ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

POINTS FIXES DES CONTRACTIONS DE CERTAINS FAIBLEMENT COMPACTS DE L^1,

B. MAUREY

Exposé n° VIII

28 février 1981

D. Alspach a construit l'année dernière un exemple d'une contraction d'un faiblement compact de L^1 n'admettant pas de point fixe. Nous allons montrer deux résultats positifs concernant deux classes particulières de convexes faiblement compacts de L^1.

<u>Théorème 1</u> : Soient X un sous-espace réflexif de L^1 et C un convexe fermé borné de X. Toute contraction $T : C \to C$ admet un point fixe.

Notre second résultat concerne l'espace de Hardy H^1, que nous munirons de la norme induite par L^1, c'est-à-dire :

$$\text{si } f = \sum_{n=o}^{\infty} a_n e^{in\theta} , \quad \|f\|_{H_1} = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right| d\theta$$

<u>Théorème 2</u> : Soit C un convexe faiblement compact de H^1. Toute contraction $T : C \to C$ admet un point fixe.

§ 1. <u>RAPPELS SUR LES CONVEXES MINIMAUX</u>.

Soient E un espace de Banach et C un convexe faiblement compact de E. Soit d'autre part T une contraction de C dans lui-même. Il est clair que la classe des convexes fermés D tels que $D \subset C$ et $T(D) \subset D$ admet des éléments minimaux. Nous appellerons un tel élément minimal un convexe minimal pour T. Si T n'admet pas de point fixe, un convexe minimal pour T n'est pas réduit à un point.

Si D est convexe minimal pour T, on a

$$D = \overline{\text{conv } (T(D))}$$

En effet, conv(T(D)) est convexe et T-invariant, puisque

$$\text{conv } T(D) \subset D$$

$$T(\text{conv } T(D)) \subset T(D) \subset \text{conv } T(D)$$

Si D est minimal pour T, toute fonction numérique φ convexe s.c.i. telle que $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in D$, est constante sur D. En effet si φ atteint son minimum sur D en x_o, l'ensemble $\{y \in D;\ \varphi(y) \leq \varphi(x_o)\}$ est convexe fermé, T invariant et non vide, il coincide par conséquent avec D.

Considérons par exemple :

$$\varphi(x) = \sup \{ \|x-y\| \ ; \ y \in D \}$$

La fonction φ est convexe et continue. De plus, puisque $D = \overline{\text{conv } (T(D))}$, on voit que :

$$\varphi(x) = \sup \{ \|x - Ty\| \ ; \ y \in D \}$$

On en déduit que $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in D$, puisque

$$\varphi(Tx) = \sup \{ \|Tx - Ty\| \ ; \ y \in D \} \leq \sup \{ \|x - y\| \ ; \ y \in D\} = \varphi(x).$$

Il en résulte que φ est constante sur D. Il est clair que cette valeur constante ne peut-être que le diamètre $\delta(D)$ de l'ensemble D. On a donc

$$\forall\, x \in D,\ \sup \{ \|x - y\| \ ; \ y \in D \} = \delta(D)$$

Pour continuer, rappelons que toute contraction admet des points presque fixes :

<u>Lemme 1</u> : Si T est une contraction d'un convexe fermé borné C dans lui-même, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ des points $x \in C$ tels que

$$\|Tx - x\| \leq \varepsilon.$$

<u>Démonstration du lemme</u> : soit $x_o \in C$ et posons pour $x \in C$, $\varepsilon \in]0,1[$

$$T_\varepsilon x = \varepsilon x_o + (1 - \varepsilon)\ Tx$$

On voit que $T_\varepsilon\ C \subset C$ et $\|T_\varepsilon\ x_1 - T_\varepsilon\ x_2\| \leq (1 - \varepsilon)\ \|x_1 - x_2\|$, donc T_ε admet un point fixe (unique) x_ε, qui vérifie

$$x_\varepsilon = \varepsilon\ x_o + (1-\varepsilon)\ Tx_\varepsilon \ , \text{ donc}$$

$$\|Tx_\varepsilon - x_\varepsilon\| = \varepsilon \, \|Tx_\varepsilon - x_o\| \leq \varepsilon \, \delta(C)$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, que nous utiliserons dans toute la suite.

Si T est une contraction d'un convexe fermé borné C, on appellera <u>suite quasi-fixe</u> une suite (x_n) de points de C telle que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|Tx_n - x_n\| = 0$$

Etant donnée une suite quasi-fixe (x_n), on peut définir sur C la fonction

$$\Psi(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x - x_n\|$$

On voit immédiatement que Ψ est convexe continue, et que $\Psi(Tx) \leq \Psi(x)$, $\forall x \in C$.

Supposons C faiblement compact et minimal pour T. Dans ce cas Ψ est constante, et en désignant par y la limite faible de la suite (x_n) suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$:

$$\forall x \in C, \ \|x - y\| \leq \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x - x_n\| = \Psi(x)$$

On a vu précédemment que $\sup \{\|x - y\| \ ; \ x \in C\} = \delta(C)$, ce qui permet d'énoncer :

<u>Lemme 2</u> : Soit C un convexe faiblement compact minimal pour T. On a pour tout $x \in C$ et pour toute suite quasi-fixe (x_n)

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x - x_n\| = \delta(C)$$

§ 2. <u>UTILISATION DES ULTRAPUISSANCES</u>

Soit E un espace de Banach. On rappelle que l'ultrapuissance $E^{\mathbb{N}/u}$ de E est le quotient de l'espace $\ell^\infty(E)$ des suites bornées de points de E par le sous-espace fermé

$$N = \{(x_n) \in \ell^\infty(E) \ ; \ \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n\| = 0\}$$

On notera $\tilde{E}$ l'ultrapuissance de E. Si (x_n) est un représentant de $\tilde{x} \in \tilde{E}$, on a

$$\|\tilde{x}\| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n\|$$

Soient maintenant C un convexe fermé borné de E et T une contraction de C dans lui-même. On désignera par $\tilde{C}$ "l'ultrapuissance de C" c'est-à-dire l'ensemble des points $\tilde{x} \in \tilde{E}$ qui admettent un représentant (x_n) tel que $x_n \in C$ pour tout n.

On prolonge T à $\tilde{C}$ en définissant $T(\tilde{x})$ comme la classe d'équivalence de $(T(x_n))$, où (x_n) est un représentant quelconque de $\tilde{x}$. On vérifie immédiatement que T est encore une contraction sur $\tilde{C}$.

Le convexe C initial s'identifie au sous-convexe fermé de $\tilde{C}$ formé des points $\tilde{x}$ représentés par une suite constante de points de C.

On notera que T admet toujours des points fixes sur $\tilde{C}$. En effet, dire que $T\tilde{x} = \tilde{x}$ équivaut à dire que $\tilde{x}$ est représenté par une suite (x_n) quasi-fixe.

Dans le cas où C est faiblement compact minimal pour T, le lemme 2 se traduit de la facon suivante :

$$\text{Si } \tilde{x} \in \tilde{C} \text{ et } T(\tilde{x}) = \tilde{x}, \text{ alors } \|\tilde{x} - x\| = \delta(C) = \delta(\tilde{C}), \ \forall\, x \in C.$$

Si x et y sont deux points d'un espace de Banach F, on dira que $z \in F$ est un <u>quasi-milieu</u> de $[x,y]$ si

$$\|x - z\| = \|y - z\| = \frac{1}{2}\|x - y\|$$

<u>Lemme 3</u> : Si $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont deux points fixes de T sur $\tilde{C}$, il existe un autre point fixe $\tilde{z} \in \tilde{C}$ de T qui est un quasi-milieu de $[\tilde{x},\tilde{y}]$.

<u>Démonstration</u> : On considère l'ensemble

$$K = \{t \in \mathcal{C} \; ; \; \|\tilde{x} - t\| = \|\tilde{y} - t\| = \frac{1}{2} \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \}$$

On vérifie que K est convexe fermé, non vide (il contient $\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}$) et T-invariant. D'après le lemme 1, il existe pour tout m entier un point t_m de K tel que

$$\|T(t_m) - t_m\| \leq 1/m$$

Soient (x_n), (y_n), $(t_{m,n})$ des représentants de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ et t_m respectivement. On a :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n - t_{m,n}\| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \| y_n - t_{m,n}\| = \frac{1}{2} \|\tilde{x} - \tilde{y}\|$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|T(t_{m,n}) - t_{m,n}\| \leq \frac{1}{m}$$

Un argument diagonal classique permet de construire à partir des $t_{m,n}$ une suite diagonale (t_n) telle que

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n - t_n\| = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|y_n - t_n\| = \frac{1}{2} \| \tilde{x} - \tilde{y}\|$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|T(t_n) - t_n\| = 0$$

Autrement dit, la classe $\tilde{z}$ de (t_n) est un point fixe de T qui est un quasi-milieu de $[\tilde{x},\tilde{y}]$.

§ 3. RAPPELS SUR LES MESURES ALEATOIRES

3.1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Nous supposerons $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ séparable pour simplifier. Nous travaillerons ici avec des fonctions complexes.

Une probabilité aléatoire est une application de Ω dans l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{C}$, soit $\omega \rightsquigarrow \mu_\omega$ telle que

$$\omega \rightsquigarrow \int \varphi(u) \; \mu_\omega(du)$$

soit mesurable pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des probabilités aléatoires est une partie du dual de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(\overline{\mathbb{C}}))$ (où $\overline{\mathbb{C}}$ désigne le compactifié d'Alexandrof de $\mathbb{C}$), la dualité opérant ainsi :

$$< \mu,\ f > = \int (f(\omega,u)\mu_\omega(du))\ dP(\omega) = E \int f(u)\mu(du)$$

(Ex désignera l'intégrale d'un élément x de $L^1(\Omega,\mathcal{A},P)$)

Si (x_n) est une suite bornée en probabilité, on peut lui associer une probabilité aléatoire μ par

$$E\int f(u)\mu(du) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} E\ f(x_n)$$

où $f(x_n)$ désigne la fonction $\omega \longrightarrow f(\omega,x_n(\omega))$, et où $f \in L^1(\Omega,\mathcal{A},P,C(\overline{\mathbb{C}}))$.

3.2 Si la suite (x_n) est équi-intégrable, on peut prolonger la relation ci-dessus aux fonctions $f(\omega,u)$ "qui ne croissent pas plus vite que $|u|$ à l'infini", précisément aux fonctions mesurables de Ω dans $C(\mathbb{C})$ telles qu'il existe M et une fonction intégrable g vérifiant $|f(\omega,u)| \leq g(\omega) + M|u|$.

Si la suite (x_n) est équi-intégrable et si μ est la probabilité aléatoire qui lui est associée, on trouve en appliquant la remarque précédente à $f(\omega,u) = |u|$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_n\|_{L^1} = E \int |u|\mu(du)$$

puis à $f(\omega,u) = |x(\omega) - u|$, avec $x \in L^1$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x - x_n\|_{L^1} = E \int |x - u|\ \mu(du)$$

Si on applique enfin à $f(\omega,v) = \int |v - u|\ \mu_\omega(du)$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_m - x_n\| = E \int |v - u|\ \mu(du)\ \mu(dv)$$

3.3 Notons encore que si (x_n) est équi-intégrable, la variable aléatoire

$$y(\omega) = \int u \, \mu_\omega(du)$$

est égale à la limite faible de la suite (x_n) suivant $\mathcal{U}$. En effet soit $g \in L^\infty(\Omega,\mathcal{Q},P)$ et posons $f(\omega,u) = u\, g(\omega)$. On a :

$$E\, g\, y = E\int f(u)\, \mu(du) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} E\, g\, x_n$$

3.4 Terminons ce paragraphe par deux remarques simples qui seront utilisées dans la suite.

Si la suite (x_n) est formée de fonctions réelles, et si μ est la probabilité aléatoire associée, pour presque tout $\omega \in \Omega$ la probabilité μ_ω est portée par $\mathbb{R}$.

S'il existe de plus deux fonctions mesurables X et Y sur Ω (pouvant prendre les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$) telles que l'on ait $X \leq x_n \leq Y$ pour tout n, la probabilité μ_ω est portée pour presque tout ω par l'intervalle $[X(\omega), Y(\omega)]$.

Pour vérifier cette affirmation, il suffit de considérer

$$f(\omega,u) = 1 \wedge \operatorname{dist}(u,[X(\omega), Y(\omega)])$$

On a $E\, f(x_n) = 0$ pour tout n, donc :

$E \int f(u)\, \mu(du) = 0$, d'où le résultat découle.

§ 4. CONVEXES MINIMAUX DANS L^1.

Soient C un convexe faiblement compact de $L^1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ (fonctions à valeurs complexes) et T une contraction de C dans lui-même. Nous supposerons C minimal pour T, et nous supposerons pour fixer les idées que $\delta(C) = 1$.

Proposition 1 : Soit C un convexe faiblement compact de $L^1(\Omega,\mathcal{Q},P)$

minimal pour T. Il existe une fonction G sur Ω, de module 1, et un point $x_o \in C$ tels que

$$\forall\ x \in C,\ G(x - x_o) \text{ est une fonction réelle sur } \Omega.$$

Proposition 2 : Soit C un convexe faiblement compact de $L^1(\Omega,\mathcal{Q},P)$, minimal pour T, formé de fonctions réelles. Il existe deux fonctions U et V sur Ω (non nécessairement intégrables) telles que $|U| \wedge |V|$ soit intégrable et que pour toute suite quasi-fixe (x_n) de points de C

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} E|x_n - U| \wedge |x_n - V| = 0$$

Démonstration : Soit (x_n) une suite quasi-fixe de points de C et μ la probabilité aléatoire qui lui est associée (§3). On peut supposer en translatant C que la suite (x_n) tend faiblement vers 0 suivant $\mathcal{U}$. D'après le lemme 2 on a

$$\forall\ x \in C,\quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x - x_n\| = \delta(C) = 1$$

Puisque la suite (x_n) est équi-intégrable, les résultats de 3.2 et 3.3 donnent :

$$1 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x - x_n\| = E \int |x - u| \mu(du)$$

en particulier si $x = 0$, $E \int |u| \mu(du) = 1$. On a aussi

$$1 = \lim_{\substack{m\to\infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_m - x_n\| = E \int |v - u| \mu(du)\ \mu(dv)$$

et $\int u\ \mu_\omega(du) = 0$ pour presque tout ω.

Cette dernière propriété implique

$$\forall\ u \in \mathbb{C},\ \int |u - v|\ \mu_\omega(dv) \geq |u|\ .$$

Or ces deux fonctions ont la même intégrale (égale à 1) pour $E \int \mu(du)$. On en déduit que pour presque tout ω, on a pour μ_ω presque toute valeur de $u \in \mathbb{C}$

$$\int |u - v| \ \mu_\omega(dv) = |u|$$

Soit $\omega \in \Omega$ fixé et soit u un point du support de μ_ω. L'égalité ci-dessus est donc réalisée. Soit z un complexe de module 1 tel que $z\,u = |u|$. On peut écrire :

$$|u| = \int |u - v| \ \mu_\omega(dv) \geq \int \mathrm{Re}(zu - zv) \ \mu_\omega(dv) = zu = |u|$$

On en déduit que $z(u - v) = |u - v|$ pour μ_ω presque toute valeur de v, ce qui montre que le support de μ_ω est situé sur une demi-droite issue de u. Comme cette propriété doit être vraie pour tout point u du support de μ_ω, on en déduit immédiatement que le support de μ_ω comporte au plus deux points.

Posons donc $\mu_\omega = \theta(\omega)\ \delta_{X(\omega)} + (1 - \theta(\omega))\ \delta_{Y(\omega)}$, avec $0 \leq \theta(\omega) \leq 1$ et $Y(\omega) = X(\omega)$ si $\theta(\omega) = 0$ ou si $\theta(\omega) = 1$.

Puisque $0 = \int u \ \mu_\omega(du)$, le point 0 appartient au segment $[X(\omega), Y(\omega)]$. En particulier, on a sur l'ensemble $\{X = Y\}$

$$X = Y = 0.$$

Soient x et y deux points de C. On a

$$E \int \left\{ \tfrac{1}{2}(|x - u| + |y - u|) - \left|\tfrac{x+y}{2} - u\right| \right\} \mu(du) = 0$$

On en déduit que pour presque tout ω, les points $x(\omega)$ et $y(\omega)$ sont situés sur une demi-droite issue de $X(\omega)$ et également sur une demi-droite issue de $Y(\omega)$. Puisque C est séparable (parce que minimal) on peut trouver un ensemble négligeable N tel que la propriété ci-dessus soit vraie pour tout $\omega \notin N$ et pour tout couple de points de C.

En particulier, les valeurs de $x(\omega)$ lorsque x décrit C, et pour ω fixé, $\omega \notin N$, sont alignées sur une droite réelle qui passe par l'origine (puisque $0 \in C$). On en déduit aussitôt la proposition 1.

Dans le cas où C est formé de fonctions réelles, supposons $X \leq 0 \leq Y$. Notons que sur l'ensemble $\{X < Y\}$, on a $X < 0 < Y$. Si x est un point de C, 0 et $x(\omega)$ sont du même côté de $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, donc

$X(\omega) \leq x(\omega) \leq Y(\omega)$.

Dans le cas où $X(\omega) = Y(\omega) = 0$, on peut seulement dire que toutes les valeurs $x(\omega)$, pour x décrivant C, sont de même signe.

En résumé, dans le cas où C est formé de fonctions réelles, on peut associer à toute suite quasi-fixe (x_n) de points de C deux fonctions mesurables X et Y définies sur Ω telles que $X \leq Y$ et

a) Si μ est la probabilité aléatoire associée à (x_n), le support de μ_ω est égal à $\{X(\omega), Y(\omega)\}$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

b) Sur l'ensemble $\{X < Y\}$, on a $X \leq x \leq Y$ pour tout $x \in C$

c) Pour presque tout ω tel que $X(\omega) = Y(\omega)$, les valeurs de $x(\omega)$ lorsque x décrit C sont situées du même côté de $X(\omega)$.

Soient maintenant D un ensemble dénombrable et $(x_n^\alpha)_{\alpha \in D}$ une famille de suites quasi-fixes. On appellera X_α, Y_α les fonctions associées à la suite (x_n^α).

Soit $\alpha_o \in D$. Sur l'ensemble $\{X_{\alpha_o} < Y_{\alpha_o}\}$, on a $X_{\alpha_o} \leq x \leq Y_{\alpha_o}$ pour tout $x \in C$. En particulier si $\alpha \in D$

$$\forall n, \quad X_{\alpha_o} \leq x_n^\alpha \leq Y_{\alpha_o}$$

D'après 3.4 on en déduit $X_{\alpha_o} \leq X_\alpha \leq Y_\alpha \leq Y_{\alpha_o}$. Sur l'ensemble $\{X_{\alpha_o} < Y_{\alpha_o}\} \cap \{X_\alpha < Y_\alpha\}$ on peut renverser les rôles de α_o et α et on déduit $X_\alpha = X_{\alpha_o}$, $Y_\alpha = Y_{\alpha_o}$. Sur l'ensemble $\{X_\alpha = Y_\alpha\} \cap \{X_{\alpha_o} < Y_{\alpha_o}\}$, les valeurs $x_n^{\alpha_o}(\omega)$ sont du même côté de $X_\alpha(\omega)$ d'après c) et on déduit de 3.4 et de ce qui précède que ou bien $X_\alpha = Y_\alpha = X_{\alpha_o}$, ou bien $X_\alpha = Y_\alpha = Y_{\alpha_o}$.

Au total, on voit que pour presque tout $\omega \in \bigcup_{\alpha \in D} \{X_\alpha < Y_\alpha\}$, l'ensemble des valeurs $\{X_\alpha(\omega), Y_\alpha(\omega) \; ; \; \alpha \in D\}$ comporte au plus deux points distincts.

Si $\omega \notin \bigcup_{\alpha \in D} \{X_\alpha < Y_\alpha\}$, on a $X_\alpha(\omega) = Y_\alpha(\omega)$ pour tout $\alpha \in D$, et pour chaque α_o fixé, toutes les valeurs de $x(\omega)$ sont du même côté de $X_{\alpha_o}(\omega)$, lorsque x décrit C. Par conséquent pour chaque α_o, les valeurs de $X_\alpha(\omega)$ sont du même côté de $X_{\alpha_o}(\omega)$. Il en résulte à nouveau que l'ensemble des valeurs $\{X_\alpha(\omega)\ ;\ \alpha \in D\}$ comporte au plus deux points distincts.

On déduit de ce qui précède qu'il existe deux fonctions U et V sur Ω telles que pour toute suite quasi-fixe (x_n), associée à la probabilité aléatoire μ, on ait

$$\operatorname{supp} \mu_\omega \subset \{U(\omega),\ V(\omega)\}$$

(On peut prendre pour V l'ess-sup de la famille des fonctions Y, et pour U l'ess-inf de la famille des fonctions X, correspondant à toutes les suites quasi-fixes).

$$\text{Si } f(\omega,u) = 1 \wedge |u - U(\omega)| \wedge |u - V(\omega)|, \text{ on a}$$

$$E \int f(u)\ \mu(du) = 0,$$

donc
$$\lim_{n \to \mathcal{U}} E|x_n - U| \wedge |x_n - V| \wedge 1 = 0,$$

On en déduit $|x_{n_k} - U| \wedge |x_{n_k} - V| \to 0$ p.p. pour une sous-suite, donc $|U| \wedge |V| \le \liminf_k |x_{n_k}|$ est intégrable, et on termine en utilisant

$$f(\omega,u) = |u - U(\omega)| \wedge |u - V(\omega)|.$$

§ 5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Soit C un convexe faiblement compact de $L^1(\Omega,\mathcal{Q},P)$ et soit T une contraction de C dans lui-même. Nous allons montrer que lorsque T n'a pas de point fixe, l'espace vectoriel engendré par l'ultrapuissance $\widetilde{C}$ contient un sous-espace isométrique à $L^1[0,1]$. Cela est impossible si C est contenu dans un sous-espace réflexif X de $L^1(\Omega,\mathcal{Q},P)$, car alors X est super-réflexif et son ultrapuissance ne peut contenir L^1. Le théorème 1 sera donc démontré.

Si T n'admet pas de point fixe, on peut supposer C minimal pour T et $\delta(C) = 1$. La proposition 1 permet de se ramener au cas où C est formé de fonctions réelles.

Rappelons que l'ultrapuissance $\widetilde{C}$ s'identifie à une partie d'un espace $L^1(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{P})$. (Un élément $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ correspond à une classe de suites (A_n), $A_n \in \mathcal{A}$, et on pose $\widetilde{P}(\widetilde{A}) = \lim_{n \to \mathcal{U}} P(A_n)$. La tribu de départ $\mathcal{A}$ s'identifie à une sous-tribu de $\widetilde{\mathcal{A}}$, formée des suites constantes.)

Si $\widetilde{x}$ est un point fixe de T dans $\widetilde{C}$, correspondant à une suite quasi-fixe (x_n), la proposition 2 se traduit dans $L^1(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{P})$ par

$$|\widetilde{x} - U| \wedge |\widetilde{x} - V| = 0$$

autrement dit, $\widetilde{x} = 1_A U + 1_{A^c} V$, avec $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Si $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ sont deux points fixes de T dans $\widetilde{C}$, on a donc :

$$|\widetilde{x} - \widetilde{y}| = 1_B . |U - V|, \text{ avec } B \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

<u>Lemme 4</u> : Soient $\widetilde{x}_o, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ des points fixes de T dans $\widetilde{C}$.

Si on a $$\|\widetilde{x}_o - \widetilde{x}_N\| = \sum_{k=1}^{N} \|\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}\|,$$

les différences $(\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1})$, k=1,2,...N, ont leurs supports deux à deux disjoints dans $L^1(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{P})$.

<u>Démonstration du lemme</u> : D'après ce qui précède on peut écrire :

$$|\widetilde{x}_o - \widetilde{x}_N| = 1_B|U - V| \; ; \; |\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}| = 1_{B_k}|U - V|, \; k = 1,2,\ldots N.$$

On a $|\widetilde{x}_o - \widetilde{x}_N| \le \sum_{k=1}^{N} |\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_{k-1}|$ et d'après l'hypothèse, ces deux fonctions ont la même intégrale. Elles sont donc égales $\widetilde{P}$ presque partout :

$$1_B|U - V| = \left(\sum_{k=1}^{N} 1_{B_k}\right) |U - V|$$

Sur l'ensemble $\{U \neq V\}$, on a $1_B = \sum_{k=1}^{N} 1_{B_k}$, donc les ensembles $B_k \cap \{U \neq V\}$ sont deux à deux disjoints, ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme 5</u> : On peut construire dans $\widetilde{C}$ un chemin $(\widetilde{x}(t))$, $t \in [0,1]$, formé de points fixes de T et tel que

$$\forall\ s, t \in [0,1],\ \|\tilde{x}(s) - \tilde{x}(t)\| = |s - t|$$

Démonstration : Soit (x_n) une suite de points de C telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\|=0$. D'après le lemme 2, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 1$ pour tout $x \in C$. On en déduit si (n_k) tend suffisamment vite vers $+\infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_{n_k}\| = 1.$$

Soient $\tilde{x}(o)$ et $\tilde{x}(1)$ les points de $\tilde{C}$ représentés respectivement par les suites (x_k) et (x_{n_k}). D'après le lemme 3, il existe un point fixe $\tilde{z}$ de T qui est un quasi-milieu de $[\tilde{x}(o), \tilde{x}(1)]$. On pose $\tilde{x}\ (\frac{1}{2}) = \tilde{z}$.

On définit ainsi par récurrence les $\tilde{x}(\frac{k}{2^n})$: on prend pour $\tilde{x}(\frac{2k+1}{2^{n+1}})$ un point fixe quasi-milieu de $[\tilde{x}(\frac{k}{2^n}), \tilde{x}(\frac{k+1}{2^n})]$.

On vérifie de proche en proche que

$$\|\tilde{x}(\frac{k}{2^n}) - \tilde{x}(\frac{\ell}{2^n})\| = \frac{|k-\ell|}{2^n}$$

Cette relation permet de définir $\tilde{x}(t)$ par continuité pour $t \in [0,1]$.

Achevons la démonstration de l'affirmation faite au début de ce paragraphe. Soit $(\tilde{x}(t))$ un chemin donné par le lemme 5. Définissons une application de l'espace des fonctions en escalier sur $[0,1]$ dans $L^1(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{a}},\tilde{P})$ de la façon suivante :
si $0 = t_o < t_1 < \dots < t_N = 1$ est une partition de $[0,1]$, on associe à $f = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k 1_{[t_{k-1},t_k[}$ le point

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(\tilde{x}(t_k) - \tilde{x}(t_{k-1}))$$

D'après le lemme 4, les fonctions $(\tilde{x}(t_k) - \tilde{x}(t_{k-1}))$ sont à supports disjoints, donc :

$$\|\varphi(f)\| = \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|\ \|\tilde{x}(t_k) - \tilde{x}(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|(t_k-t_{k-1}) = \|f\|_{L^1}$$

On en déduit que φ se prolonge en une isométrie de $L^1[0,1]$ dans $L^1(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{A}},\tilde{P})$, qui prend ses valeurs dans le sous-espace engendré par $\tilde{C}$.

§ 6. DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Soit maintenant C un convexe faiblement compact de H^1, et soit T une contraction de C dans lui-même. On peut supposer C minimal pour T. Nous allons montrer que C est compact en norme, d'où il résulte que T admet un point fixe dans C, et par conséquent C est en fait réduit à un point.

D'après la proposition 1, après avoir effectué sur C une translation convenable, il existe une fonction mesurable G de module 1 sur le cercle unité du plan complexe telle que :

$$\forall\, x \in C, \quad G\,x \text{ est une fonction réelle.}$$

On est conduit à examiner les sous-espaces fermés X de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ (où $\mathbb{T}$ désigne le cercle unité du plan complexe, et $L^1_{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions intégrables à valeurs réelles) tels qu'il existe une fonction H de module 1 sur $\mathbb{T}$ telle que :

$$(*) \qquad \forall\, x \in X, \quad H\,x \in H^1.$$

Il n'est peut-être pas inutile de montrer un exemple de cette situation. Soit (a_n) une suite de points du disque unité ouvert, telle que $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$. On sait que le produit de Blaschke

$$B(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n}\,\frac{a_n - z}{(1-\bar{a}_n z)}$$

définit une fonction analytique telle que $|B(z)| < 1$ pour $|z| < 1$, dont la limite radiale satisfait

$$|B(e^{i\theta})| = 1 \quad \text{p.p.}$$

Remarquons maintenant que la fonction $\dfrac{(a_n - z)(1-\bar{a}_n z)}{z}$ est réelle sur $\mathbb{T}$. En effet

$$\frac{(a_n-e^{i\theta})(1-\bar{a}_n e^{i\theta})}{e^{i\theta}} = a_n e^{-i\theta} + \bar{a}_n e^{i\theta} - (1+|a_n|^2)$$

$$2(\alpha_n \cos\theta + \beta_n \sin\theta - (1+|a_n|^2)$$

si $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. Posons

$$x_n(e^{i\theta}) = \frac{1}{2(\alpha_n \cos\theta + \beta_n \sin\theta) - (1+|a_n|^2)}$$

La fonction x_n est réelle sur $\mathbb{T}$, et c'est la valeur sur le cercle de

$$x_n(z) = \frac{z}{(a_n-z)(1-\bar{a}_n z)}$$

On a donc

$$x_{n_o}(z).B(z) = \frac{|a_{n_o}|z}{a_{n_o}(1-\bar{a}_{n_o} z)^2} \cdot \prod_{n\neq n_o} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n-z}{(1-\bar{a}_n z)}$$

ce qui montre que $B.x_{n_o} \in H^1$ pour tout n_o. Le sous-espace X de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ engendré par la suite (x_n) est donc un exemple vérifiant (*) et qui est de dimension infinie.

Nous allons montrer que tout espace X vérifiant (*) possède la propriété de Schur, c'est-à-dire que si (x_n) est une suite dans X qui tend faiblement vers zéro, alors $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$.

Revenons au convexe minimal C. Posons :

$$X = \{x \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \; ; \; \bar{G}\, x \in H^1\}$$

L'espace X est un sous-espace fermé de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant (*).

L'ensemble G.C est un convexe faiblement compact de X, donc compact si nous savons que X a la propriété de Schur, et ceci termine la démonstration du théorème 2.

Soient donc $X \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ tel que $Hx \in H^1$, $\forall x \in X$, avec H de module 1, et (x_n) une suite tendant faiblement vers zéro dans X (donc (x_n) est équi-intégrable).

Nous utiliserons dans la démonstration la projection orthogonale P de L^2 sur H^2, ainsi que les opérateurs Q_n correspondant aux sommes de Fejér :

si $$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta}, \quad Pf = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\theta},$$

$$Q_n f = \sum_{k=-2n}^{2n} \left(1 - \frac{|k|}{2n+1}\right) a_k e^{ik\theta}$$

On sait que P opère continument de L^1 dans L^p pour tout $p < 1$. Pour tout n et tout $q \in [1,\infty]$, Q_n est un opérateur de norme ≤ 1 de L^q dans L^q (parce que Q_n est une convolution par une probabilité) et de plus pour $1 \leq q < \infty$

$$f \in L^q(\mathbb{T}) \Rightarrow \|f - Q_n f\|_q \longrightarrow 0.$$

Puisque la suite (Hx_n) tend faiblement vers zéro, ses coefficients de Fourier tendent simplement vers zéro et on peut écrire (en remplaçant au besoin la suite (x_n) par une sous-suite)

$$Hx_n = e^{in\theta} b_n + c_n ,$$

avec $b_n \in H^1$ et $\lim_n \|c_n\|_1 = 0$. Remarquons que la suite (b_n) est encore équi-intégrable. Puisque x_n est une fonction réelle

$$x_n = e^{in\theta} \overline{H} b_n + \overline{H} c_n = e^{-in\theta} H\overline{b}_n + H\overline{c}_n$$

On en déduit :

$$b_n = e^{-2in\theta} H^2\overline{b}_n + r_n , \text{ avec } \lim_n \|r_n\|_1 = 0$$

Posons $H^2 = Q_{n-1}(H^2) + L_n$. On a $\|L_n\|_\infty \leq 2$ pour tout n et $\|L_n\|_q \to 0$ pour $q < \infty$, ce qui revient à dire que (L_n) tend vers 0 en probabilité. En notant que

$$P(e^{-2in\theta} Q_{n-1}(H^2)\overline{b}_n) = 0$$

on voit que

$$b_n = P(b_n) = P(e^{-2in\theta} L_n \overline{b}_n + r_n)$$

Comme $(\overline{b}_n)$ est équi-intégrable et que (L_n) tend vers zéro en probabilité, avec $\|L_n\|_\infty \leq 2$, on a $\lim_n \|L_n \bar{b}_n\|_1 = 0$.

Puisque P est continu de L^1 dans L^p pour $p < 1$, on a :

$$\lim_n \|b_n\|_p = 0 \ , \ \forall \ p \in \,]0,1[\ .$$

Mais puisque (b_n) est équi-intégrable cela entraine $\lim_n \|b_n\|_1 = 0$, donc $\lim_n \|x_n\|_1 = 0$ et nous avons démontré que X possède la propriété de Schur.

<u>Question</u> : Peut-on caractériser les sous-espaces X de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ vérifiant $(*)$? Un tel espace est-il isomorphe à un sous-espace de ℓ^1 ? (ce qui impliquerait immédiatement le résultat que nous venons de démontrer).

On peut poser le problème dans une autre direction : étant donnée une fonction mesurable H de module 1 sur $\mathbb{T}$, décrire

$$X_H = \{ x \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \ ; \ Hx \in H^1 \}$$

Un cas facile est le cas où $H \in H^\infty$ et où H admet un nombre fini n de zéros dans le disque unité. Dans ce cas

$$H = \left(\prod_{i=1}^{n} (Z - a_i)\right) . \ h$$, où h ne s'annule pas dans le disque unité.

Posons
$$r = \frac{\prod_{i=1}^{n} (Z-a_i)(1-\bar{a}_i Z)}{Z^n}$$

Si $Hx \in H^1$, on voit que $Z^n \, rx = \frac{f}{h}$, avec $f \in H^1$.

Comme rx est réelle sur $\mathbb{T}$, on a nécessairement

$$rx = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos k\theta + \sum_{k=1}^{n} d_k \sin k\theta,$$

et inversement toute fonction x de cette forme est dans X_H , donc X_H est de dimension $(2n + 1)$.

§ 7 <u>APPENDICE. LE CAS DE</u> c_o :

Les méthodes introduites précédemment permettent de démontrer facilement le résultat suivant (cf. Odell et Sternfeld, a fixed point theorem in c_o)

<u>Théorème</u> : Toute contraction d'un convexe faiblement compact de c_o admet un point fixe.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer C minimal pour la contraction T, et $\delta(C) = 1$. Soit (x_n) une suite de points de C telle que $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$. On peut supposer que (x_n) tend faiblement vers zéro. On a alors $\lim_n \|x_n\| = 1$ d'après le lemme 2. On peut construire une sous-suite n_k tendant rapidement vers l'infini telle que

$$\| \, |x_k| \wedge |x_{n_k}| \, \| \leq 1/k, \text{ ce qui entraine } \lim_k \|x_k - x_{n_k}\| = 1.$$

Les points $\tilde{x} = (x_k)$ et $\tilde{y} = (x_{n_k})$ sont deux points fixes de T dans $\tilde{C}$, tels que $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = 1$. Si $\tilde{z} = (z_k)$ est un quasi-milieu de $[\tilde{x},\tilde{y}]$, fixe pour T, on aura $\lim_{\substack{k\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|z_k\| = 1$ d'après le lemme 2 et

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_k - z_k\| = \lim_{\substack{k\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|x_{n_k} - z_k\| = 1/2$$

Mais ceci est impossible car

$$|z_k| \leq |z_k - x_k| \vee | z_k - x_{n_k}| + |x_k| \wedge |x_{n_k}|$$

ce qui entraine $\lim_{\substack{k\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|z_k\| = 1/2$.

On en déduit $\delta(C) = 0$.