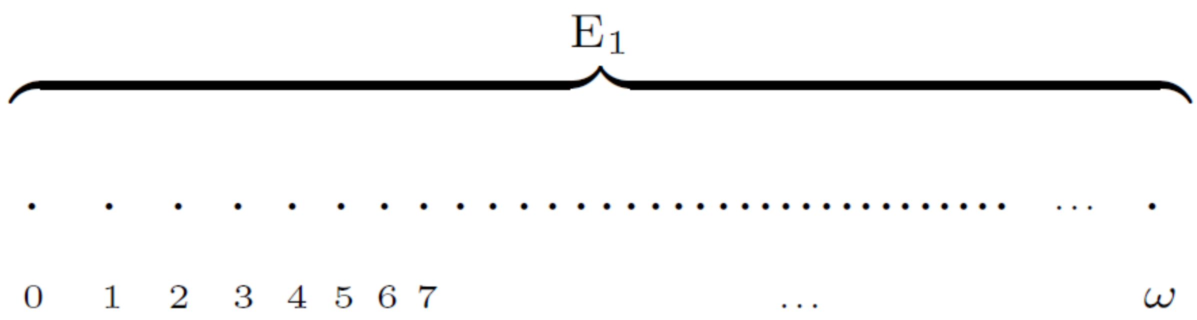

0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... ω
0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... ω ω+1



2ω ou $\omega.2$ (en 1895)



0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... ω
0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... ω ω+1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... ω ω+1 ω+2 ... 2ω
0 1 2 3 4 5 6 ... ω ω+1 ... 2ω ... 3ω



« E_1 » représente toute la suite (y compris la limite).

$$\overbrace{\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdots\cdots\cdots \quad \ldots \quad \cdot}^{E_1}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \qquad \ldots \qquad \omega$$

$$E_2: \quad E_1 \quad E_1 \quad E_1 \quad E_1 \quad E_1 \quad E_1 \quad E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \; E_1 \quad \ldots \quad \cdot$$

$$\omega \quad 2\omega \quad 3\omega \quad 4\omega \quad 5\omega \quad 6\omega \quad 7\omega \qquad \ldots \qquad \omega^2$$

$$\overbrace{\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \ldots \quad \cdot}^{E_1}$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \qquad \ldots \qquad \omega$$

$$E_1 \; E_1 \quad \ldots \quad \cdot$$

$$\omega \quad 2\omega \quad 3\omega \quad 4\omega \quad 5\omega \quad 6\omega \quad 7\omega \qquad \ldots \qquad \omega^2$$

$$\overbrace{\begin{matrix} E_1 \; E_1 \quad \ldots \quad \cdot \\ \omega \quad 2\omega \quad 3\omega \quad 4\omega \quad 5\omega \quad 6\omega \quad 7\omega \qquad \ldots \qquad \omega^2 \end{matrix}}^{E_2}$$

$$(E_2)' \sim E_1$$

E_3 :

$$E_2 \; E_2 \quad \ldots \quad \cdot$$

$$\omega^2 \quad 2\omega^2 \quad 3\omega^2 \quad 4\omega^2 \quad 5\omega^2 \quad 6\omega^2 \quad 7\omega^2 \qquad \ldots \qquad \omega^3$$

$$(E_3)' \sim E_2 \,; \qquad E_4, \; E_5, \; E_6, \; \ldots$$

$$(E_{n+1})' \simeq E_n,$$

$$(E_3)' \simeq E_2, \quad (E_2)' \simeq E_1$$

$$(E_1)' \simeq E_0 := \{\omega\}, \quad (E_0)' = \emptyset$$

$$F^{(0)} = F$$

$$F^{(n+1)} = \left(F^{(n)}\right)'$$

$$F^{(\omega)} = \bigcap_{n \geqslant 0} F^{(n)}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & \ldots & E_n & \ldots & . \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 & \ldots & \omega^n & \ldots & \omega^\omega \end{array}}_{E}$$

L'ensemble dérivé d'ordre ω de l'ensemble E ci-dessus est réduit à un point unique et par conséquent

$$E^{(\omega+1)} = \left(E^{(\omega)}\right)' = \emptyset$$

Ist P eine nicht abzählbare Punktmenge, so ist auch $P^{(\alpha)}$ nicht abzählbar, sowohl wenn α eine endliche ganze Zahl, wie auch wenn es eines der Unendlichkeitssymbole ist.

Cantor,
Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten n° 4,
paru en 1883, signé sept. 1882

En 1882, le mathématicien suédois Mittag-Leffler crée le journal *Acta Mathematica*, qui deviendra rapidement et restera jusqu'à nos jours un des plus grands journaux mathématiques. Il y invite à publier des mathématiciens européens importants (Henri Poincaré, entre autres). Mittag-Leffler est passé par Berlin en 1875 pour étudier (avec Weierstrass), il parle allemand ; Cantor et lui nouent une relation amicale et échangent un courrier abondant, notamment dans les années 1882–1884.

Mittag-Leffler publie dans Acta des traductions en français de plusieurs articles de Cantor (dans le volume 2, six articles et un extrait d'une lettre, transformé en article par « l'éditeur ») : Cantor espère faire ainsi progresser ses idées auprès des mathématiciens français ; par ailleurs, Cantor a visité Paris en 1884, il y a rencontré (brièvement) Hermite, Picard, Poincaré, Appell.

Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) Henri Poincaré (1854–1912)

Paul Appell (1855–1930) Émile Picard (1856–1941)

Dans l'exposition de mes recherches sur la théorie des ensembles, je suis maintenant arrivé à un point où il me faut développer une généralisation de la notion de nombre entier réel, et ce développement m'entraîne dans une direction où personne, à ma connaissance, ne s'est engagé jusqu'à présent.

Je me trouve contraint de développer cette notion de nombre au point que je pourrais à peine, sans cela, avancer dans la théorie des ensembles; que cette nécessité où je me trouve placé me serve de justification ou d'excuse, si cela était nécessaire, pour avoir introduit dans mon travail un ordre d'idées qui y paraît étranger. Car il s'agit de développer cette notion dans le but de continuer la série des nombres entiers réels au-delà de l'infini; si hardie que paraisse cette tentative, je puis exprimer non-seulement l'espoir, mais la ferme conviction qu'avec le temps on considérera ce développement comme très-simple, très-naturelle et parfaitement accessible. En même temps je ne me dissimule pas cependant que par cette entreprise, je me mets en contradiction, dans une certaine mesure, avec les idées généralement répondues sur l'infini mathématique et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique.

Cantor, Acta Math. 1883

(version française de Math. Ann. 21, 1883)

Les *deux principes de formation*, à l'aide desquels on définit les nouveaux nombres infinis déterminés, comme on pourra s'en convaincre, sont tels qu'en les appliquant ensemble, on peut dépasser toutes les limites dans la formation abstraite des nombres entiers réels; mais heureusement on a d'autre part, comme nous le verrons, un *troisième* principe que j'appelle *principe d'arrêt* ou de *limitation*, et grâce auquel on peut donner certaines limites successives au procédé de formation qui est absolument sans fin; nous obtiendrons ainsi, dans la suite *absolument infinie* des nombres réels entiers, des *divisions naturelles*, que j'appellerai *classes de nombres*.

La *première classe de nombres* (I) est le système des nombres entiers finis 1, 2, 3, ... ν, ...; vient ensuite la seconde classe de nombres (II), composée de certains nombres entiers infinis α se suivant entre eux dans un ordre de succession déterminé:

$$\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ \ldots,\ \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu,$$

$$\ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots;$$

la seconde classe de nombres une fois définie, on arrive à la troisième, puis à la quatrième, et ainsi de suite.

que ω sera le *premier* nombre entier qui *suivra tous* les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à *tous* les nombres ν. En associant le nombre ω avec les unités primitives on obtient à l'aide du *premier principe* de formation les nombres plus étendus:

$$\omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots\ldots\ \omega + \nu,\ \ldots\ldots;$$

comme par là on n'arrive encore une fois à aucun nombre maximum, on imagine un nouveau, que l'on peut appeler 2ω et qui sera le *premier* après tous les nombres obtenus jusqu'à présent ν et $\omega + \nu$; si on applique

- -

Le deuxième principe de formation nous permet donc d'introduire un nombre qui suit immédiatement tous les autres $\mu\omega + \nu$, et que l'on peut appeler ω^2; à ce nombre se rattacheront dans un ordre de succession déterminé:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu$$

et l'on arrive alors évidemment, en suivant les deux principes de formation, à des nombres de la forme:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu;$$

mais alors le deuxième principe de formation nous amène à poser un nouveau nombre qui sera immédiatement supérieur à tous ces nombres et qu'on pourra désigner par ω^ω.

La « deuxième classe de nombres » est formée de tous les ordinaux infinis dénombrables.

La deuxième classe de nombres n'est pas dénombrable.

Un ensemble ordonné X est *bien ordonné* quand tout sous-ensemble <u>non vide</u> de X possède un plus petit élément

$$\mathbb{N}, \qquad \omega,$$

$$\omega^2, \ \omega^3, \ \ldots, \ \omega^\omega, \ \ldots$$

À chaque ensemble bien ordonné correspond un ordinal

Noms donnés aux ordinaux par Cantor :

Unendlichkeitssymbol (1880-1882)
Unendliche (reale) ganze Zahl ; Anzahl (1883)
Ordinalzahl (1895)

Ω désigne le premier ordinal non dénombrable.

Opérations sur les ordinaux :

$$\alpha + \beta \qquad \alpha\,\beta$$

En 1883 $\alpha\,\beta$ représente une « α-suite » de *copies* de β

« Exhaustion du dénombrable »

Notation des ordinaux « modestes »

$$c_0\,\omega^m + c_1\,\omega^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\,\omega + c_m$$

En 1883 :

$$\omega^{\omega+1} = \lim_n n\omega^\omega = \omega\,\omega^\omega$$
$$\omega^{1+\omega} = \lim_n \omega^\omega n = \omega^\omega\,\omega = \omega^\omega$$

« Grands » ordinaux

 Math. Annalen 21, p. 563-564

En 1883, dans des considérations philosophiques d'une bonne dizaine de pages sur la nature des mathématiques et de l'infini mathématique, Cantor se réfère à Platon, Aristote, Démocrite, Thomas d'Aquin, Descartes, Locke, Spinoza, Leibniz, Kant, entre autres . . . avant de développer plusieurs points de sa théorie des ordinaux ; c'est à la fin de la « section philosophique » qu'on peut lire :

Es ist, wie ich glaube, nicht nöthig in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von Vielen geschieht; einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen die Freiheit der Zahlenbildung allein geübt werden kann, derartige, dass sie der Willkür einen äusserst geringen Spielraum lassen; dann aber trägt auch jeder mathematische Begriff das nöthige Correctiv in sich selbst einher; ist er unfruchtbar oder unzweckmässig, so zeigt er es sehr bald durch seine Unbrauchbarkeit und er wird alsdann, wegen mangelnden Erfolgs, fallen gelassen. Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

Es ist, wie ich glaube, nicht nöthig in diesen Grundsätzen irgendeine Gefahr für die Wissenschaft zu befürchten, wie dies von Vielen geschieht; ~~einerseits sind die bezeichneten Bedingungen, unter welchen~~

Je pense qu'il n'y a pas lieu de redouter – comme cela se produit pourtant chez beaucoup – que ces principes [*de formation de nouveaux nombres*] représentent un quelconque danger pour la science ;

~~wegen mangelnden Erfolgs, fallen gelassen.~~ Dagegen scheint mir aber jede überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes eine viel grössere Gefahr mit sich zu bringen und eine um so grössere, als dafür aus dem Wesen der Wissenschaft wirklich keinerlei Rechtfertigung gezogen werden kann; denn das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.

En revanche, il me semble que toute limitation superflue imposée au mouvement de la recherche mathématique comporte un danger bien plus grand, d'autant que vraiment, aucune justification [*de telles limitations*] ne peut être tirée de l'essence de la science ; car *l'essence* des *mathématiques* réside précisément dans leur *liberté*.

Été 1884

Grattan-Guinness (1970)

Lettre de Mittag-Leffler à Cantor au début 1885 :

~~von dieser Gesichtspunkt aus sehr viel erreichen können.~~ Aber ich will Ihnen nicht verhehlen dass es scheint mir es wäre Euer selbst wegen besser gewesen diese Untersuchungen nicht früher zu publicieren, als Sie neue sehr positive Resultate Ihrer neuen Betrachtungsweise darlegen können. Wäre es Ihnen z. B. gelungen durch die Typentheorie die Frage zu entscheiden ob das Linearcontinuum dieselbe Mächtigkeit hat oder nicht wie die zweite Zahlenclasse, dann würde gewiss

Mais je ne vais pas vous cacher qu'il me semble qu'il serait préférable pour vous de ne pas publier ces recherches avant que vous ne puissiez présenter de nouveaux résultats très positifs qui proviennent de votre nouvelle façon de voir les choses. Si vous étiez par exemple parvenu par votre théorie des types à décider si le continu linéaire possède ou non la même puissance que la deuxième classe de nombres, alors il serait certainement...

Ivor Grattan-Guinness (1941–2014)

Lettre de Cantor à Gerbaldi en 1896 **:**

Ich bekam plötzlich von Herrn M. L. einen Brief, worin er mir zu meinem grössten Erstaunen schreibt, er halte nach reiflicher Überlegung diese Publication für «*um hundert Jahre verfrüht*». Nach den Intentionen von Herrn M. L. hätte ich also noch bis zum Jahre 1984 damit warten sollen, was mir doch eine zu starke Zumuthung zu sein schien!

Je reçus tout à coup une lettre de Monsieur M. L. dans laquelle, à mon grand étonnement, il m'écrivait qu'après mûre réflexion il considérait que cette publication [*ce projet de publication de Cantor pour Acta*] était « *de cent ans trop en avance* ». Selon les intentions de Monsieur M. L., j'aurais dû attendre jusqu'en 1984, ce qui m'a semblé être une exigence bien démesurée !

Ordinaux et topologie

Si F *est un fermé de* $\mathbb{R}$ *(ou de* $\mathbb{R}^d$*), il existe un ordinal dénombrable* γ *tel que*

$$\mathrm{F}^{(\gamma)} = \mathrm{F}^{(\gamma+1)} = \ldots = \mathrm{F}^{(\Omega)}.$$

Si le dérivé $\mathrm{F}^{(\gamma)}$ *est vide, alors* F *est dénombrable, sinon l'ensemble* $\mathrm{F}^{(\gamma)}$ *est* parfait.

Ivar Bendixson (1861–1935)

René Baire (1874–1932)

Émile Borel (1871–1956)

Henri Lebesgue (1875–1941)

plus généralement :

Si $(\mathrm{F}_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ *est une famille décroissante de fermés de* $\mathbb{R}^d$*, il existe un ordinal dénombrable* γ *tel que*

$$\mathrm{F}_\gamma = \mathrm{F}_{\gamma+1} = \cdots = \bigcap_{\alpha<\Omega} \mathrm{F}_\alpha .$$

Borel, et surtout Lebesgue :

Si $(x_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ *est une famille croissante de points de* $[0,1]$ *telle que*

$$x_\alpha < 1 \implies x_\alpha < x_{\alpha+1},$$

il existe un ordinal dénombrable γ *tel que* $x_\gamma = 1$.

théorème de recouvrement fini, versions du TAF

QUELQUES THEORÈMES
DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES
DE POINTS

Extrait d'une lettre adressée à M. Cantor à Halle

PAR

IVAR BENDIXSON

à STOCKHOLM.

.... Dans votre travail récemment publié: »Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre», vous avez énoncé le théorème suivant, qui me paraît devoir être rectifié dans quelques parties. Vous y dites page 31:

»Hat $P^{(1)}$ die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse (II), so lässt sich $P^{(1)}$ stets und nur auf einzige Weise in zwei Mengen R und S zerlegen,

Acta mathematica. 2. Imprimé 25 Août 1883.

so dass

$P^{(1)} \equiv R + S$, wo R und S eine äusserst verschiedene Beschaffenheit haben:

R ist so beschaffen dass sie durch den wiederholten Ableitungsprocess einer fortwährenden Reduction bis zur Annihilation fähig ist, so dass es immer eine erste ganze Zahl γ der Zahlenclassen (I) oder (II) giebt, für welche $R^{(\gamma)} \equiv 0$; solche Punctmengen R nenne ich reductibel.

»Si P est un ensemble de points situés dans un espace continu à n dimensions, et si P' a une puissance plus grande que la première, je puis toujours le diviser d'une seule manière

$$P' \equiv R + S$$

où S est un ensemble parfait et R est de la première puissance et tel qu'il existe toujours un γ, tel que

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0, \qquad \mathrm{R} \cap \mathrm{R}^{(\gamma)} = \emptyset$$

γ étant un de vos symboles d'infini correspondant à ce que vous avez nommé nombre de la classe (I) ou (II).

(théorème de Cantor–Bendixson)

Baire (1899)

Une fonction f définie sur une partie F de [0, 1] est de *première classe* si elle est limite en tout point de F d'une suite de fonctions f_n continues sur F,

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Si F est fermé, la fonction f a des points de continuité.

(définition et résultat de Baire)

Pour que f soit de première classe sur $[0, 1]$, *il faut et il suffit que pour tout ensemble parfait* P *contenu dans* $[0, 1]$, *la restriction* f_{P} *de* f à P *possède un point de continuité.*

E_0 = [0, 1]

E_1 = ensemble des points de discontinuité de f

E_2 = . . .

. . .

$E_\Omega = \varnothing$

Sur les fonctions de variables réelles.

(*Par* R. BAIRE *à* *Bar-le-Duc.*)

(publié en 1899)

[...]

Pour voir exactement jusqu'où nous pouvons aller dans cette voie, rappelons brièvement les définitions de M. CANTOR relatives aux ensembles dérivés d'ordre supérieur (*). Si un ensemble P est de telle nature que le dérivé d'ordre n, P^n, existe, quel que soit n, il y a des points qui appartiennent à P^n, quel que soit n; on désigne l'ensemble de ces points par P^ω, et l'on convient de dire que P^ω est l'ensemble dérivé de P d'ordre ω. On désigne les ensembles dérivés successifs de P^ω par la notation $P^{\omega+1}$, $P^{\omega+2}$,... $P^{\omega+n}$,...; s'il en existe, quel que soit n, les points qui appartiennent à tous ces ensembles forment un nouvel ensemble qu'on appelle $P^{2\omega}$, etc.; on est ainsi conduit à la notion d'ensemble dérivé d'ordre α, α étant un quelconque des symboles définis par M. CANTOR et qu'il appelle nombres de la deuxième classe.

Je ferai remarquer à ce sujet, une fois pour toutes, que nous n'aurons jamais à nous préoccuper des difficultés que peut comporter en soi la notion abstraite de *nombre transfini*, bien que cette expression puisse être employée par nous dans la suite de ce travail. Dans le cas actuel, par exemple, l'ensemble P^α, α étant un nombre déterminé de la deuxième classe de nombres, représente quelque chose de parfaitement déterminé, indépendamment de toute considération abstraite relative aux symboles de M. Cantor; il n'y a donc, dans l'usage que nous pourrons faire de la locution *nombre transfini*, rien de plus que l'emploi d'un langage commode. Il en sera toujours de même dans la suite.

Théorie des ensembles

(Cantor 1891) :

Si X est un ensemble quelconque et si ϕ est une application de X dans $\mathcal{P}(X)$, le sous-ensemble

$$Y = \{x \in X : x \notin \phi(x)\} \subset X$$

$Y \in \mathscr{P}(X)$

n'est pas dans l'image de ϕ (ϕ n'est jamais surjective)

Si on avait $Y = \phi(y)$, alors : $y \in Y$? $y \notin Y$?

implique $y \in \phi(y) = Y$, contradiction

implique $y \notin \phi(y) = Y$, contradiction

$\mathcal{P}(X)$ . . . est toujours plus « gros » que . . . X

Derniers articles mathématiques de Cantor

« Mannigfaltigkeit » (encore en 1891)

devient définitivement « Menge » (1895)

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre[1].

[Math. Annalen Bd. 46 S. 481—512 (1895); Bd. 49, S. 207—246 (1897).]

,,Hypotheses non fingo.'' [Newton.]

,,Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus.''

,,Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia.''

« Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzem. »

Tentative de traduction :
Par le mot « ensemble », nous entendons le rassemblement en un tout, que nous désignons par M*, de certains objets bien différenciés* m *(qu'on appellera les « éléments » de* M*), objets provenant de notre intuition ou de notre pensée.*

Cantor, en 1895 et 1897 **:** *types d'ordre*

un *ordinal* représente une famille d'ensembles bien ordonnés, formée de tous les ensembles bien ordonnés qui sont *isomorphes pour l'ordre* à un membre (quelconque) de cette famille.

(un *cardinal* représente une famille d'ensembles formée de tous les ensembles qui peuvent être mis en bijection avec l'un des membres de cette famille)

Étant donnés deux ensembles bien ordonnés, ou bien ils sont isomorphes, ou bien l'un des deux est isomorphe à une *section commençante* de l'autre,

$$\mathrm{S}_x = \{y \in \mathrm{X} : y < x\}, \qquad x \in \mathrm{X}.$$

Si deux ensembles bien ordonnés sont isomorphes, il existe un *unique* isomorphisme entre eux.

Lettre de Cantor à Gerbaldi en 1896 :

«... Die Theorie der Ordnungstypen war bereits vor *elf* Jahren ... fertig, ... Über den *eigentlichen Grund*, warum der Druck damals sistirt wurde, bin ich heute nicht unterrichtet, er ist mir ein *Räthsel*!

Ich bekam plötzlich von Herrn M. L. einen Brief, worin er mir zu meinem grössten Erstaunen schreibt, er halte nach reiflicher Überlegung diese Publication für «*um hundert Jahre verfrüht*». Nach den Intentionen von Herrn M. L. hätte ich

[...] La théorie des types d'ordre était déjà prête depuis *onze* ans. [...] Je ne connais toujours pas aujourd'hui la *raison réelle* pour laquelle l'impression [de l'article] a été suspendue à ce moment-là, c'est pour moi un *mystère* !

Je reçus tout à coup une lettre de Monsieur M. L. dans laquelle, à mon grand étonnement, il m'écrivait qu'après mûre réflexion [...]

Axiomatique

Le temps des paradoxes (1890–1900, environ)

le paradoxe dit « de Russell » :

Soit E l'ensemble des F tels que $F \notin F$.

Est-ce que $E \in E$?

Bertrand Russell (1872–1970)

Richard Dedekind (1831–1916),
« Was sind und was sollen die Zahlen ? » (1888)

Giuseppe Peano (1858–1932),
« Arithmetices principia, nova methodo exposita », en latin (1889)

Gottlob Frege (1848–1925),
« Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens » (1879) ;

Frege fonde le calcul des prédicats :

dans le calcul propositionnel on avait :

NON, ET, OU, =

dans le calcul des prédicats on ajoute : $\forall x \, \mathrm{P}(x)$ $\quad \exists \, x \, \mathrm{P} \, (x)$

ARITHMETICES PRINCIPIA.

Peano (1889, en latin)

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus)*.

» 1 » *unitas*.

» $a+1$ » *sequens a*, sive *a plus* 1.

» $=$ » *est aequalis*. Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in \mathrm{N}$.
2. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a = a$.

Axiomata.

1. $1 \in \mathrm{N}.$
2. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a = a.$
3. $a, b, c \in \mathrm{N} \,.\, \supset : a = b \,.\, = .\, b = a.$
4. $a, b \in \mathrm{N} \,.\, \supset \therefore a = b \,.\, b = c : \supset .\, a = c.$ les *axiomes*
5. $a = b \,.\, b \in \mathrm{N} : \supset .\, a \in \mathrm{N}.$ *de Peano*
6. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a + 1 \in \mathrm{N}.$
7. $a, b \in \mathrm{N}. \supset : a = b \,.\, = .\, a + 1 = b + 1.$
8. $a \in \mathrm{N} \,.\, \supset .\, a + 1 -= 1.$
9. $k \in \mathrm{K} \therefore 1 \in k \therefore x \in \mathrm{N} \,.\, x \in k : \supset_x .\, x + 1 \in k :: \supset .\, \mathrm{N} \supset k.$

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

PEANO, *Arithmetices principia.*

Axiomes de Peano (1889)

1. $1 \varepsilon \mathrm{N}.$ (pour Peano **1** est le plus petit entier)
2. $a \varepsilon \mathrm{N} .\supset. a = a.$
3. $a, b \varepsilon \mathrm{N} .\supset: a = b .=. b = a.$
4. $a, b, c \varepsilon \mathrm{N} .\supset\therefore a = b . b = c :\supset. a = c.$
5. $a = b . b \varepsilon \mathrm{N} :\supset. a \varepsilon \mathrm{N}.$
6. $a \varepsilon \mathrm{N} .\supset. a + 1 \varepsilon \mathrm{N}.$
7. $a, b \varepsilon \mathrm{N} .\supset: a = b .=. a + 1 = b + 1.$
8. $a \varepsilon \mathrm{N} .\supset. a + 1 -= 1.$
9. $k \varepsilon \mathrm{K} \therefore 1 \varepsilon k \therefore x \varepsilon \mathrm{N} . x \varepsilon k :\supset_x . x + 1 \varepsilon k :: \supset . \mathrm{N} \supset k.$

1. $1 \in \mathbf{N}$; 6. $\forall a \in \mathbf{N} : a+1 \in \mathbf{N}$, 8. $a+1 \neq 1$

7. $\forall a, b \in \mathbf{N},\ a = b \Leftrightarrow a+1 = b+1$

9. c'est le principe de récurrence : k est un ensemble d'entiers contenant **1** et qui contient x + 1 chaque fois qu'il contient x. Alors...

11. $\quad 2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}.$

Proof:

$\mathrm{P}\,1 \,.\!\supset:$	$1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(1)
$1\,[a]\,(\mathrm{P}\,6) \,.\!\supset:$	$1 \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\!\supset\!.\, 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(2)
$(1)\,(2) \,.\!\supset:$	$1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(3)
$\mathrm{P}\,10 \,.\!\supset:$	$2 = 1 + 1$	(4)
$(4)\,.\,(3)\,.\,(2, 1 + 1)\,[a, b]\,(\mathrm{P}\,5) \,:\!\supset:$	$2 \,\varepsilon\, \mathrm{N}$	(Theorem).

Note. We have written explicitly all the steps of this very easy proof. For the sake of brevity, we now write it as follows:

$$\mathrm{P}\,1\,.\,1\,[a]\,(\mathrm{P}\,6) \,:\!\supset: 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}\,.\,\mathrm{P}\,10\,.\,(2, 1+1)\,[a, b]\,(\mathrm{P}\,5) \,:\!\supset: \mathrm{Th}.$$

or

$$\mathrm{P}\,1\,.\,\mathrm{P}\,6 \,:\!\supset: 1 + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}\,.\,\mathrm{P}\,10\,.\,\mathrm{P}\,5 \,:\!\supset: \mathrm{Th}.$$

une preuve selon Peano

(histoire sans paroles)

David Hilbert (1862–1943)

(photo prise au début
des années 1900)

installé à Göttingen
depuis 1895.

Grundlagen der Geometrie, 1899

Traduction française, publiée dès 1900

en allemand : « Dinge »
(choses)

Les éléments de la Géométrie et les cinq groupes d'axiomes.

Convention. — Concevons trois différents systèmes d'êtres : les êtres du PREMIER système, nous les nommerons *points* et nous les désignerons par A, B, C, ...; les êtres du DEUXIÈME système, nous le nommerons *droites* et nous les désignerons par a, b, c, ...; les êtres du TROISIÈME système, nous les nommerons *plans* et nous les désignerons par α, β, γ, ...; les points seront aussi nommés *éléments de la Géométrie linéaire* ; les points et les droites, *éléments de la Géométrie plane*; et les points, les droites et les plans, *éléments de la Géométrie de l'espace* ou *éléments de l'espace*.

Concevons que les points, droites et plans aient entre eux certaines relations mutuelles et désignons ces relations par des mots tels que : « SONT SITUÉS », « ENTRE », « PARALLÈLE », « CONGRUENT », « CONTINU » ; la description exacte et complète de ces relations a lieu au moyen des *axiomes de la Géométrie*

Le groupe d'axiomes I : Axiomes d'association.

Les axiomes de ce groupe établissent une *association* entre les notions précédemment indiquées, points, droites et plans. Ces axiomes sont les suivants :

I, 1. *Deux points distincts,* A, B, *déterminent toujours une droite* a; *nous poserons* $AB = a$ *ou* $BA = a$.

Au lieu de « DÉTERMINENT », nous emploierons aussi d'autres tournures de phrase; par exemple : A « EST SITUÉ SUR » a; A « EST UN POINT DE » a; a « PASSE PAR » A « ET PAR B »; « a JOINT A ET B » ou « JOINT A A B ». Lorsque A est situé sur a et, en outre, sur une autre droite b, nous emploierons aussi le mode d'expression : « LES DROITES a ET b ONT LE POINT A EN COMMUN », et ainsi de suite.

I, 2. *Deux points distincts quelconques d'une droite déterminent cette droite, et sur toute droite il y a au moins deux points; c'est-à-dire que, si l'on a* $AB = a$ *et* $AC = a$ *et* $B \neq C$, *on a aussi* $BC = a$.

I, 3. *Trois points* A, B, C *non situés sur une même droite déterminent toujours un plan* α; *nous poserons* $ABC = \alpha$.

ou « consistance » du système d'axiomes

La non-contradiction des axiomes.

Les axiomes des cinq groupes d'axiomes dont nous avons parlé dans le Chapitre I ne sont pas en contradiction, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'en déduire par un raisonnement logique une proposition qui soit en contradiction avec un de ces axiomes. Pour le prouver il suffit d'assigner une géométrie où l'ensemble des cinq groupes soit vérifié.

A cet effet, considérons le domaine Ω de tous les nombres algébriques qui prennent naissance, lorsque, partant du nombre 1, l'on effectue un nombre fini de fois les quatre opérations, addition, soustraction, multiplication, division et une cinquième opération : $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω désigne chaque fois un nombre ayant déjà pris naissance par le moyen de ces cinq opérations.

Nous regarderons un couple de nombres (x, y) du domaine Ω comme un point et le rapport $(u:v:w)$ de trois nombres quelconques de Ω, pourvu que u, v ne soient pas tous deux nuls, comme une droite; enfin l'équation

$$ux + vy + w = 0$$

l'axiome d'Archimède V.

De tout cela on conclut que toute contradiction dans les conséquences tirées de nos axiomes devrait aussi apparaître dans l'arithmétique du domaine Ω.

Les considérations analogues relatives à la Géométrie de l'espace ne présenteraient aucune difficulté.

Dans les développements qui précèdent, si l'on choisissait, au lieu du domaine Ω, le domaine de tous les nombres réels nous obtiendrions également une géométrie où l'ensemble des axiomes I-V serait aussi vérifié; mais pour notre démonstration il suffisait d'employer le domaine Ω qui renferme seulement un ENSEMBLE DÉNOMBRABLE d'éléments.

Indépendance de l'axiome de la continuité V.
(Géométrie non archimédienne.)

Pour démontrer l'indépendance de l'axiome V dit *d'Archimède*, il nous faut construire une Géométrie où seront vérifiés tous les axiomes à l'exception de cet axiome en question [1].

A cet effet, construisons le domaine $\Omega(t)$ de toutes les fonctions algébriques de t, qui proviennent de t au moyen des quatre opérations : addition, soustraction, multiplication, division, et de la cinquième opération $\sqrt{1+\omega^2}$, où ω désigne une fonction quelconque, déjà obtenue au moyen de ces cinq opérations. L'ensemble des éléments de $\Omega(t)$ — de même qu'il en était précédemment de Ω — est un ensemble dénombrable. Les cinq opérations peuvent être toutes effectuées d'une manière univoque et réelle. Le domaine $\Omega(t)$ ne renferme donc que des fonctions de t univoques et réelles.

Soit c une fonction quelconque du domaine $\Omega(t)$; la fonction c

Ernst Zermelo (en 1907)

1871–1953

Théorème de Zermelo (1904)

Tout ensemble X peut être muni d'un bon ordre.

conséquence de *l'axiome du choix* :

$$\exists\, \phi\ :\ \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X \quad \text{t.q.} \quad \forall\, Y \quad \phi(Y) \in Y$$

non vide contenu dans X,

(fonction de choix)

avec AC : tout ensemble peut être mis
en bijection avec un ordinal

Zermelo 1908 : axiomes pour la théorie des ensembles

Grundlegende Definitionen und Axiome.

« choses »

1. Die Mengenlehre hat zu tun mit einem „*Bereich*“ $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als „*Dinge*“ bezeichnen wollen, unter denen die „Mengen“ einen Teil bilden. Sollen zwei Symbole a und b dasselbe Ding bezeichnen, so schreiben wir $a = b$, im entgegengesetzten Falle $a \neq b$. Von einem Dinge a sagen wir, es „existiere“, wenn es dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört; ebenso sagen wir von einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Dingen, „es gebe Dinge der Klasse $\mathfrak{K}$“, wenn $\mathfrak{B}$ mindestens ein Individuum dieser Klasse enthält.

2. Zwischen den Dingen des Bereiches $\mathfrak{B}$ bestehen gewisse „*Grundbeziehungen*“ der Form $a \varepsilon b$. Gilt für zwei Dinge a, b die Beziehung $a \varepsilon b$, so sagen wir, „a sei *Element* der Menge b“ oder „b enthalte a als Element“ oder „besitze das Element a“. Ein Ding b, welches ein anderes a als Element enthält, kann immer als eine *Menge* bezeichnet werden, aber auch nur dann — mit einer einzigen Ausnahme (Axiom II).

3. Ist jedes Element x einer Menge M gleichzeitig auch Element der Menge N, so daß aus $x \varepsilon M$ stets $x \varepsilon N$ gefolgert werden kann, so sagen wir, „M sei *Untermenge* von N“, und schreiben $M \Subset N$*). Es ist stets $M \Subset M$, und aus $M \Subset N$ und $N \Subset R$ folgt immer $M \Subset R$. „*Elementenfremd*“

die Frage, ob $M \Subset N$ oder nicht.

Über die Grundbeziehungen unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ gelten nun die folgenden „*Axiome*“ oder „*Postulate*“.

axiome d'exten-
sionnalité :

Axiom I. Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \Subset N$ und $N \Subset M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.

(Axiom der Bestimmtheit.)

Die Menge, welche nur die Elemente $a, b, c, \cdots, r$ enthält, wird zur Abkürzung vielfach mit $\{a, b, c, \cdots, r\}$ bezeichnet werden.

(impropre)

Axiom II. Es gibt eine (uneigentliche) Menge, die „*Nullmenge*“ 0, welche gar keine Elemente enthält. Ist a irgend ein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge $\{a\}$, welche a und nur a als Element enthält; sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge $\{a, b\}$, welche sowohl a als b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

(Axiom der Elementarmengen.)

5. Nach I sind die „Elementarmengen“ $\{a\}$, $\{a, b\}$ immer eindeutig bestimmt, und es gibt nur eine einzige „Nullmenge“. Die Frage

Axiome I. Si chaque élément d'un ensemble M est en même temps élément de N et inversement (on a donc en même temps M ⊂ N et N ⊂ M), alors on a toujours M = N. En bref : chaque ensemble est déterminé par ses éléments.

Zermelo pour

Axiomes de la théorie des ensembles

Extensionnalité — X est déterminé par ses éléments

Existence des ensembles élémentaires — ensemble vide, singletons, paires

Axiome de la somme (concerne les réunions)

Ensemble des parties — $X \longrightarrow \mathscr{P}(X)$

de X on passe à $\mathscr{P}(X)$ (l'ensemble des parties)

Axiome de l'infini

Axiome du choix

Compréhension

$$Y = \{x \in X : P(x) \text{ est vraie } \}$$

$P(x)$ est une « propriété » de x

Skolem et Fraenkel montrent que :

les axiomes de Zermelo -1908 ne suffisent pas pour formaliser toutes les notions introduites par Cantor !

Thoralf Skolem (1887–1963) (en 1923)

Abraham Adolf Fraenkel (1891–1965) (en 1922)

John von Neumann (1903–1957) (en 1923, 1925)

Skolem et Fraenkel introduisent « l'axiome de remplacement »

NON

OU

$\exists$

x $\quad y \quad z, \ldots$

$=$ $\quad \in$ $\quad \emptyset$

$x = y$

$x = \emptyset$

$(\quad \ldots \quad)$

$$\underline{\mathrm{F}}(x, y) \equiv x \in y$$

E $\quad \mathrm{F}$

$$\underline{\mathrm{E}}(x, y, z) \text{ OU } \underline{\mathrm{F}}(x, y)$$

$$\underline{\mathrm{E}}(x, y, z)$$

$$\underline{\mathrm{E}}(x, y, y)$$

$$\text{NON } \underline{\mathrm{F}}(x, y)$$

$$\underline{\mathrm{R}}(x, y) \equiv \exists z\, \underline{\mathrm{E}}(x, y, z)$$

$$\underline{\exists x \text{ NON}\big(\exists y\, (y \in x)\big)}$$

Axiomes de la théorie ZF (pour Zermelo–Fraenkel) :

Extensionnalité
Axiome de la somme
Ensembles des parties
Axiome de l'infini

Remplacement

$$a \longrightarrow \Phi_{\mathrm{R}}(a)$$

$$\big(\mathrm{R}(x,y) \ \text{ ET } \ \mathrm{R}(x,y')\big) \ \Rightarrow \ y = y'$$

$$\big(y = \Phi_{\mathrm{R}}(x)\big) \quad \equiv \quad \mathrm{R}(x,y)$$

$$b \ = \ \{y \ : \ \exists x \in a, \ y = \Phi_{\mathrm{R}}(x)\}$$

On ajoute en général à ZF l'axiome du choix AC pour obtenir la théorie ZFC

Ordinaux selon von Neumann

Un *ordinal* est un ensemble α qui a les trois propriétés suivantes :

- la relation $x \in y$ est une relation d'ordre strict sur l'ensemble α, c-à-d

  si x, y, z sont des éléments de α, alors :
  $x \notin x$; $(x \in y \text{ et } y \in z) \Rightarrow x \in z$

- tout sous-ensemble non vide de α a un plus petit élément pour la relation $\in$,

- si $\beta \in \alpha$, alors $\beta \subset \alpha$.

α est *bien ordonné* pour la relation d'appartenance

$$\underbrace{\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ \ldots}$$

les premiers (les plus petits) ordinaux
pour l'inclusion

L'ordinal représente l'entier :

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ \ldots$$

0 1 = {0} 2 = {0, 1} 3 = {0, 1, 2} . . .

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots \in n \in n+1 \in \ldots$$

L'ordre des ordinaux :

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta\,; \qquad \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$$

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

$$\emptyset \in \omega\,;$$

$$\alpha \in \omega \Rightarrow \alpha + 1 \in \omega$$

une forme de l'axiome de l'infini : il existe un objet ω tel que . . .

Dans ce point de vue, les *cardinaux* sont des ordinaux particuliers

Et après…

Récurrence ordinale

Pour que la propriété $\mathrm{P}(\alpha)$ dépendant d'un ordinal arbitraire α soit vraie pour tout ordinal α, il (faut et il) suffit que

- la propriété $\mathrm{P}(0)$ soit vraie
- et que pour tout ordinal α, on puisse prouver que :

  si $\mathrm{P}(\beta)$ *est vraie pour tout* $\beta < \alpha$, *alors* $\mathrm{P}(\alpha)$ *est vraie.*

Par exemple : par récurrence ordinale, on peut « dériver » indéfiniment :

$$\mathrm{F}^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} (\mathrm{F}^{(\beta)})' \qquad \mathrm{F}^{(\alpha+1)} = (\mathrm{F}^{(\alpha)})'$$

cas particulier d'un « *ordinal successeur* »

Par exemple : par récurrence ordinale, tribu engendrée ;

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{G}_{\delta\sigma} \subset \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta} \subset \ldots \subset \mathcal{G}_\omega$$

$$\mathcal{G}_\omega = \mathcal{F}_\omega \subset \mathcal{G}_{\omega+1} \subset \ldots \subset \mathcal{G}_\Omega = \mathcal{B}$$

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_\omega$$

Certains lemmes de tribu engendrée ont une preuve plus intuitive par récurrence transfinie. Par exemple :

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de parties de X contenue dans une classe $\mathcal{M}$ de parties stable par limite des suites croissantes et des suites décroissantes, alors $\mathcal{M}$ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

AC et lemme de Zorn (1935)

Max Zorn (1906–1993)

Modèles de la théorie des ensembles

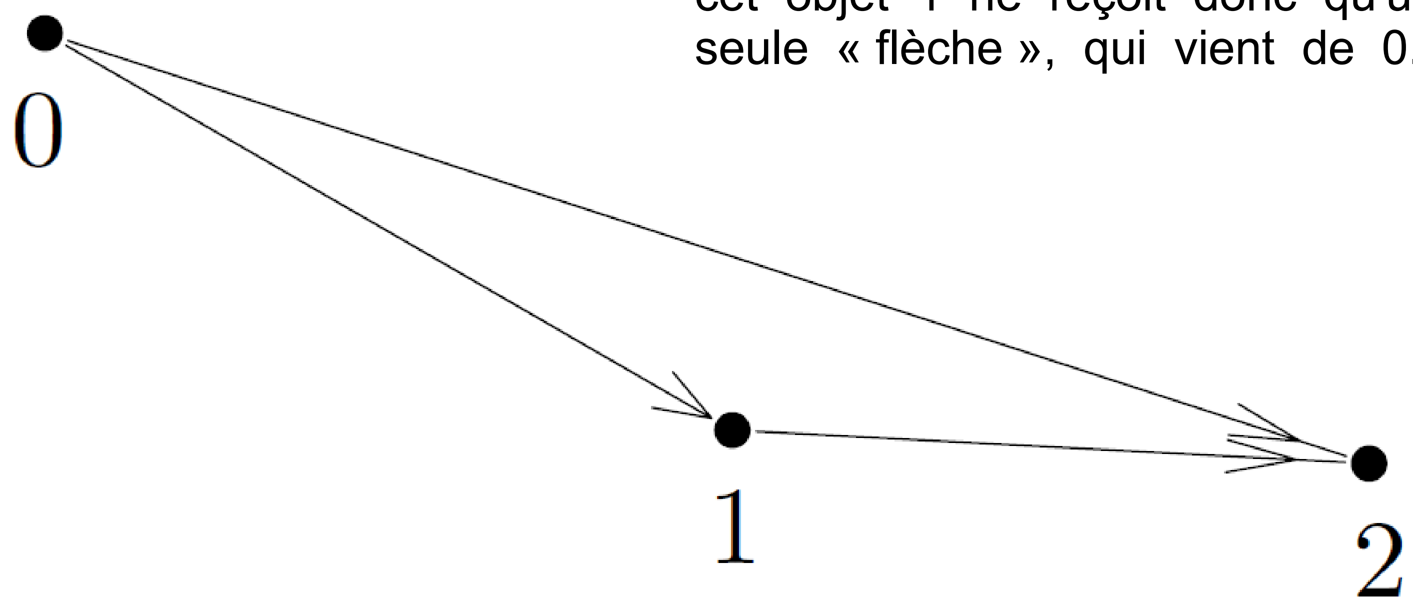
Un *modèle de la théorie des ensembles* suit les principes posés par Hilbert puis par Zermelo **:** on y travaille sur une collection d'objets, qu'on pourra décider d'appeler (avec précaution) « ensembles », comme Hilbert décidait d'appeler points, droites certaines des « choses » qu'il considérait.

On peut penser qu'un modèle est un *ensemble* au sens naïf, dont les éléments, toujours au sens naïf, seront les objets, les « choses » qui seront à l'étude dans la théorie axiomatique.

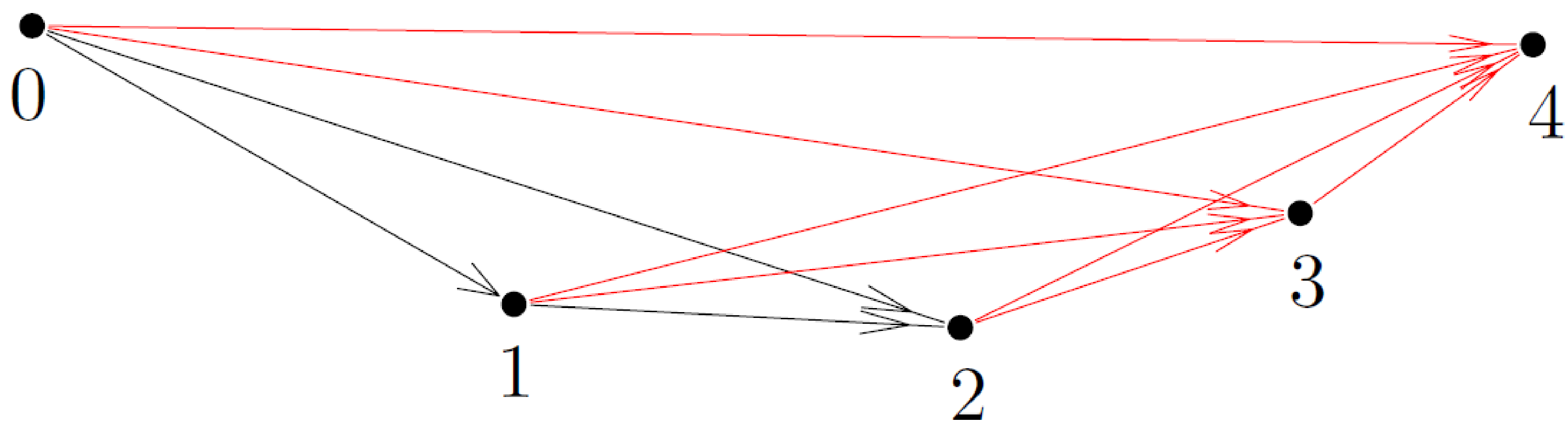
On peut aussi penser qu'un modèle de la théorie des ensembles est un *graphe orienté,* les arêtes correspondant à la relation d'appartenance.

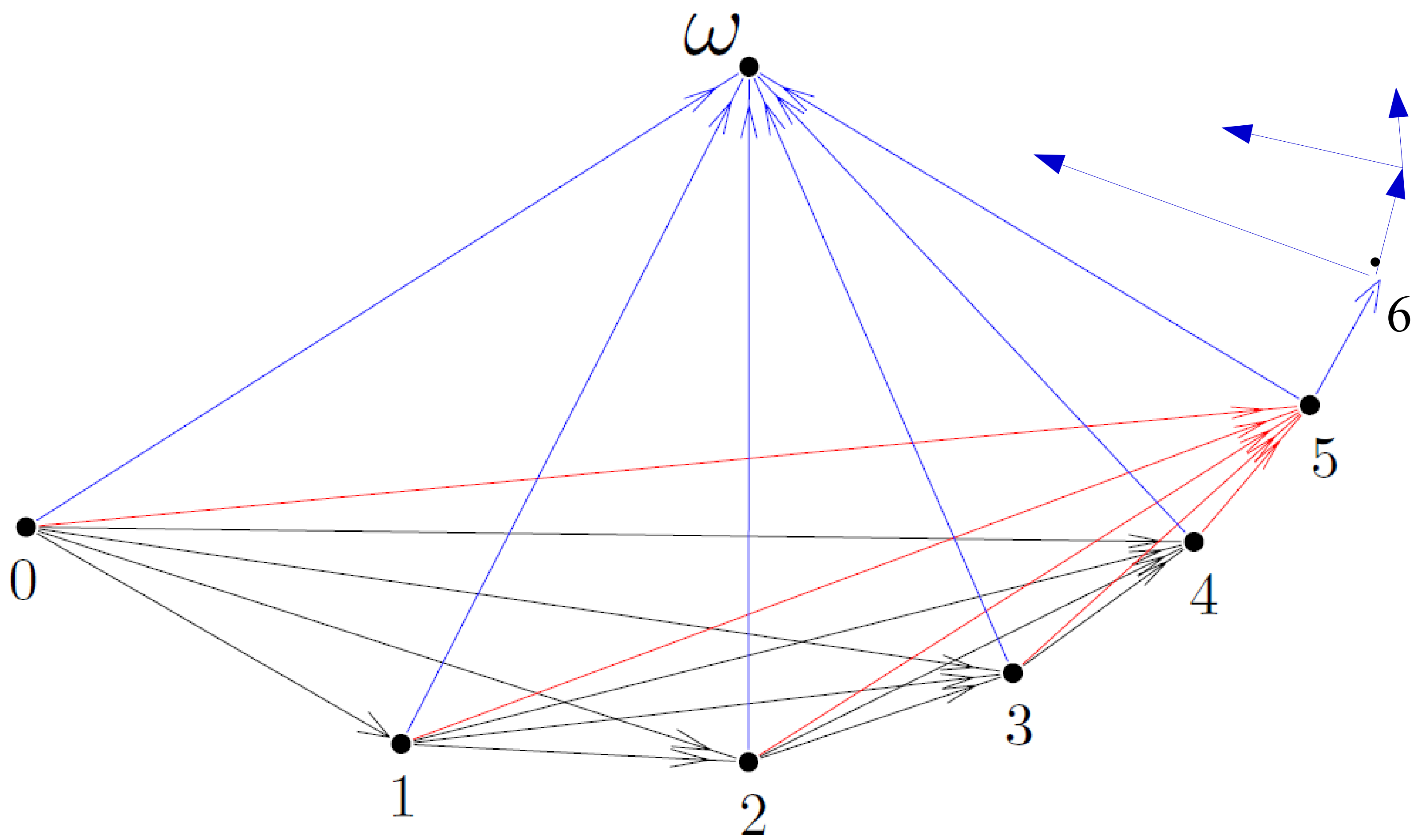
d'après les axiomes de ZF, il **doit** exister un objet b du modèle tel qu'on n'ait *jamais* $a \in b$ **;** cet objet b noté **0** *représente* l'ensemble vide.

Il doit aussi exister un objet 1 qui représente l'ensemble des parties de l'ensemble vide : le seul élément de cet ensemble de parties est l'ensemble vide ; cet objet 1 ne reçoit donc qu'une seule « flèche », qui vient de 0.



avec deux entiers de plus, 3 et 4 :





ω
0
1
2
3
4
5
6

on ne peut pas « fabriquer » un modèle de la théorie des ensembles ZF à partir des propres axiomes de ZF (cela résulte du *deuxième théorème d'incomplétude* de Gödel).

Dans un modèle de ZF, on définit des ordinaux (les ordinaux du modèle) en suivant la définition de von Neumann appliquée avec la notion d'appartenance propre au modèle.

L'axiome de l'infini implique l'existence d'un objet ω qui est le plus petit ordinal infini du modèle.

(fini au sens du modèle **!**)

Un ordinal α du modèle est dit ***fini*** si tout ordinal non nul β inférieur ou égal à α est de la forme $\beta = \gamma + 1$ (β est un *successeur*)

Pour ne pas mélanger les différents niveaux de langage, disons que les objets x du modèle M sont des *M-ensembles* et disons que le M-ensemble y est un *M-élément* de x si on a $y \varepsilon x$ dans le modèle. Un M-ensemble α est un *M-ordinal* s'il vérifie la définition de von Neumann au sens du modèle. Le M-ensemble vide du modèle est le « plus petit » M-ordinal.

Les M-ordinaux jouent un rôle très important en théorie axiomatique des ensembles. La *collection des M-ordinaux* du modèle M, qui est le sous-ensemble (au sens intuitif) de M formé de tous les M-ordinaux, « n'est pas » un M-ensemble : il n'existe pas de M-ensemble x tel que tous les M-ordinaux soient M-éléments de x .

L'axiome de remplacement valide l'utilisation dans le modèle de constructions par récurrence sur la collection des ordinaux.

$$\mathrm{V}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(\mathrm{V}_\beta)$$

$$\mathrm{V}_0 = \emptyset\,; \quad \mathrm{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathrm{V}_\alpha)$$

La collection V formée de tous les M-éléments des V_α est encore un modèle de la théorie des ensembles. Ce modèle V satisfait *l'axiome de fondation*, qui implique en particulier

$$x \notin x$$

Löwenheim–Skolem : si on dispose d'un modèle M de ZF, on peut construire un nouveau modèle M' qui est dénombrable.

Si on dispose d'un modèle M de ZF, on peut construire un modèle M' qui contient des entiers non standard (des entiers infiniment grands).

Si on dispose d'un modèle M de ZF, on peut construire un modèle M' qui satisfait l'axiome du choix et l'hypothèse du continu (Gödel, 1940 ; c'est la preuve de la *consistance relative* de AC et HC) ; on peut construire un modèle M' dans lequel l'hypothèse du continu est fausse (Cohen, 1963 ; indépendance de HC).

Leopold Löwenheim (1878–1957)

Kurt Gödel (1906–1978)

Paul Cohen (1934–2007)

René Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

Ivar Bendixson, Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points, Acta Math. 2 (1883), 415-429.

Georg Cantor, en traduction française : Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques, Acta Math. 2 (1883), 336-348.

Georg Cantor, version française amendée : Fondements d'une théorie générale des ensembles, Acta Math. 2 (1883), 381-408.

Georg Cantor, en traduction française : Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, Mémoires de la Société des Sciences physiques et natur. de Bordeaux, T. III (1899), 343-437.

Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, éd. par Ernst Zermelo, 1932.

Eduard Heine, Die Elemente der Functionenlehre, J. reine angew. Math. 74 (1872), 172-188.

David Hilbert, en traduction française : Les principes fondamentaux de la géométrie, Gauthier-Villars: Paris, 1900

Jean-Louis Krivine, Théorie des ensembles, Cassini, 1998.

Walter Purkert et Hans Joachim Ilgauds, Georg Cantor: 1845-1918, Vita Mathematica 1, Birkhäuser Verlag, 1987.

Bernhard Riemann, en traduction française : Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, Bulletin des sciences math. et astronomiques 5 (1873), 20-48, 79-96.

Jean van Heijenoort (ed.), From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931 (3rd ed.), Harvard University Press.

https://webusers.imj-prg.fr/~bernard.maurey/