Théorie spectrale et opérateurs sur un espace HI réel

B. Maurey

Un espace de Banach HI (« HI » étant abréviation de l'expression « héréditairement indécomposable ») ne contient aucune somme directe topologique de deux sous-espaces fermés de dimension infinie. Ces espaces HI, bien que très pathologiques — il en existe maintenant un bon nombre d'exemples ([G–M], [Fer1], [A–D], [Fer4] entre autres, sans oublier l'espace d'Argyros–Haydon [A–H] — ont cependant montré quelques traits de simplicité qui ont intéressé plusieurs auteurs. Un de ces traits est la « rareté » des opérateurs linéaires agissant sur ces espaces : par exemple, les opérateurs sur un espace HI complexe ont un spectre au plus dénombrable qui ne peut s'accumuler qu'en un point unique (on sera plus précis ci-dessous). Cette rareté a été poussée à un point extrême par S. Argyros et R. Haydon [A–H], qui ont livré un exemple d'espace où tout opérateur linéaire borné est la somme d'un opérateur compact K et d'un multiple scalaire de l'identité, $\mathrm{T} = \mathrm{K} + \lambda \mathrm{Id}$. La rareté conduit à des formes de *rigidité* : ainsi, sur un espace X qui est un parent de la famille HI, Timothy Gowers [Gowe] a montré qu'il n'existe pas d'opérateur qui rende l'espace entier X isomorphe à un de ses hyperplans (qui de leur côté, sont clairement tous isomorphes entre eux) ; on a montré un peu plus tard qu'un espace HI n'est en fait isomorphe à aucun sous-espace strict [G–M, Theorem 21].

Une question d'homotopie

On va s'intéresser à une rigidité un peu différente en examinant la question suivante, initiée et étudiée par Noé de Rancourt [deR1, deR2] : si X est un espace HI réel, est-il possible que les opérateurs de réflexion sur X soient dans la composante connexe de l'identité Id_{X} dans le groupe GL(X) des isomorphismes de X ? Rappelons qu'une *réflexion* R sur un espace vectoriel réel X est un opérateur dans GL(X) qui, dans une décomposition $\mathrm{X} = \mathbb{R}x_0 \oplus \mathrm{Y}$, où x_0 est non nul et où Y est un hyperplan supplémentaire de $\mathbb{R}x_0$, a la forme $\mathrm{R}(x_0) = -x_0$ et $\mathrm{R}(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$. Si la réponse est oui, il existera un chemin continu dans GL(X) allant de Id_{X} à R ; dans la mesure où ce chemin produit une déformation continue de la fonction $f : \{0\} \to \mathrm{GL}(\mathrm{X})$ définie par $f(0) = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ vers la fonction g définie par $g(0) = \mathrm{R}$, on dira aussi dans cette situation que la réflexion R est *homotope* à l'identité dans GL(X).

Dans un espace de Hilbert réel H (de dimension infinie), les réflexions sont homotopes à l'identité dans GL(H). Tout d'abord, Id_{H} est homotope à $-\mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$: en regroupant les vecteurs d'une base orthonormée de H en paires (u_i, v_i), $i \in \mathrm{I}$, on peut définir $\rho \in \mathrm{GL}(\mathrm{X})$ tel que $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, un opérateur « de rotation d'un quart de tour », en posant

$$\rho(u) = v \quad \text{et} \quad \rho(v) = -u$$

simultanément dans tous les sous-espaces de dimension 2 de H engendrés par l'une des paires (u_i, v_i), puis procéder à la rotation ρ_θ définie sur H par

$$\rho_\theta = \cos(\theta)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}} + \sin(\theta)\,\rho,$$

ce qui conduit de Id_{H} à $-\mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$ quand θ varie de 0 à π, en passant par ρ quand $\theta = \pi/2$. Ensuite, on écrit $\mathrm{H} = \mathbb{R}x_0 \oplus \mathrm{H}_1$ et on repasse de $-\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1}$ à $\mathrm{Id}_{\mathrm{H}_1}$ en appliquant à H_1 ce qu'on a expliqué avant pour H, tout en laissant x_0 fixe : on arrive ainsi finalement à une réflexion R telle que $\mathrm{R}(x_0) = -x_0$. Ce découpage de la base orthonormée en paires est une façon de rappeler que l'espace de Hilbert H est isomorphe à son carré $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$; sur ce carré $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$, on peut définir directement ρ par $\rho(x, y) = (-y, x)$; de plus H est isomorphe à ses hyperplans, ce qui donne la deuxième rotation. L'argument d'homotopie se généralise donc facilement à tout espace de Banach X isomorphe à un carré $Y \times Y$, ou contenant un sous-espace complémenté qui soit un carré, et de plus isomorphe à ses hyperplans : on trouve ainsi tous les espaces ℓ^p, puis L^p, les classes de Schatten, ...

On va rappeler dans la section suivante un certain nombre de notions et de résultats classiques : l'auteur a pris un malin plaisir à récrire en grand détail les preuves de ces résultats, qu'on peut pourtant lire un peu partout (peut-être pas en français ?). À partir de la section 2, on traitera les questions posées ci-dessus. On prouvera le résultat de Noé de Rancourt [deR2], selon lequel les réflexions d'un espace HI réel X ne sont pas homotopes à l'identité (théorème 1), ainsi qu'un résultat qui en est proche (lemme 2.6), que nous allons commenter maintenant.

À partir de l'exemple hilbertien donné plus haut, on peut penser que la question d'homotopie dans $\mathcal{L}(X)$, X Banach réel, n'est pas étrangère à l'existence d'applications $\rho \in \mathcal{L}(X)$ telles que $\rho^2 = -\mathrm{Id}_X$. Par ailleurs, une telle ρ permet de définir une structure complexe sur l'espace réel X, en posant $\mathrm{i}x = \rho(x)$ pour tout $x \in X$. Enfin, l'exemple hilbertien a utilisé deux telles rotations d'un quart de tour, l'une sur l'espace de Hilbert entier H et l'autre sur un hyperplan de H. À l'opposé de cette situation, le lemme 2.6 indique qu'il ne peut exister une structure complexe à la fois sur un espace HI réel X et sur un hyperplan Y de X, autrement dit, il ne peut exister à la fois $\rho \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\rho^2 = -\mathrm{Id}_X$ et $\rho' \in \mathcal{L}(Y)$ tel que $\rho'^2 = -\mathrm{Id}_Y$.

Si X est un espace réel et si on dispose de deux rotations $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}(X)$ telles que $\rho_j^2 = -\mathrm{Id}_X$, $j = 1, 2$, et telles que $\rho_1\rho_2 = -\rho_2\rho_1$, on peut munir X d'une « structure quaternionique », une structure d'espace vectoriel sur le corps (gauche) $\mathbb{H}$ des quaternions (voir la section 4). On montrera au théorème 2 une généralisation du lemme 2.6 : une structure quaternionique ne peut pas exister à la fois sur un espace HI réel X et sur un sous-espace de codimension 2 de X.

1. Préliminaires

Les *espaces* seront des espaces de Banach réels ou complexes *de dimension infinie*, les *sous-espaces* seront des sous-espaces vectoriels fermés, qui seront sauf mention contraire de dimension infinie (*d.d.i* en abrégé) ; les *opérateurs* seront linéaires bornés, l'ensemble des opérateurs d'un espace de Banach X dans lui-même est noté $\mathcal{L}(X)$; les *sommes directes* $Y = Y_0 \oplus Y_1 \subset X$ de deux sous-espaces Y_0, Y_1 d'un espace de Banach X seront des sommes directes topologiques, c'est-à-dire qu'il existera des opérateurs de projection de Y sur chaque Y_j, $j = 0, 1$; autrement dit, on aura dans ce cas $Y_0 \oplus Y_1 \simeq Y_0 \times Y_1$. Une *algèbre* sera une algèbre de Banach $\mathfrak{A}$ avec unité $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, et bien sûr telle que $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}} \neq 0$. Si $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Banach complexe et $a \in \mathfrak{A}$, le *spectre de* a, qu'on notera $\mathrm{Sp}(a)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \mathbf{1}_{\mathfrak{A}} - a$ ne soit pas inversible dans $\mathfrak{A}$; le spectre est un compact non vide de $\mathbb{C}$. On travaillera principalement, mais pas uniquement, avec l'algèbre $\mathcal{L}(X)$.

Il sera commode d'introduire (entre nous) la terminologie suivante : si X est un espace de Banach réel ou complexe et si $T \in \mathcal{L}(X)$, on dira que T est *infiniment singulier* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace d.d.i $Y \subset X$ tel que la restriction $T_{\restriction Y}$ de T à Y ait une norme $< \varepsilon$ (la restriction $T_{\restriction Y}$ est considérée comme un opérateur de Y dans X) ; au contraire, T sera dit *finiment singulier* s'il existe un sous-espace $Y^{(0)}$ de X, de *codimension finie* dans X tel que l'opérateur T induise un isomorphisme de $Y^{(0)}$ sur l'image $TY^{(0)}$; dans ce cas, l'image TX de T est fermée, puisqu'elle est égale à la somme de $TY^{(0)}$ et d'un sous-espace de dimension finie (voir le lemme 1.2).

L'opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ induit un isomorphisme d'un sous-espace Y sur l'image TY si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\|T(y)\| \geqslant c\|y\|$ pour tout $y \in Y$; clairement, tout $T' \in \mathcal{L}(X)$ tel que $\|T' - T\| < c$ induit encore un isomorphisme sur le même sous-espace Y. En particulier, l'ensemble des opérateurs finiment singuliers est ouvert dans $\mathcal{L}(X)$. Si Y est un sous-espace d.d.i de X, on notera $\mathrm{Isom}{\restriction}(Y)_X$ l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{L}(X)$ qui induisent un isomorphisme de Y sur l'image TY.

Tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ vérifie l'une des deux possibilités « finiment » ou « infiniment » singulier (voir le lemme 1.1), qui sont clairement incompatibles. Si Z est un espace de Banach complexe et si $A \in \mathcal{L}(Z)$, on dira (toujours entre nous) que λ est une *valeur spectrale infiniment singulière* si $A - \lambda\, \mathrm{Id}_Z$ est infiniment singulier ; d'après le lemme 1.4, il existe au moins une valeur infiniment singulière pour tout $A \in \mathcal{L}(Z)$.

On notera $\mathcal{G}_{/F}(X)$ la famille des sous-espaces fermés de X qui sont de codimension finie dans X, et $\mathcal{G}_\infty(X)$ la famille des sous-espaces fermés de X qui sont de dimension infinie ; la famille $\mathcal{G}_{/F}(X)$ est stable par intersection finie ; si $Y^{(0)} \in \mathcal{G}_{/F}(X)$ et $Y \in \mathcal{G}_\infty(X)$, l'intersection $Y^{(0)} \cap Y$ est de codimension finie dans Y, en particulier, cette intersection est de dimension infinie. On peut résumer symboliquement par

$$\mathcal{G}_{/F}(X) \cdot \mathcal{G}_{/F}(X) \subset \mathcal{G}_{/F}(X)\,; \quad \mathcal{G}_{/F}(X) \cdot \{Y\} \subset \mathcal{G}_{/F}(Y)\,; \quad \mathcal{G}_{/F}(X) \cdot \mathcal{G}_\infty(X) \subset \mathcal{G}_\infty(X),$$

où pour deux classes $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ de parties de X, on a posé

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}\}.$$

On aura à travailler avec le complexifié $X^{\mathbb{C}}$ d'un espace de Banach réel X ; on peut représenter $X^{\mathbb{C}}$ comme étant le produit $X \times X$, en y définissant la multiplication par les scalaires complexes à partir de $\mathrm{i}\,(x, y) = (-y, x)$ pour tout $z = (x, y) \in X \times X$. Si $T \in \mathcal{L}(X)$, on le « complexifie » en posant

$$T^{\mathbb{C}} z = (Tx, Ty)$$

pour tout $z = (x, y) \in X^{\mathbb{C}}$; l'opérateur $T^{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Quand X est un espace réel et quand $T \in \mathcal{L}(X)$, le spectre du complexifié $A = T^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(X^{\mathbb{C}})$ est invariant par conjugaison, et si λ est une valeur spectrale infiniment singulière pour $T^{\mathbb{C}}$, le complexe conjugué $\overline{\lambda}$ est aussi valeur spectrale infiniment singulière, voir les détails sur la complexification dans la sous-section 1.3.

Un espace X est *héréditairement indécomposable* (en abrégé : HI) s'il ne contient aucune somme directe de deux sous-espaces (d.d.i), ce qui revient à dire que pour tous sous-espaces $Y_0, Y_1 \in \mathcal{G}_\infty(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe des points y_0, y_1 des sphères unité de Y_0, Y_1 tels que $\|y_1 - y_0\| < \varepsilon$. Disons les choses autrement, pour bien insister sur cette bizarrerie : si on sélectionne, même avec le soin le plus méticuleux, deux suites croissantes d'espaces de dimension finie (E_n), (F_n) de X, disons $\dim E_n = \dim F_n = n$, on ne pourra pas empêcher, quand n deviendra grand, que des points de la sphère de E_n se rapprochent de points de la sphère de F_n.

On désignera par $\mathcal{S}(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(X)$ formé des opérateurs *strictement singuliers*, les opérateurs S dont la restriction à un quelconque sous-espace $Y \in \mathcal{G}_\infty(X)$ n'est jamais un isomorphisme de Y sur l'image SY : pour tout sous-espace Y de X, si Y est de dimension infinie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in Y$ tel que $\|S(y)\| < \varepsilon\|y\|$. Les opérateurs de rang fini, et plus généralement les opérateurs compacts, sont dans $\mathcal{S}(X)$, mais l'adjoint $S^* \in \mathcal{L}(X^*)$ de $S \in \mathcal{S}(X)$ n'est pas toujours dans $\mathcal{S}(X^*)$. On notera $T_0 \sim_s T_1$ quand $T_1 - T_0$ est strictement singulier. L'ensemble $\mathcal{S}(X)$ est un idéal bilatère fermé dans l'algèbre $\mathcal{L}(X)$, voir la proposition 1 dans la sous-section 1.1.

On considérera l'algèbre quotient $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(X) = \mathcal{L}(X)/\mathcal{S}(X)$ et l'application quotient $\pi_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{L}(X)$ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(X)$; on notera $\mathbf{1}_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{Id}_X)$. Quand X est complexe et de dimension infinie, $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(X)$ est une algèbre de Banach complexe à laquelle s'appliquent les théorèmes concernant le spectre, en particulier sa non-vacuité ; quand $X = E$ est de dimension finie, la définition de strictement singulier n'a pas grand sens, cependant l'interprétation de l'implication comme « non A ou B » nous force à dire que $\mathcal{S}(E) = \mathcal{L}(E)$ dans ce cas ; alors $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(E) = \{0\}$ n'est pas une « vraie » algèbre de Banach, il y aura un point plus loin où il faudra s'en souvenir.

Quand X est un espace HI complexe et $T \in \mathcal{L}(X)$, il existe (comme toujours) une valeur spectrale infiniment singulière $\lambda \in \mathbb{C}$, mais de plus elle est *unique* ; l'unicité découle immédiatement de la propriété HI : si $T \sim \lambda_0 \mathrm{Id}_X$ sur $Y_0 \in \mathcal{G}_\infty(X)$ et $T \sim \lambda_1 \mathrm{Id}_X$ sur $Y_1 \in \mathcal{G}_\infty(X)$, la proximité de certains points des sphères unité de Y_0 et Y_1 implique l'égalité $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$. En fait, si λ est cette valeur spectrale infiniment singulière, alors l'opérateur $T - \lambda \mathrm{Id}_X$ est strictement singulier d'après le corollaire 1.1. Tous les autres points — éventuels — du spectre de T sont isolés dans le spectre et correspondent à des valeurs propres de multiplicité finie : pour un tel $\mu \in \mathrm{Sp}(T)$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$X = \ker(T - \mu \mathrm{Id}_X)^k \oplus (T - \mu \mathrm{Id}_X)^k(X), \tag{1}$$

et le *sous-espace caractéristique* $F_\mu(T) := \ker(T - \mu \mathrm{Id}_X)^k$ est de dimension finie (voir la sous-section 1.2.2). On dit que $T - \lambda \mathrm{Id}_X$ est un *opérateur de Riesz* (voir par exemple [Aien], Th. 3.111) : sa théorie spectrale est analogue à la théorie de Riesz pour les opérateurs compacts.

Quand X est un espace HI réel, son complexifié $X^{\mathbb{C}}$ n'est pas HI-complexe en général (au « niveau réel », $X^{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{R}$-isomorphe à $X \times X$ et n'est donc certainement pas HI) ; cependant, si $T \in \mathcal{L}(X)$, il y a pour $T^{\mathbb{C}}$, ou bien une valeur spectrale infiniment singulière réelle *unique* $\lambda \in \mathbb{R}$, ou bien un *couple unique* $(\lambda, \overline{\lambda})$ de valeurs spectrales infiniment singulières conjuguées, quand $\lambda \notin \mathbb{R}$ (voir [G–M], Lemma 20, ou le corollaire 1.4 ci-dessous) ; à nouveau, tous les autres points (éventuels) du spectre de $T^{\mathbb{C}}$ sont isolés dans le spectre et correspondent à des valeurs propres de multiplicité finie. Si X est un espace HI réel, on sait d'après V. Ferenczi [Fer2] que l'algèbre quotient $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou aux quaternions $\mathbb{H}$, elle est donc de dimension réelle $1, 2$ ou 4. On posera $d_s(X) = \dim \mathcal{L}_{\mathcal{S}}(X)$, qu'on appellera la *dimension singulière* de X. Dans le cas où X est complexe, $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ d'après ce qu'on a dit plus haut. Ferenczi [Fer4] a construit des exemples qui montrent que dans le cas réel, les deux valeurs $d_s(X) = 2, 4$ sont possibles (on avait déjà un exemple où $d_s(X) = 1$ dans [G–M, Lemma 22]).

Stratégie et commentaires

Revenons, de manière très heuristique, à la discussion du problème *d'homotopie* qui a été posé précédemment. Si X est un espace HI réel et si (T_t) est un chemin d'isomorphismes de X, on peut imaginer suivre une sorte de « signe du déterminant » tant que $T_t^{\mathbb{C}}$ n'admet pas de valeur spectrale infiniment singulière λ qui soit un réel < 0, l'idée étant que Id_X donne un signe positif et les réflexions un signe négatif : on ne pourra pas passer de l'un à l'autre d'une façon continue. Quand λ est une valeur spectrale infiniment singulière de $T_t^{\mathbb{C}}$

qui n'est pas réelle, le conjugué $\overline{\lambda}$ est une autre valeur spectrale infiniment singulière et on peut considérer que le couple $(\lambda, \overline{\lambda})$ donne une contribution positive au « déterminant » — comme en dimension deux — même si la « dimension propre » est infinie ; le « signe » final est donné par la parité de la somme des dimensions des sous-espaces caractéristiques de dimension finie à valeur propre < 0 (lemme 3.1 et corollaire 3.1). On pourrait essayer de traiter les valeurs infiniment singulières réelles négatives par continuité à partir des valeurs complexes, mais l'exemple qu'on a décrit dans l'espace de Hilbert montre qu'on pourrait tendre vers $-\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ de deux façons différentes, avec des « signes » opposés : c'est cette éventualité qu'il faudra exclure quand X est un espace HI réel.

Soit X un espace de Banach réel. Désignons par $\mathcal{R}(\mathrm{X})$ l'ensemble (peut-être vide) des opérateurs $\rho \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ tels que $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$. On a alors $\rho^4 = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, il est raisonnable de dire que ρ est un *quart de tour*, voir la section 2. On dira que X est de type $\mathcal{R}_0$ s'il existe un « quart de tour » $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$, et qu'il est de type $\mathcal{R}_1$ s'il existe un quart de tour $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X} \oplus \mathbb{R})$: le type $\mathcal{R}_1$ pour X équivaut à dire que les hyperplans de X sont de type $\mathcal{R}_0$ (rappelons que les hyperplans de X sont isomorphes entre eux). Dans le cas $\mathcal{R}_1$, on peut prolonger $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{Y})$, défini sur un hyperplan Y de X, en $\rho \in \mathrm{GL}(\mathrm{X})$, et dans les deux cas $\mathcal{R}_0$ ou $\mathcal{R}_1$, l'image $r = \pi_{\mathcal{S}}(\rho)$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ vérifie $r^2 = -1$. On notera $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ l'ensemble de ces r dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ qui vérifient $r^2 = -1$. Si X est de type $\mathcal{R}_0$ et si $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$, on peut construire le chemin

$$\rho_\theta = \cos(\theta)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} + \sin(\theta)\,\rho$$

dans $\mathrm{GL}(\mathrm{X})$, qui va de Id_{X} à $-\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ en passant par ρ, quand θ décrit $[0, \pi]$. Dans le cas $\mathcal{R}_1$, on aura pour tout hyperplan Y de X une homotopie entre Id_{Y} et $-\mathrm{Id}_{\mathrm{Y}}$, qui permet d'obtenir une homotopie entre Id_{X} et $-\mathrm{R}$, si R est une réflexion de X. Si X est à la fois de type $\mathcal{R}_0$ et de type $\mathcal{R}_1$, les réflexions sont homotopes à l'identité dans $\mathrm{GL}(\mathrm{X})$: on peut répéter l'explication qu'on a donnée pour un espace de Hilbert.

L'existence de $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ fournit une *structure complexe* sur l'espace réel X, en posant $\mathrm{i}x = \rho(x)$ pour $x \in \mathrm{X}$; les sous-espaces complexes de cette structure complexe sont les $\mathbb{R}$-sous-espaces qui sont invariants par ρ, les opérateurs complexe-linéaires sont ceux qui commutent avec ρ. Ce point de vue des structures complexes, étudié par Ferenczi [Fer4] et Ferenczi–Galego [F–G] ne sera pas fondamental ici, il apparaîtra cependant dans la section 4, et nous emprunterons des outils dans [F–G]. Nous aurons une question commune, formulée en termes différents : que peut-on dire de la famille $\mathcal{R}(\mathrm{X})$?

Remarque. Si X est un espace HI réel et si partant de $\mathrm{T}_0 \sim_s \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ on peut arriver à $\mathrm{T}_1 \sim_s -\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ par un chemin continu (T_t) dans $\mathrm{GL}(\mathrm{X})$, on devra passer par un cas où le couple de valeurs spectrales infiniment singulières de $\mathrm{T}_t^{\mathbb{C}}$, qui varie continûment, sera de la forme $(b\mathrm{i}, -b\mathrm{i})$, où b est un réel non nul, d'où $\mathrm{T}_t^2 \sim_s -b^2\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$, et T_t/b sera un « quart de tour » dans X. Supposons que $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ sont des isomorphismes de X tels que $\mathrm{A}_0^2 \sim_s -\mathrm{Id}$ et $\mathrm{A}_1^2 \sim_s -\mathrm{Id}$, induisant des éléments de $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$. Alors $(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1)(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0) \sim_s -\mathrm{A}_0^2 \sim_s \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$. Les valeurs spectrales infiniment singulières de $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0$ sont donc inverses l'une de l'autre. Si $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0 \sim \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ sur un sous-espace Y de dimension infinie, si $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0(y) \sim \lambda y$ et si on pose $y = \mathrm{A}_1(x)$, alors $\mathrm{A}_1(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 x) \sim \lambda \mathrm{A}_1(x) = \mathrm{A}_1(\lambda x)$, donc $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1(x) \sim \lambda x$ pour $x \in \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{Y}$. Les spectres essentiels de $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0$ sont à la fois identiques, stables par conjugaison et inverses, les valeurs spectrales possibles sont de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. On peut voir qu'elles sont toutes réalisables lorsque $d_s(\mathrm{X}) = 4$. La discussion précédente dans un Hilbert H nous a (presque) montré un exemple de $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ distinctes dans $\mathcal{R}(\mathrm{H})$:

on aurait pu prendre $\mathrm{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$, définir A_0 qui travaille sur les paires (e_{2n}, e_{2n+1}), $n \in \mathbb{Z}$, et A_1 qui travaille sur les paires (e_{2n-1}, e_{2n}) ; ces deux rotations dans H engendrent un shift, pour lequel tout le cercle unité du plan complexe est formé de valeurs spectrales infiniment singulières. Suivant cette idée, on essaiera de montrer que la présence de A_0 et A_1 dans $\mathcal{R}(\mathrm{X})$ qui soient d'un type approchant entraîne une richesse dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ qui est impossible pour un espace HI réel.

1.1. *Opérateurs strictement singuliers, opérateurs de Fredholm*

Une partie des propriétés élémentaires des opérateurs finiment ou infiniment singuliers T définis sur un espace de Banach X, réel ou complexe, ne dépend que de la semi-norme f sur X définie en posant $f(x) = \|\mathrm{T}(x)\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Rappelons que si f est une semi-norme continue sur X, il existe une plus petite constante, qu'on notera $k(f)$, telle que $f(x) \leqslant k(f)\,\|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Pour une semi-norme f continue sur X, on dira que f est *finiment singulière* sur X s'il existe $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ ($\mathrm{Y}^{(0)}$ de codimension finie dans X), et $c > 0$ tels que $f(y_0) \geqslant c\,\|y_0\|$ pour tout $y_0 \in \mathrm{Y}^{(0)}$; on dira que f est *infiniment singulière* sur X si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace $\mathrm{Y}_1 \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ (Y_1 de dimension infinie), tel que $f(y_1) \leqslant \varepsilon\,\|y_1\|$ pour tout $y_1 \in \mathrm{Y}_1$. Ces deux propriétés sont clairement incompatibles puisque $\mathrm{Y}^{(0)} \cap \mathrm{Y}_1$ est toujours différent de $\{0\}$ et qu'on peut prendre $\varepsilon < c$.

Lemme 1.1 (un principe simple)**.** *Toute semi-norme continue sur* X *est ou bien finiment singulière, ou bien infiniment singulière. En conséquence, chaque opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *est ou bien finiment singulier, ou bien infiniment singulier.*

Comme la famille $\mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ est stable par intersection finie, il est clair que f est finiment singulière sur X si et seulement si sa restriction $f_{\restriction \mathrm{Y}^{(0)}}$ à un quelconque sous-espace $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ est finiment singulière sur $\mathrm{Y}^{(0)}$. Pour la vérification du lemme, on va s'écarter légèrement du chemin habituel qui passe par l'existence de *suites basiques* dans tout sous-espace d.d.i, existence déjà mentionnée par Banach dans son livre [Bana] de 1932, sous la forme d'une affirmation (sans preuve) dans les remarques sur le § 3 du chapitre VII, à la fin du livre : *tout espace de Banach d.d.i admet un sous-espace d.d.i muni d'une base de Schauder.*

Preuve. Si la semi-norme f n'est pas finiment singulière sur X, on a

$$\inf\{f(y) : y \in \mathrm{Y}^{(0)},\ \|y\| = 1\} = 0$$

pour tout sous-espace *de codimension finie* $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$; on peut alors construire de proche en proche des vecteurs $(x_i)_{i \geqslant 0}$ dans X et $(x_i^*)_{i \geqslant 0}$ dans le dual X^*, tous de norme 1, tels que $x_i^*(x_i) = 1$, $f(x_i) < \varepsilon 4^{-i-1}$ et $x_i^*(x_k) = 0$ quand $k > i$; en effet, si on considère

$$\mathrm{X}^{(0)} = \mathrm{X}, \quad \mathrm{X}^{(i)} = \bigcap_{j<i} \ker x_j^* \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X}) \quad \text{si } i > 0,$$

on peut trouver par récurrence, pour tout $i \geqslant 0$, un vecteur $x_i \in \mathrm{X}^{(i)}$ de norme 1 tel que $f(x_i) < \varepsilon 4^{-i-1}$, puis une forme linéaire x_i^* de norme 1 telle que $x_i^*(x_i) = 1$. On prendra pour $\mathrm{Y}_1 \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ l'espace vectoriel fermé engendré par la suite des vecteurs $(x_i)_{i \geqslant 0}$; pour tout $y = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}} c_i x_i \in \mathrm{Y}_1$ de norme un, on dispose d'un système triangulaire d'inégalités

$$\Bigl| x_i^*\Bigl(\sum_{0 \leqslant j \leqslant i} c_j x_j \Bigr) \Bigr| = |x_i^*(y)| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant i \leqslant \mathrm{N},$$

qui commence avec $|c_0| = |x_0^*(y)| \leqslant 1$, puis $|c_0 x_1^*(x_0) + c_1| \leqslant 1$ qui implique $|c_1| \leqslant 2$, $|c_0 x_2^*(x_0) + c_1 x_2^*(x_1) + c_2| \leqslant 1$ qui implique $|c_2| \leqslant 1 + 1 + 2 = 4$, et plus généralement par récurrence $|c_i| \leqslant 1 + 1 + 2 + \cdots + 2^{i-1} = 2^i$. Finalement

$$f(y) \leqslant \sum_{i \geqslant 0} f(c_i x_i) = \sum_{i \geqslant 0} |c_i| f(x_i) \leqslant \varepsilon \sum_{i \geqslant 0} 2^i 4^{-i-1} = \varepsilon/2,$$

et par conséquent $k(f_{\restriction \mathrm{Y}_1}) < \varepsilon$. □

On étend la notion d'opérateur « strictement singulier » aux semi-normes : une semi-norme f continue sur X est *strictement singulière sur* X si pour tout sous-espace d.d.i Y de X, on a

$$\inf\{f(y) : y \in \mathrm{Y}, \|y\| = 1\} = 0.$$

Il est évident que la restriction de f strictement singulière à un sous-espace $\mathrm{Y}_1 \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ quelconque est encore strictement singulière sur Y_1.

Corollaire 1.1. *Soient* X *un espace de Banach (d.d.i) et* f *une semi-norme continue sur* X*. Si* f *est strictement singulière sur* X*, elle est infiniment singulière ; si* X *est HI, la réciproque est vraie.*

Preuve. Si f est strictement singulière sur X de dimension infinie, elle ne peut clairement pas être finiment singulière, elle est donc infiniment singulière d'après le *principe simple* du lemme 1.1.

Si X est HI, $\varepsilon > 0$ et si f est une semi-norme infiniment singulière sur X, il existe un sous-espace $\mathrm{Y}_0 \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ tel que $f(y_0) \leqslant \varepsilon \|y_0\|$ pour tout $y_0 \in \mathrm{Y}_0$. Si Y_1 est un autre sous-espace d.d.i de X, il existe par la propriété HI deux vecteurs $y_0 \in \mathrm{Y}_0$, $y_1 \in \mathrm{Y}_1$ tous deux de norme 1 et tels que $\|y_1 - y_0\| < \varepsilon/(1 + k(f))$, donc $f(y_1 - y_0) < \varepsilon$ et $f(y_1) < 2\varepsilon$: ainsi, f est strictement singulière sur X. □

Le lemme qui suit s'adresse aux opérateurs linéaires.

Lemme 1.2. *Soient* $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1$ *deux espaces de Banach réels ou deux espaces de Banach complexes ; soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ *un opérateur finiment singulier, c'est-à-dire que la semi-norme* $f(x) = \|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{X}_1}$ *est finiment singulière sur* X_0*.*

i. La restriction $\mathrm{T}_{\restriction \mathrm{Y}}$ *de* T *à un sous-espace* $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X}_0)$ *quelconque est finiment singulière de* Y *dans* X_1*.*

ii. L'image TY *de tout sous-espace fermé* Y *de* X_0 *est fermée dans* X_1*.*

iii. Si la suite (x_n) *est bornée dans* X_0 *et si* $(\mathrm{T}(x_n))$ *converge dans* X_1*, il existe une sous-suite* (x_{n_k}) *qui converge dans* X_0*.*

Preuve. Par définition, il existe $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X}_0)$ tel que T induise un isomorphisme de $\mathrm{Y}^{(0)}$ sur $\mathrm{TY}^{(0)}$. Si $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$, alors $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y} \cap \mathrm{Y}^{(0)}$ est de codimension finie dans Y et T induit encore un isomorphisme sur Y_1, donc $\mathrm{T}_{\restriction \mathrm{Y}}$ est finiment singulier sur Y.

Pour *ii*, il suffit de prendre $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_0$ d'après le point *i*. On écrit $\mathrm{X}_0 = \mathrm{Y}^{(0)} \oplus \mathrm{E}$, où $\dim \mathrm{E} < \infty$. Alors $\mathrm{TX}_0 = \mathrm{TY}^{(0)} + \mathrm{TE}$, on peut ensuite trouver $\mathrm{F} \subset \mathrm{TE}$ de dimension finie tel que $\mathrm{TX}_0 = \mathrm{TY}^{(0)} \oplus \mathrm{F}$. L'image TX_0 est fermée en tant que somme directe d'un sous-espace fermé $\mathrm{TY}^{(0)}$ et d'un sous-espace de dimension finie.

Supposons que (x_n) soit bornée dans X_0 et $(\mathrm{T}(x_n))$ convergente dans X_1. On écrit $x_n = y_n + e_n$, $y_n \in \mathrm{Y}^{(0)}$ et $e_n \in \mathrm{E}$; la somme $\mathrm{Y}^{(0)} \oplus \mathrm{E}$ étant directe et la suite (x_n) bornée, (e_n) est une suite bornée en dimension finie, elle admet donc une sous-suite convergente (e_{n_k}). Alors $\mathrm{T}(y_{n_k}) = \mathrm{T}(x_{n_k}) - \mathrm{T}(e_{n_k})$ converge dans X_1, ainsi que (y_{n_k}) dans X_0 puisque T induit un isomorphisme sur $\mathrm{Y}^{(0)}$; finalement $x_{n_k} = y_{n_k} + e_{n_k}$ converge dans X_0. □

Rappelons qu'un opérateur $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ est strictement singulier quand sa restriction à un sous-espace $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X}_0)$ quelconque n'est jamais un isomorphisme de Y sur l'image S(Y) : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X}_0)$, il existe $y \in \mathrm{Y}$ tel que $\|\mathrm{S}(y)\| < \varepsilon \|y\|$. Il est clair que la restriction $\mathrm{S}_{\restriction \mathrm{Y}}$ d'un opérateur strictement singulier $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1)$ à un sous-espace d.d.i Y de X_0 est dans $\mathcal{S}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}_1)$. D'après le corollaire 1.1 appliqué à la semi-norme $f(x) = \|\mathrm{S}(x)\|$ sur X_0, on peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X}_0)$ tel que $\|\mathrm{S}_{\restriction \mathrm{Y}}\| < \varepsilon$ (voir aussi [L–T, Proposition 2.c.4]).

Proposition 1. *Soit* X *un espace de Banach réel ou complexe. L'ensemble* $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ *des opérateurs strictement singuliers est un idéal bilatère fermé de* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$*.*

Preuve. Si T n'est pas strictement singulier, il induit un isomorphisme d'un sous-espace d.d.i Y de X sur l'image TY, ce qui restera vrai, sur le même Y, pour les voisins de T : le complémentaire de $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ est donc ouvert dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$.

Fixons un sous-espace $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$; si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, sa restriction $\mathrm{S}_{\restriction \mathrm{Y}}$ est strictement singulière de Y dans X ; on a vu que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver Y_1, sous-espace d.d.i de Y, tel que $\|\mathrm{S}_{\restriction \mathrm{Y}_1}\| < \varepsilon$. Si S' est un autre élément de $\mathcal{S}(\mathrm{X})$, on trouve de même un sous-espace $\mathrm{Y}'_1 \subset \mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}$ tel que $\|\mathrm{S}'_{\restriction \mathrm{Y}'_1}\| < \varepsilon$, donc $\|(\mathrm{S} + \mathrm{S}')_{\restriction \mathrm{Y}'_1}\| < 2\varepsilon$; on en déduit que $\mathrm{S} + \mathrm{S}'$ est strictement singulier et que $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. Par ailleurs, la composition à droite ou à gauche de S strictement singulier avec un autre opérateur U de $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ est dans $\mathcal{S}(\mathrm{X})$. C'est évident pour US ; de l'autre côté, si SU n'était pas strictement singulier, il induirait un isomorphisme sur un Y d.d.i, donc U aussi puisqu'on aurait : $c\|y\| \leqslant \|(\mathrm{SU})(y)\| \leqslant \|\mathrm{S}\| \, \|\mathrm{U}(y)\|$ pour $y \in \mathrm{Y}$, avec $c > 0$; l'image UY serait fermée d.d.i et S induirait un isomorphisme sur UY, ce qui est impossible. □

Un opérateur T sur un espace de Banach X réel ou complexe est *de Fredholm* s'il existe un sous-espace de codimension finie $\mathrm{Y}^{(0)}$ de X tels que $\mathrm{T} \in \mathrm{Isom}{\restriction}(\mathrm{Y}^{(0)})_{\mathrm{X}}$ et que $\mathrm{TY}^{(0)}$ *soit de codimension finie* dans X. Par des raisonnements d'algèbre linéaire élémentaire, on voit que la quantité $\mathrm{codim}(\mathrm{Y}^{(0)}) - \mathrm{codim}(\mathrm{TY}^{(0)})$ ne dépend pas du choix particulier de $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$: si $\mathrm{Y}^{(1)}$ est un autre choix, on raisonnera en écrivant $\mathrm{Y}^{(0)} = \mathrm{E}_0 \oplus (\mathrm{Y}^{(0)} \cap \mathrm{Y}^{(1)})$ et $\mathrm{Y}^{(1)} = \mathrm{E}_1 \oplus (\mathrm{Y}^{(0)} \cap \mathrm{Y}^{(1)})$, avec $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1$ sous-espaces de dimension finie, et on « comptera les dimensions » à l'origine et à l'arrivée. Cette quantité $\mathrm{codim}(\mathrm{Y}^{(0)}) - \mathrm{codim}(\mathrm{TY}^{(0)})$ est *l'indice* ind(T) de T.

Un opérateur de Fredholm est en particulier finiment singulier ; si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est finiment singulier mais pas Fredholm, c'est que la codimension de son image est infinie. Si $\mathrm{T} \in \mathrm{GL}(\mathrm{X})$ est inversible, il est Fredholm d'indice 0. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ a un noyau de dimension finie et une image fermée de codimension finie, il est de Fredholm : on prend pour $\mathrm{Y}^{(0)}$ un supplémentaire du noyau ker T, on a $\mathrm{TY}^{(0)} = \mathrm{TX}$ fermé et T induit un isomorphisme sur $\mathrm{Y}^{(0)}$ par le théorème des isomorphismes de Banach. La formule classique pour définir l'indice d'un opérateur de Fredholm T est $\mathrm{ind}(\mathrm{T}) = \dim \ker \mathrm{T} - \mathrm{codim}\, \mathrm{TX}$.

Lemme 1.3. *Si* X *est un espace de Banach réel ou complexe, si on a* $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ *et si* $\mathrm{T} \in \mathrm{Isom}{\restriction}(\mathrm{Y})_{\mathrm{X}}$*, il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *vérifiant la propriété suivante : tous les opérateurs* $\mathrm{T}' \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *tels que* $\|\mathrm{T}' - \mathrm{T}\| < \varepsilon$ *sont dans* $\mathrm{Isom}{\restriction}(\mathrm{Y})_{\mathrm{X}}$*, et la codimension de* $\mathrm{T}'\mathrm{Y}$ *dans* X*, finie ou infinie, reste constante. Il en résulte que les « voisins » d'un opérateur de Fredholm* *restent de Fredholm et gardent le même indice. De plus, quand* T *est finiment singulier, le caractère fini ou infini de la codimension de* TX *dans* X *est localement constant.*

Preuve. Il existe $c > 0$ tel que $\|\mathrm{T}(y)\| \geqslant c\|y\|$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$; si $\|\mathrm{T}' - \mathrm{T}\| < c/2$, on aura $\|\mathrm{T}'(y)\| \geqslant (c/2)\,\|y\|$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$, les voisins T' de T induisent encore des isomorphismes de Y sur $\mathrm{T}'\mathrm{Y}$. Plus généralement, si F est un sous-espace de dimension finie de X tel que $\mathrm{F} \cap \mathrm{TY} = \{0\}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{dist}(\mathrm{T}(y), \mathrm{F}) \geqslant \delta$ pour tout y de la sphère unité $\mathrm{S_Y}$ de Y. Clairement, on aura encore $\mathrm{dist}(\mathrm{T}'(y), \mathrm{F}) \geqslant \delta/2$ pour les opérateurs T' voisins de T, et donc $\mathrm{F} \cap \mathrm{T}'\mathrm{Y} = \{0\}$: la codimension de $\mathrm{T}'\mathrm{Y}$ reste $\geqslant \dim \mathrm{F}$ quand T' reste au voisinage de T. Si $\mathrm{codim}\,\mathrm{TY} = k \in \mathbb{N}$, on peut choisir F de dimension k de façon que $\mathrm{X} = \mathrm{TY} \oplus \mathrm{F}$: si π_F est la projection de X sur X/F, alors $\pi_\mathrm{F} \circ \mathrm{T}$ est un isomorphisme de Y sur X/F et cela reste vrai pour T' voisin de T : si elle est finie, la codimension de $\mathrm{T}'\mathrm{Y}$ reste constante pour T' voisin de T. Il en résulte que le caractère Fredholm et l'indice sont stables par petite perturbation.

Supposons maintenant que $\mathrm{T} \in \mathrm{Isom}{\restriction}(\mathrm{Y})_\mathrm{X}$ mais que la codimension de TY dans X soit infinie. Soit $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\mathrm{T}, \epsilon)$ une boule dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ contenue dans $\mathrm{Isom}{\restriction}(\mathrm{Y})_\mathrm{X}$. Fixons k entier $\geqslant 0$; pour tout $j \leqslant k$, l'ensemble U_j des $\mathrm{T}' \in \mathrm{B}$ tels que $\mathrm{codim}\,\mathrm{T}'\mathrm{Y} = j$, ainsi que l'ensemble V_{k+1} des $\mathrm{T}' \in \mathrm{B}$ tels que $\mathrm{codim}\,\mathrm{T}'\mathrm{Y} \geqslant k+1$ sont ouverts d'après ce qui précède, donc aussi fermés dans B. Par connexité, B est égal à l'un d'entre eux, qui ne peut être que V_{k+1} sous l'hypothèse actuelle de codimension infinie de l'image, et ceci pour tout k : la codimension de $\mathrm{T}'\mathrm{Y}$ est donc infinie pour tout T' dans B. Finalement, la codimension de $\mathrm{T}'\mathrm{Y}$, finie ou infinie, est localement constante.

Quand T est finiment singulier, il est dans $\mathrm{Isom}{\restriction}(\mathrm{Y}^{(0)})_\mathrm{X}$ pour un certain sous-espace $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$; si on écrit $\mathrm{X} = \mathrm{Y}^{(0)} \oplus \mathrm{E}$, E de dimension finie, on voit que l'image $\mathrm{T}'\mathrm{X}$ par les voisins T' de T ne diffère de $\mathrm{T}'\mathrm{Y}^{(0)}$ que d'une dimension finie, d'où la dernière assertion. □

Remarque. Dans le cas où $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{TY}$ est de codimension infinie et où il existe un sous-espace de dimension infinie $\mathrm{Y}_2 \subset \mathrm{X}$ tel que $\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2$ soit une somme directe (c'est le cas par exemple dans un espace de Hilbert), on peut éviter la preuve indirecte du cas de codimension infinie. C'est précisément ce qu'on ne peut jamais faire quand X est HI.

Proposition 2. *Soient* X *un espace de Banach réel ou complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$.

i. Si T *est Fredholm et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *strictement singulier,* $\mathrm{T} - \mathrm{S}$ *est Fredholm et de même indice que* T.

ii. L'opérateur T *est Fredholm si et seulement si son image* $\pi_\mathcal{S}(\mathrm{T})$ *est inversible dans* $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{X})$ *(voir aussi par exemple [Gonz], [Aien]).*

Preuve. Si T est de Fredholm, il est finiment singulier : il existe $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ et $c > 0$ tels que $\|\mathrm{T}(y_0)\| \geqslant c\|y_0\|$ pour tout $y_0 \in \mathrm{Y}^{(0)}$. Si S est strictement singulier, alors $\mathrm{T} - \mathrm{S}$ est finiment singulier : sinon on pourrait d'après le « principe simple » du lemme 1.1 trouver $\mathrm{Y}_1 \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{Y}^{(0)})$ tel que $\|(\mathrm{T} - \mathrm{S})_{\restriction \mathrm{Y}_1}\| < c/2$, ce qui impliquerait que $\|\mathrm{S}(y_1)\| \geqslant (c/2)\,\|y_1\|$ pour tout $y_1 \in \mathrm{Y}_1$, donc que S induise un isomorphisme sur Y_1 de dimension infinie, en contradiction du caractère strictement singulier de S. Il en résulte que pour tout $t \in [0, 1]$, $\mathrm{T} - t\mathrm{S}$ est finiment singulier, l'image $(\mathrm{T} - t\mathrm{S})\mathrm{X}$ est donc fermée (lemme 1.2-*ii*) ; de plus le caractère fini ou infini de la codimension de l'image est localement constant (lemme 1.3), elle est finie pour $t = 0$, donc finie pour tout $t \in [0, 1]$. On en déduit que $\mathrm{T} - t\mathrm{S}$ est de Fredholm pour $t \in [0, 1]$; l'indice étant localement constant, $\mathrm{T} - \mathrm{S}$ est de même indice que T.

Montrons que $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est de Fredholm si et seulement si son image $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})$ est inversible dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$: si T est de Fredholm, c'est un isomorphisme de $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ sur $\mathrm{Y}^{(1)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$; choisissons un supplémentaire F de dimension finie pour $\mathrm{Y}^{(1)}$, qui fournit une projection π_1 de X sur $\mathrm{Y}^{(1)}$, qu'on considérera comme opérateur de X dans $\mathrm{Y}^{(1)}$. Posons $\mathrm{U} = \mathrm{T}^{-1} \circ \pi_1$, l'inverse T^{-1} étant défini sur $\mathrm{Y}^{(1)}$, à valeurs dans $\mathrm{Y}^{(0)}$; alors UT est l'identité sur $\mathrm{Y}^{(0)}$, et TU est l'identité sur $\mathrm{Y}^{(1)}$, $\mathrm{UT} - \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{TU} - \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ sont de rang fini donc $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{U})\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T}) = \pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{U}) = \mathbf{1}_{\mathcal{S}}$, l'image $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})$ est inversible dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$.

Dans l'autre direction, si U est inverse de T modulo $\mathcal{S}(\mathrm{X})$, alors $\mathrm{UT} = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} - \mathrm{S}_1$, où $\mathrm{S}_1 \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, UT est donc Fredholm d'après la proposition 2, son noyau est de dimension finie, donc celui de T aussi. On a aussi $\mathrm{TU} = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} - \mathrm{S}_2$, $\mathrm{S}_2 \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, TU est de Fredholm, son image est fermée de codimension finie, donc celle de T également : en conclusion, T est Fredholm. □

Si Z est un espace de Banach complexe et si λ est une valeur spectrale infiniment singulière de $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$, $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ est infiniment singulier donc n'est pas de Fredholm, c'est-à-dire que λ est dans le spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Z})$ par la proposition 2. Il existe une réciproque quand λ est un point frontière du spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$.

Lemme 1.4. *Si Z est un espace de Banach complexe (d.d.i), si $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$ et si le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au bord $\partial \operatorname{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A}))$ du spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Z})$, alors λ est une valeur spectrale infiniment singulière de A. Il existe donc au moins une valeur spectrale infiniment singulière pour tout opérateur $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$.*

Preuve. En effet, si la valeur λ est dans le spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ mais n'est pas infiniment singulière, l'opérateur $\mathrm{A}_\lambda := \mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ n'est pas Fredholm mais d'après le « principe simple », il est finiment singulier ; alors $\mathrm{A}_\lambda \mathrm{Z}$ doit être de codimension infinie, et on a vu au lemme 1.3 que cela reste vrai pour les voisins λ' de λ, donc $\mathrm{A} - \lambda' \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ n'est pas Fredholm, tous ces λ' sont dans le spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ et λ est par conséquent dans *l'intérieur* de $\operatorname{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A}))$.

Le spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ est compact non vide, son bord est donc non vide, ce qui termine la preuve. □

Un argument très proche démontre le lemme classique qui suit, lemme qu'on obtient facilement aussi sans mentionner la théorie de Fredholm.

Lemme 1.5. *Si Z est un espace de Banach complexe et si λ appartient au bord $\partial \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$ du spectre de $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$, il existe une suite $(z_n) \subset \mathrm{Z}$ de vecteurs de norme 1 (qui peut être constante) telle que $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}})(z_n) \to 0$.*

Preuve. Dans le cas contraire, $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ serait un isomorphisme de Z sur $\mathrm{A}_\lambda \mathrm{Z}$; la codimension de $\mathrm{A}_\lambda \mathrm{Z}$, localement constante dans ce cas (lemme 1.3), ne pourrait être que nulle puisque A_λ possède des voisins $\mathrm{A}_{\lambda'}$ inversibles dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$. Mais alors A_λ serait inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$, contredisant l'hypothèse $\lambda \in \partial \operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \subset \operatorname{Sp}(\mathrm{A})$.

1.2. *Calcul fonctionnel holomorphe*

Pour une étude détaillée et plus sérieuse de ce sujet hyper-classique, on consultera par exemple Dunford et Schwartz [D–S, VII.3]. Dans cette section on travaillera avec un espace de Banach *complexe*, qu'on appellera Z pour bien se le rappeler. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$ un opérateur, qui soit bien entendu $\mathbb{C}$-linéaire et borné ; quand on aura envie d'insister sur la $\mathbb{C}$-linéarité, on écrira $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{Z})$ plutôt que $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$. Soit $\mathrm{Sp(A)}$ le spectre de A, ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A}$ ne soit pas inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$; le spectre est un compact non vide de $\mathbb{C}$. La *résolvante* $\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})$ de A est définie en tout point $\zeta \notin \mathrm{Sp(A)}$ par la formule

$$\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A}) = (\zeta \,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A})^{-1}.$$

Supposons que f soit une fonction holomorphe définie sur un ouvert $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ contenant le spectre de A, et que γ soit un chemin fermé dans D, un *lacet*, qui entoure $\mathrm{Sp(A)}$ une fois dans le sens positif. On définit un opérateur $f(\mathrm{A})$, « fonction de A », par l'intégrale

$$f(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma f(\zeta) \mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A}) \, d\zeta \in \mathcal{L}(\mathrm{Z}). \tag{2}$$

Précisons la condition sur γ (plutôt qu'un seul lacet, γ peut être une $\mathbb{Z}$-combinaison de lacets, un *cycle*, n'insistons pas). Rappelons que

$$\mathrm{ind}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - \lambda} \, d\zeta \in \mathbb{Z}$$

est *l'indice* d'un point $\lambda \in \mathbb{C}$ par rapport à un lacet γ ne passant pas par λ. Pour définir $f(\mathrm{A})$, on fera sur γ les hypothèses suivantes : on supposera que γ est un lacet dans l'ouvert $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$, que γ ne rencontre pas $\mathrm{Sp(A)}$ et que

la fonction indice ind_γ *est égale à* 1 *pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$*, et à* 0 *pour tout* $\lambda \notin \mathrm{D}$.

Cette « condition de contour » entraîne que $\mathrm{Sp(A)}$ est contenu dans D, et plus généralement, elle entraîne que tous les points λ « entourés » par γ, au sens que $\mathrm{ind}_\gamma(\lambda) \neq 0$, sont contenus dans D.

L'holomorphie va permettre de montrer que le résultat dans (2) ne dépend pas du choix de D et γ qui satisfont la condition de contour indiquée ; pour vérifier une égalité dans un espace de Banach, on se ramène à un problème scalaire en appliquant une forme linéaire quelconque, puis on utilise la théorie scalaire, par exemple [Rudi, Th. 10.35] : si D_1, γ_1 est un autre choix d'ouvert et de lacet vérifiant la condition de contour, on considère $\Omega = (\mathrm{D} \cup \mathrm{D}_1) \setminus \mathrm{Sp(A)}$ et le « cycle » $\Gamma = \gamma_1 - \gamma$ dans Ω : la condition de contour implique que l'indice de Γ hors de Ω est toujours nul, donc pour tout $z \in \mathrm{Z}$ et toute forme linéaire continue ξ sur Z l'intégrale sur Γ de la fonction $f(\zeta)\,\xi(\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})z)$, holomorphe dans Ω, est nulle par ce "Theorem 10.35", ce qui prouve l'indépendance attendue.

Si $f(\zeta) = \sum_{n \geqslant 0} c_n \zeta^n$ est entière, on peut prendre pour γ un cercle centré en 0, de rayon $> \|\mathrm{A}\|$, et développer la résolvante $\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})$ en série de puissances de A/ζ quand $\zeta \in \gamma$: on voit alors aisément que $f(\mathrm{A}) = \sum_{n \geqslant 0} c_n \mathrm{A}^n$ dans cette situation. La remarque s'applique en particulier à la fonction constante $\mathbf{1}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $\mathbf{1}(\zeta) = 1$, ou à la fonction identique i définie par $i(\zeta) = \zeta$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$: on obtient pour ces deux cas $\mathbf{1}(\mathrm{A}) = \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ et $i(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. La même preuve simple montre que si $f_\mu(\zeta) = (\mu - \zeta)^{-1}$ et $|\mu| > \|\mathrm{A}\|$, on a $f_\mu(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mu, \mathrm{A})$, mais l'égalité reste en fait vraie pour tout $\mu \notin \mathrm{Sp(A)}$, on va s'en servir tout de suite et le justifier plus loin.

Une propriété essentielle du calcul fonctionnel est la propriété *d'homomorphisme* : si f et g sont holomorphes au voisinage de $\mathrm{Sp(A)}$, on a

$$(fg)(\mathrm{A}) = f(\mathrm{A})\, g(\mathrm{A}) \tag{3}$$

(et on a vu que $\mathbf{1}(\mathrm{A}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$). D'après ce qu'on a dit plus haut, la preuve de (3) est facile pour les fonctions entières. Pour le cas général, on peut partir de la remarque triviale $(b-a)a^{-1}b^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$, valable pour deux éléments a et b d'une algèbre, inversibles et qui commutent ; quand $\mu_1 \neq \mu_2$, cela donne d'une part, dans l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, la formule

$$(4) \qquad (\mu_2 - \mu_1)^{-1}\Bigl(\frac{1}{\mu_1 - \zeta} - \frac{1}{\mu_2 - \zeta}\Bigr) = \frac{1}{(\mu_1 - \zeta)(\mu_2 - \zeta)}, \quad \zeta \notin \{\mu_1, \mu_2\}$$

et dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$ d'autre part, si $\mu_j \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ pour $j = 1, 2$, la formule

$$(\mu_2 - \mu_1)^{-1}\bigl((\mu_1 \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}} - \mathrm{A})^{-1} - (\mu_2 \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}} - \mathrm{A})^{-1}\bigr) = (\mu_1 \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}} - \mathrm{A})^{-1}(\mu_2 \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}} - \mathrm{A})^{-1},$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad (\mu_2 - \mu_1)^{-1}\bigl(\mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A}) - \mathrm{R}(\mu_2, \mathrm{A})\bigr) = \mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A})\mathrm{R}(\mu_2, \mathrm{A})\,;$$

si $f_j(\zeta) = f_{\mu_j}(\zeta) = (\mu_j - \zeta)^{-1}$, on a dit que $f_j(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mu_j, \mathrm{A})$, donc d'après (4) puis (5) on a

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)(\mathrm{A}) &= (\mu_2 - \mu_1)^{-1}(f_1 - f_2)(\mathrm{A}) \\ &= (\mu_2 - \mu_1)^{-1}\bigl(\mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A}) - \mathrm{R}(\mu_2, \mathrm{A})\bigr) = \mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A})\mathrm{R}(\mu_2, \mathrm{A}) = f_1(\mathrm{A})f_2(\mathrm{A}). \end{aligned}$$

On peut ensuite réaliser que si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, la formule intégrale de Cauchy permet d'exprimer f à partir des fonctions simples $(\zeta - a)^{-1}$, $\zeta \in \gamma$, déjà traitées, et d'obtenir ainsi l'égalité (3).

La relation (5) permet aussi de montrer la propriété préliminaire $f_{\mu_1}(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A})$: on intègre en $\zeta = \mu_2 \in \gamma$ cette relation, sur un lacet γ entourant $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ mais ne passant pas par μ_1, pour obtenir l'égalité

$$\mathrm{ind}_\gamma(\mu_1)\mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A}) + \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f_{\mu_1}(\zeta)\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})\,d\zeta = \mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A})\mathbf{1}(\mathrm{A})\,;$$

on note que jusqu'ici, f_{μ_1} n'est peut-être pas holomorphe dans un ouvert D tel que le couple (D, γ) vérifie notre « condition de contour » : si γ entoure μ_1, cette condition force $\mu_1 \in \mathrm{D}$, or μ_1 est un pôle de f_{μ_1}. Cependant, comme $\mu_1 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, on peut choisir un lacet γ qui entoure $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ mais pas μ_1, ce qui permet d'obtenir la propriété voulue $f_{\mu_1}(\mathrm{A}) = \mathrm{R}(\mu_1, \mathrm{A})$.

Il résulte de (3) que tous les opérateurs « fonctions de A » commutent. On a par ailleurs le « théorème spectral », qui indique que

$$(6) \qquad \mathrm{Sp}\, f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{Sp}\,\mathrm{A}).$$

Cette égalité résulte de la propriété (3), on la prouvera plus loin à la proposition 3.

Si le spectre de A est non-connexe, on peut le découper en deux compacts K_0 et K_1 disjoints et non vides ; autrement dit, K_0 est aussi *ouvert* dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$; on peut trouver D_0, un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K_0 et disjoint de K_1, γ_0 un lacet dans D_0 entourant K_0 une fois dans le sens positif ; alors

$$(7) \qquad \mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{K}_0} = \mathrm{P}_{\mathrm{K}_0}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_0} \mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})\,d\zeta$$

est un projecteur, $P_0^2 = P_0$; on peut en effet, sans modifier γ_0, restreindre au besoin l'ouvert D_0 pour que son adhérence ne rencontre pas K_1, trouver D_1 ouvert disjoint de D_0 et contenant K_1, et un lacet γ_1 entourant K_1 ; on introduit f_0 holomorphe dans l'ouvert $D_0 \cup D_1$ contenant $\mathrm{Sp}(A)$, définie par $f_0 = 1$ sur D_0 et $f_0 = 0$ sur D_1. Le cycle $\gamma_0 + \gamma_1$ entoure le spectre de A, et puisque $f_0 = 0$ sur D_1 on voit que

$$f_0(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} f_0(\zeta) R(\zeta, A)\, d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} f_0(\zeta) R(\zeta, A)\, d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_0} R(\zeta, A)\, d\zeta = P_0\,;$$

on a $f_0 = f_0^2$ et donc $f_0(A) = f_0(A)^2$ d'après (3). On note que $P_0 = P_{K_0}$ ne dépend que de K_0 (et de A, évidemment) ; l'image $Z_0 = P_0 Z$ est un sous-espace invariant par A puisque $AP_0 = P_0 A$. Si f_1 est définie par $f_1 = 1$ sur D_1 et $f_1 = 0$ sur D_0, alors $P_1 = f_1(A)$ est un autre projecteur, et $f_0 + f_1$ vaut 1 au voisinage du spectre de A, donc

$$P_{K_0} + P_{K_1} = \mathbf{1}(A) = \mathrm{Id}_Z \quad \text{si} \ \ K_1 = \mathrm{Sp}(A) \setminus K_0. \tag{8}$$

Plus généralement, si K_0, K_1 sont deux compacts-ouverts *disjoints* dans le spectre de A, dont la réunion n'est pas nécessairement égale au spectre, alors

$$P_{K_0} P_{K_1} = P_{K_1} P_{K_0} = 0. \tag{9}$$

En effet, on peut faire en sorte comme précédemment que $P_{K_j} = f_j(A)$, $j = 0, 1$, avec $f_0 f_1 = 0$.

Indiquons tout de suite que $P_0 = P_{K_0}(A)$ —et donc aussi $Z_0 = P_0 Z$— ne sont pas nuls quand le compact-ouvert $K_0 \subset \mathrm{Sp}(A)$ n'est pas vide : en effet, d'après le lemme 1.5, il existe des vecteurs z dans Z, de norme 1 et tels que $A(z) \sim \lambda z$, ce qui entraîne que $R(\zeta, A)(z) \sim (\zeta - \lambda)^{-1} z$ pour tout $\zeta \in \gamma_0$ dans l'équation (7), d'où résulte que $P_0(z) \sim \mathrm{ind}_{\gamma_0}(\lambda) z = z$ et $P_0 \neq 0$.

1.2.1. *Restrictions*

On va s'occuper de la question de la restriction des opérateurs « fonctions de A » à leurs sous-espaces stables éventuels ; on va aligner un bon nombre de banalités pour traiter cette question avec une précision maniaque. On suppose toujours que K_0 est un compact-ouvert non vide du spectre de $A \in \mathcal{L}(Z)$, que $P_0 = P_{K_0} = P_{K_0}(A)$ est le projecteur spectral associé et $Z_0 = P_0 Z$ l'image de P_0. On prend pour K_1 le complémentaire de K_0 dans le spectre de A, cet ensemble K_1 est un autre compact-ouvert du spectre, qu'on suppose non vide ; soit $P_1 = P_{K_1} = \mathrm{Id}_Z - P_0$ et $Z_1 = P_1 Z$. On sait que $P_0, P_1 \neq 0$ et

$$P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0, \quad P_0 + P_1 = \mathrm{Id}_Z, \quad Z = Z_0 \oplus Z_1.$$

On a vu que les projecteurs P_k, $k = 0, 1$, sont des « fonctions de A », et que tous les opérateurs $g(A)$ fonctions de A commutent, en particulier commutent avec P_0 et P_1. Désignons par $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, K_0)$ le sous-espace de $\mathcal{L}(Z)$ formé des opérateurs B tels que $BP_0 = P_0 B$. Ce sous-espace est en fait une sous-algèbre de $\mathcal{L}(Z)$: on a $\mathrm{Id}_Z \in \mathcal{C}$, et si B, C commutent avec P_0, leur produit BC commute aussi avec P_0 ; de plus, si $B \in \mathcal{C}$ est inversible dans $\mathcal{L}(Z)$, son inverse B^{-1} commute avec P_0 et appartient donc à $\mathcal{C}$.

Un opérateur $B \in \mathcal{C}$ commute aussi évidemment avec $P_1 = \mathrm{Id}_Z - P_0$; on note que $P_0 B P_1 = P_0 P_1 B = 0$, ainsi que $P_1 B P_0 = 0$, donc

$$B = (P_0 + P_1) B (P_0 + P_1) = P_0 B P_0 + P_1 B P_1 = BP_0 + BP_1. \tag{10}$$

On voit que $\mathrm{BZ}_k \subset \mathrm{Z}_k$ puisque si $z_k \in \mathrm{Z}_k$ on aura $\mathrm{B}(z_k) = \mathrm{BP}_k(z_k) = \mathrm{P}_k\mathrm{B}(z_k) \in \mathrm{Z}_k$. On va pouvoir considérer la restriction $\mathrm{B}_k = \mathrm{B}_{\restriction \mathrm{Z}_k}$ comme un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_k)$. Pour $k = 0, 1$, soit π_k l'application de Z dans Z_k définie par $\pi_k(z) = \mathrm{P}_k(z) \in \mathrm{Z}_k$ pour tout $z \in \mathrm{Z}$, et j_k l'injection de Z_k dans Z, $j_k(z_k) = z_k$ quand $z_k \in \mathrm{Z}_k$; on voit que la restriction B_k peut s'exprimer par $\mathrm{B}_k = \pi_k \mathrm{B} j_k \in \mathcal{L}(\mathrm{Z}_k)$ puisque pour $z_k \in \mathrm{Z}_k$ on a

$$\pi_k \mathrm{B} j_k(z_k) = \pi_k \mathrm{B}(z_k) = \mathrm{P}_k\mathrm{B}(z_k) = \mathrm{BP}_k(z_k) = \mathrm{B}(z_k) \in \mathrm{Z}_k.$$

On déroule une liste d'évidences : $j_k\pi_k = \mathrm{P}_k$, $\pi_k j_k = \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_k}$, puis leurs conséquences $\mathrm{P}_k j_k = j_k \pi_k j_k = j_k$, $\pi_k \mathrm{P}_k = \pi_k j_k \pi_k = \pi_k$; on a aussi $\pi_0\mathrm{P}_1 = (\pi_0\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_1 = 0$ ainsi que $\pi_1\mathrm{P}_0 = 0$, $\mathrm{P}_1 j_0 = \mathrm{P}_1(\mathrm{P}_0 j_0) = 0$ et $\mathrm{P}_0 j_1 = 0$, $\pi_0 j_1 = (\pi_0\mathrm{P}_0)j_1 = 0$ et de même $\pi_1 j_0 = 0$. Bien entendu, la restriction B_k est déterminée par $\mathrm{P}_k\mathrm{BP}_k$, étant donné que $\mathrm{B}_k = \pi_k\mathrm{B}j_k = \pi_k(\mathrm{P}_k\mathrm{BP}_k)j_k$; on a aussi $j_k\mathrm{B}_k\pi_k = j_k\pi_k\mathrm{B}j_k\pi_k = \mathrm{P}_k\mathrm{BP}_k$ et (10) devient

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}_0\mathrm{BP}_0 + \mathrm{P}_1\mathrm{BP}_1 = j_0\mathrm{B}_0\pi_0 + j_1\mathrm{B}_1\pi_1.$$

Remarque 1. *L'application* $\mathfrak{R}(\mathrm{A}, \mathrm{K}_0)$ *qui associe à chaque opérateur* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{K}_0)$ *le couple* $(\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1)$ *de ses deux restrictions* $\mathrm{B}_k = \pi_k\mathrm{B}j_k \in \mathcal{L}(\mathrm{Z}_k)$, $k = 0, 1$, *est un isomorphisme de la sous-algèbre* $\mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{K}_0)$ *sur l'algèbre produit* $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0) \times \mathcal{L}(\mathrm{Z}_1)$.

La loi produit sur $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0) \times \mathcal{L}(\mathrm{Z}_1)$ est $(\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1) \cdot (\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1) = (\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0, \mathrm{B}_1\mathrm{C}_1)$, l'unité de cette algèbre est $(\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0}, \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_1})$; clairement, $(\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0) \times \mathcal{L}(\mathrm{Z}_1)$ si et seulement si B_k est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_k)$ pour $k = 0$ et $k = 1$, l'inverse étant $(\mathrm{B}_0^{-1}, \mathrm{B}_1^{-1})$. Vérifions l'affirmation de la remarque : si $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{C}$, il est visible que la restriction du produit est le produit des restrictions, mais on l'obtient aussi « mécaniquement » avec nos petits outils,

$$\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k = \pi_k\mathrm{B}j_k\pi_k\mathrm{C}j_k = \pi_k\mathrm{BP}_k\mathrm{C}j_k = \pi_k\mathrm{P}_k\mathrm{BC}j_k = \pi_k\mathrm{BC}j_k = (\mathrm{BC})_k.$$

On a la propriété d'homomorphisme pour $\mathfrak{R}$, vérifions sa surjectivité. Étant donné un couple $(\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1)$ avec $\mathrm{C}_k \in \mathcal{L}(\mathrm{Z}_k)$, $k = 0, 1$, posons $\mathrm{D} = j_0\mathrm{C}_0\pi_0 + j_1\mathrm{C}_1\pi_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$; on obtient que $\mathrm{DP}_0 = j_0\mathrm{C}_0\pi_0\mathrm{P}_0 = j_0\mathrm{C}_0\pi_0 = \mathrm{P}_0 j_0\mathrm{C}_0\pi_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{D}$, donc $\mathrm{D} \in \mathcal{C}$ et sa restriction D_0 est donnée par

$$\mathrm{D}_0 = \pi_0\mathrm{D}j_0 = \pi_0(j_0\mathrm{C}_0\pi_0 + j_1\mathrm{C}_1\pi_1)j_0 = \pi_0 j_0\mathrm{C}_0\pi_0 j_0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0}\mathrm{C}_0\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0} = \mathrm{C}_0,$$

et de même $\mathrm{D}_1 = \mathrm{C}_1$, donc $(\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1) = \mathfrak{R}(\mathrm{D})$, et $\mathfrak{R}$ est surjective. □

Comme $\mathcal{C}$ est stable par la prise d'inverse dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$, il résulte de la remarque 1 qu'*un opérateur* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$ *si et seulement si chaque restriction* B_k, $k = 0, 1$, *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_k)$.

Revenons aux deux ouverts D_0 et D_1 disjoints tels que $\mathrm{K}_j \subset \mathrm{D}_j$, pour $j = 0, 1$, et aux deux fonctions f_j holomorphes sur l'ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}_0 \cup \mathrm{D}_1$ qui contient $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{K}_0 \cup \mathrm{K}_1$, qui vérifient $f_0 f_1 = 0$, $f_j = 1$ sur D_j ; on a $\mathrm{P}_j = \mathrm{P}_{\mathrm{K}_j} = f_j(\mathrm{A})$, pour $j = 0, 1$; on peut « rétrécir » $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1$ sans changer le fait que $\mathrm{P}_j = f_j(\mathrm{A})$, tant que $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1$ contiennent respectivement $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$. Tous les opérateurs « fonctions de A » commutent ; on a donc $g(\mathrm{A}) \in \mathcal{C}(\mathrm{A}, \mathrm{K}_0)$ pour toute fonction g qui est holomorphe au voisinage du spectre de A. La restriction $g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z}_0)$ est déterminée par les relations $\mathrm{P}_0 g(\mathrm{A})\mathrm{P}_0 = g(\mathrm{A})\mathrm{P}_0 =$

$(gf_0)(\mathrm{A}) \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$, et la fonction gf_0, qui est toujours nulle sur D_1, ne dépend que des valeurs de g sur D_0 ; on a donc $g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0} = h(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ lorsque $h = g$ sur D_0. On va montrer que le spectre de la restriction $g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ de $g(\mathrm{A})$ à Z_0 est égal à $g(\mathrm{K}_0)$, une petite extension du théorème spectral (6).

Proposition 3. *Soient* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$ *et* g *une fonction holomorphe au voisinage du spectre de* A. *Pour tout* K_0 *compact-ouvert non vide dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, *on a*

$$\mathrm{Sp}\big(g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0}\big) = g(\mathrm{K}_0), \quad \textit{où } \mathrm{Z}_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{K}_0}\mathrm{Z}. \tag{11}$$

Preuve. On va d'abord traiter le cas plus simple où $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Si $\mu \notin g(\mathrm{K})$, on peut poser $h(\zeta) = \mu - g(\zeta)$ et $k(\zeta) = 1/h(\zeta)$ pour ζ dans un voisinage de K. On a $hk = 1$ donc $h(\mathrm{A})k(\mathrm{A}) = \mathbf{1}(\mathrm{A}) = \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$, $h(\mathrm{A}) = \mu\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - g(\mathrm{A})$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$ et $\mu \notin \mathrm{Sp}(g(\mathrm{A}))$. Inversement, si $\lambda \in \mathrm{K}$, écrivons $g(\lambda) - g(\zeta) = (\lambda - \zeta)h(\zeta)$ d'où $g(\lambda)\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - g(\mathrm{A}) = (\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A})h(\mathrm{A})$. Alors $g(\lambda)\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - g(\mathrm{A})$ ne peut être inversible puisque $\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A}$ est non inversible et commute avec $h(\mathrm{A})$. On a finalement $g(\mathrm{K}) = \mathrm{Sp}(g(\mathrm{A}))$.

Désormais, $\mathrm{K}_1 = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{K}_0$ sera non vide. Si $\mu \notin g(\mathrm{K}_0)$, la fonction $\mu - g$ ne s'annule pas sur K_0, on rétrécit l'ouvert D_0 contenant K_0 de sorte que $\mu - g$ ne s'annule pas sur D_0 ; on peut alors considérer la fonction k définie sur D en posant $k(\zeta) = 1/(\mu - g(\zeta))$ quand $\zeta \in \mathrm{D}_0$ et par exemple $k(\zeta) = 1$ sur D_1. Posons aussi $h(\zeta) = \mu - g(\zeta)$ sur D_0, $h(\zeta) = 1$ sur D_1. Alors $hk = 1$ sur D donc $h(\mathrm{A})$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$, on a vu qu'il en résulte que sa restriction à Z_0 est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0)$; mais comme $h = \mu - g$ sur D_0, la restriction de $h(\mathrm{A})$ à Z_0 coïncide avec celle de $(\mu - g)(\mathrm{A}) = \mu\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - g(\mathrm{A})$, à savoir $\mu\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0} - g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ qui est donc inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0)$. On a montré que $\mu \notin \mathrm{Sp}(g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0})$.

Si $\lambda_0 \in \mathrm{K}_0 \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, on sait d'après la première partie ci-dessus que la restriction à Z_1 de $\lambda_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A}$ est inversible, et comme $\lambda_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A}$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$, il faut que la restriction à Z_0 de $\lambda_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A}$ soit non inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0)$. Si on pose $\mu = g(\lambda_0)$, on écrit $\mu - g(\zeta) = (\lambda_0 - \zeta)h(\zeta)$ d'où $\mu\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - g(\mathrm{A}) = (\lambda_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{A})h(\mathrm{A})$, puis $\mu\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0} - g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0} = (\lambda_0\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0} - \mathrm{A}_{\restriction \mathrm{Z}_0})\,h(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ qui ne peut être inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{Z}_0)$ puisque $\lambda_0\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0} - \mathrm{A}_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ est non inversible et commute avec $h(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0}$. On a maintenant prouvé que $g(\mathrm{K}_0) \subset \mathrm{Sp}(g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0})$, d'où l'égalité $g(\mathrm{K}_0) = \mathrm{Sp}(g(\mathrm{A})_{\restriction \mathrm{Z}_0})$. □

1.2.2. *Rang fini*

Si K est compact-ouvert non vide dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et si l'image $\mathrm{F} = \mathrm{P}_\mathrm{K}\mathrm{Z}$ du projecteur spectral P_K est de dimension finie, on dispose d'un sous-espace F invariant pour A, de dimension finie : on est ramené à la théorie linéaire élémentaire, il existe un nombre fini de valeurs propres pour la restriction $\mathrm{A}_{\restriction \mathrm{F}} \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$, et on sait que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_{\restriction \mathrm{F}}) = \mathrm{K}$ d'après la proposition 3 appliquée à la fonction identique $g(\zeta) = \zeta$. L'ensemble K est donc fini et si $\mu \in \mathrm{K}$, alors μ est isolée dans le spectre ; l'image $\mathrm{F}_\mu = \mathrm{F}_\mu(\mathrm{A}) \subset \mathrm{F}$ du projecteur $\mathrm{P}_{\{\mu\}}(\mathrm{A})$ est invariante par A, la restriction $\mathrm{A}_{\restriction \mathrm{F}_\mu} \in \mathcal{L}(\mathrm{F}_\mu)$ possède une seule valeur propre μ. Il existe par conséquent un entier $k \geqslant 1$ tel que $(\mathrm{A}_{\restriction \mathrm{F}_\mu} - \mu\,\mathrm{Id}_{\mathrm{F}_\mu})^k = 0$, l'espace F_μ se décompose en somme d'au moins une et peut-être de plusieurs « cellules de Jordan », chacune d'elles étant de la forme $\mathrm{E} = [e_0, \ldots, e_{p-1}]$, où

$$\mathrm{A}(e_j) = \mu e_j + e_{j-1}, \quad 0 < j < p \leqslant k, \quad \text{et } \mathrm{A}(e_0) = \mu e_0\,;$$

la restriction de A à E vérifie $(\mathrm{A}_{\restriction \mathrm{E}} - \mu\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^p = 0$; si on prend pour k le maximum des dimensions p concernant ces « μ-cellules », on voit que $\mathrm{F}_\mu \subset \ker(\mathrm{A} - \mu\mathrm{Id}_\mathrm{Z})^k$. Posons

$\mathrm{Q} := \mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{P}_{\{\mu\}}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{QZ}$; on a donc $\mathrm{Z} = \mathrm{F}_\mu \oplus \mathrm{Y}$. D'après la proposition 3, μ n'est pas dans le spectre de la restriction de A à Y ; en découpant Z selon F_μ et Y, on vérifie que $\mathrm{F}_\mu = \ker(\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}_\mathrm{Z})^k$; par ailleurs $(\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}_\mathrm{Z})^k \mathrm{Z} = (\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}_\mathrm{Z})^k \mathrm{Y} = \mathrm{Y}$, finalement

$$\mathrm{Z} = \mathrm{F}_\mu \oplus \mathrm{QZ} = \ker(\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}_\mathrm{Z})^k \oplus (\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}_\mathrm{Z})^k \mathrm{Z}.$$

Lemme 1.6. *Soient* Z *un espace de Banach complexe (d.d.i) et* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$ *;*

— *si* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda\}$ *est un singleton, l'opérateur* $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ *n'est pas de Fredholm ;*

— *si* $\mathrm{A} = \mathrm{T}^\mathbb{C}$ *est le complexifié d'un opérateur* T *sur un espace de Banach réel* X *et si* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, *les opérateurs* $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ *et* $\mathrm{A} - \overline{\lambda} \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ *ne sont pas de Fredholm ;*

— *si* $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ *est isolé dans le spectre de* A *et si* $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ *est de Fredholm, alors* λ *est une valeur propre de* A *de multiplicité finie.*

Preuve. Supposons que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \{\lambda\}$ et posons $a = \pi_\mathcal{S}(\mathrm{A}) \in \mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{Z})$; comme dans toute algèbre de Banach complexe (on a bien $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{Z}) \neq \{0\}$, $\mathbf{1}_\mathcal{S} \neq 0$, parce que Z est de dimension infinie), le spectre de a est non vide, et par ailleurs on a toujours clairement $\mathrm{Sp}(a) \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, donc $\mathrm{Sp}(a) = \{\lambda\}$, $a - \lambda \mathbf{1}_\mathcal{S}$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{X})$ et il en résulte que $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ n'est pas de Fredholm (proposition 2).

Si $\mathrm{A} = \mathrm{T}^\mathbb{C}$, les spectres de A et a sont invariants par conjugaison, l'argument ci-dessus s'adapte aisément pour montrer que $\mathrm{Sp}(a) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ et il en résulte comme avant que l'opérateur $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ n'est pas de Fredholm, pas plus que $\mathrm{A} - \overline{\lambda} \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$.

Si λ est isolé dans le spectre, on peut considérer le projecteur spectral $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\{\lambda\}}$ pour A et son image $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{PZ}$, ainsi que $\mathrm{P}_1 = \mathrm{Id}_\mathrm{Z} - \mathrm{P}$ et $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{P}_1 \mathrm{Z}$. D'après la proposition 3, la restriction A_0 de A à Z_0 admet pour spectre le singleton $\{\lambda\}$; comme $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ est de Fredholm par hypothèse, que $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_0 \oplus \mathrm{Z}_1$ et que chaque Z_j est invariant par $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$, il en résulte que $\mathrm{A}_0 - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0}$ est de Fredholm ; le sous-espace Z_0 doit être de dimension finie d'après les points qui précèdent. On applique pour finir les considérations vues avant l'énoncé du lemme.

Lemme 1.7. *Soient* Z *un espace de Banach complexe et* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$ *; considérons le spectre* $\mathrm{Sp}(\pi_\mathcal{S}(\mathrm{A}))$ *de* $\pi_\mathcal{S}(\mathrm{A})$ *dans l'algèbre* $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{Z})$*, et soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *une composante connexe du complémentaire de* $\mathrm{Sp}(\pi_\mathcal{S}(\mathrm{A}))$ *telle que* $\Omega \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ *soit non vide. Tous les* $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap \Omega$ *sont isolés dans le spectre de* A*, et sont des valeurs propres de* A *de multiplicité finie.*

Preuve. Posons $\Omega^* = \Omega \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \mathbb{C}$, ouvert non vide par hypothèse. Pour tout $\lambda \in \Omega$, l'image $\pi_\mathcal{S}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}) = \pi_\mathcal{S}(\mathrm{A}) - \lambda \mathbf{1}_\mathcal{S}$ est inversible dans $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{X})$, donc $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ est de Fredholm par la proposition 2, soit $i(\lambda)$ son indice ; puisque $i(\lambda)$ est localement constant par le lemme 1.3 et que Ω est connexe, $i(\lambda)$ est constant dans Ω, égal à 0 puisque $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ est inversible quand $\lambda \in \Omega^*$. Considérons

$$\mathrm{D} = \{\lambda \in \Omega : \exists \lambda_n \to \lambda,\ \lambda_n \neq \lambda,\ \ker(\mathrm{A} - \lambda_n \mathrm{Id}_\mathrm{Z}) \neq \{0\}\}.$$

Cet ensemble est clairement fermé dans Ω, montrons qu'il est aussi ouvert dans Ω. Soit $\lambda \in \mathrm{D}$ et $\mathrm{A}(x_n) = \lambda_n x_n$, avec x_n de norme 1 et $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \neq \lambda$. Notons Y le sous-espace fermé engendré par les vecteurs x_n. On sait que $\mathrm{A}_\lambda = \mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ est Fredholm donc finiment singulier, l'image $\mathrm{A}_\lambda \mathrm{Y}$ est fermée d'après le lemme 1.2-*ii*, contenue dans Y et dense dans Y puisque $x_n = (\lambda_n - \lambda)^{-1} \mathrm{A}_\lambda(x_n) \in \mathrm{A}_\lambda \mathrm{Y}$, donc $\mathrm{A}_\lambda \mathrm{Y} = \mathrm{Y}$. Par ailleurs $\mathrm{Y} \cap \ker \mathrm{A}_\lambda \neq \{0\}$ d'après le lemme 1.2-*iii* : puisque $\mathrm{A}_\lambda(x_n) \to 0$, (x_n) admet une sous-suite convergente vers un vecteur $x \in \mathrm{X}_0$ de norme 1, qui vérifie $\mathrm{A}_\lambda(x) = 0$. On a par conséquent $\operatorname{ind}(\mathrm{A}_{\lambda|\mathrm{Y}}) > 0$, et cela reste vrai pour λ' voisin de λ, ce qui implique que $\ker \mathrm{A}_{\lambda'} \neq \{0\}$ pour tout λ' dans un ouvert U contenant λ. Il en résulte que tous les points de U sont dans D, on a montré que D est ouvert.

Comme D est disjoint de Ω^*, il n'est pas égal à Ω, donc D est vide par connexité. Ainsi, aucun point $\lambda \in \Omega$ n'est limite de points $\lambda' \neq \lambda$ tels que $\ker \mathrm{A}_{\lambda'} \neq \{0\}$; autrement dit, tout point $\lambda \in \Omega$ possède un voisinage épointé dans lequel $\ker(\mathrm{A} - \lambda' \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}) = \{0\}$. Alors, pour tout $\lambda \in \Omega \cap \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, la conjonction de $i(\lambda') = 0$ et de $\ker(\mathrm{A} - \lambda' \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}) = \{0\}$ pour tout $\lambda' \neq \lambda$ voisin de λ montre que $\mathrm{A} - \lambda' \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ est inversible, ce qui signifie que λ est isolé dans le spectre. On termine la preuve avec le lemme 1.6. □

Corollaire 1.2. *Soit* Z *un espace de Banach complexe et soit* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$ *tel que le spectre de* $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ *dans* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Z})$ *soit un ensemble fini* Λ *; tous les points de* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \setminus \Lambda$ *sont isolés dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ *et sont des valeurs propres de* A*, de multiplicité finie.*

Preuve. Le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble fini Λ est un ensemble connexe Ω non borné, donc $\Omega \setminus \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ est non vide. Il suffit d'appliquer le lemme 1.7 précédent. □

Corollaire 1.3. *Si* Z *est un espace HI complexe et* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z})$*, le spectre de* $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ *dans* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{Z})$ *est un singleton* $\{\lambda\}$*, tous les points de* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \setminus \{\lambda\}$ *sont isolés dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ *et sont des valeurs propres de* A*, de multiplicité finie.*

Preuve. On sait que $\mathrm{A} - \mu \mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ est infiniment singulier pour tous les points μ au bord de $\mathrm{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A}))$ (lemme 1.4), mais un tel μ infiniment singulier est unique par la propriété HI de Z. Le bord de $\mathrm{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A}))$ est donc un singleton $\{\lambda\}$, ce qui entraîne aussi que $\mathrm{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})) = \{\lambda\}$. On applique le corollaire 1.2 pour conclure. □

1.3. *Complexification*

On propose dans cette section une liste d'observations plus naïves les unes que les autres. On représente le complexifié $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ d'un espace de Banach réel X comme étant le produit $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, en posant d'abord

$$\mathrm{i}\, z = \mathrm{i}\,(x, y) = (-y, x)$$

pour tout $z = (x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}$, puis $(a + \mathrm{i}\, b) z = a z + b(\mathrm{i} z)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$; on munit $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ d'une norme *complexe*, équivalente aux normes habituelles sur un produit, par exemple

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|_{\mathrm{X}}, \quad \text{si } z = (x, y). \tag{12}$$

De cette façon, on a $\|(x, 0)\| = \|x\|_{\mathrm{X}}$, $\|(x, 0)\| \leqslant \|(x, y)\|$ et surtout $\|\zeta z\| = |\zeta|\, \|z\|$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$. Cette $\mathbb{C}$-norme $\|(x, y)\|$ est clairement comprise entre les $\mathbb{R}$-normes sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ définies par $\max(\|x\|, \|y\|)$ et $(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$.

Pour chaque $x \in \mathrm{X}$ on notera $x^{\bullet} = (x, 0)$ son « image » dans la « partie réelle » $\mathrm{X}^{\bullet} = \mathrm{X} \times \{0\}$ de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$. De cette façon on peut écrire $z = x^{\bullet} + \mathrm{i}\, y^{\bullet}$ au lieu de $z = (x, y)$, mais on gardera la possibilité d'utiliser l'une ou l'autre écriture, selon la situation ; si on a $z = x^{\bullet} + \mathrm{i}\, y^{\bullet} \in \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, il est naturel de dire que $x \in \mathrm{X}$ est la *partie réelle* de z, qui sera notée $x = \Re z$.

Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ on définit l'opérateur « complexifié » $\mathrm{T}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ ainsi : pour tout vecteur $z = (x, y) \in \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, on pose

$$\mathrm{T}^{\mathbb{C}} z = (\mathrm{T}x, \mathrm{T}y) = (\mathrm{T}x, 0) + \mathrm{i}(\mathrm{T}y, 0) = (\mathrm{T}x)^{\bullet} + \mathrm{i}(\mathrm{T}y)^{\bullet} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}} x^{\bullet} + \mathrm{i}\, \mathrm{T}^{\mathbb{C}} y^{\bullet}.$$

Il est clair que l'application $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ est un homomorphisme d'algèbres réelles de $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ dans $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$; si p est un polynôme à coefficients réels, on a $p(\mathrm{T})^{\mathbb{C}} = p(\mathrm{T}^{\mathbb{C}})$.

On aura besoin aussi de l'opérateur $\mathbf{c}$ de « conjugaison complexe », défini sur $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ par $\mathbf{c}(x, y) = (x, -y)$ ou encore $\mathbf{c}(x^{\bullet} + \mathrm{i}\, y^{\bullet}) = x^{\bullet} - \mathrm{i}\, y^{\bullet}$; clairement, $\mathbf{c}$ vérifie $\mathbf{c}^2 = \mathrm{Id}$. L'opérateur $\mathbf{c}$ est anti-linéaire : avec $z = x^{\bullet} + \mathrm{i}\, y^{\bullet} \in \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ on a

$$\mathbf{c}(\mathrm{i} z) = \mathbf{c}(-y^{\bullet} + \mathrm{i} x^{\bullet}) = -y^{\bullet} - \mathrm{i} x^{\bullet} = -\mathrm{i}(x^{\bullet} - \mathrm{i}\, y^{\bullet}) = -\mathrm{i}\, \mathbf{c}(z),$$

par conséquent $\mathbf{c}(\lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}})\mathbf{c} = \overline{\lambda}\, \mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}}$. Notons aussi que si Z_0 est un $\mathbb{C}$-sous-espace de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, son image $\overline{\mathrm{Z}}_0 := \mathbf{c}\mathrm{Z}_0$ par $\mathbf{c}$ est encore un $\mathbb{C}$-sous-espace ; de plus, l'application $\mathbf{c}$ est isométrique pour la norme (12).

Si Z_0 est un $\mathbb{C}$-sous-espace de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, on désignera par $\Re \mathrm{Z}_0$ le $\mathbb{R}$-sous-espace de X formé des parties réelles des vecteurs de Z_0, c'est-à-dire formé des vecteurs $x_0 \in \mathrm{X}$ pour lesquels existe $y_0 \in \mathrm{X}$ tel que $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{Z}_0$. Si Y est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de X, on notera $\mathrm{Y}^{\mathbb{C}} := \mathrm{Y} \times \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, c'est un $\mathbb{C}$-sous-espace de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, on a clairement $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}(\mathrm{Y}^{\mathbb{C}}) = \mathrm{TY} \times \mathrm{TY} = (\mathrm{TY})^{\mathbb{C}}$. On dira qu'un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel Z_0 de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ est *de type réel* s'il est stable par conjugaison, c'est-à-dire que $\mathrm{Z}_0 = \overline{\mathrm{Z}}_0$.

Lemme 1.8. *On suppose que* X *est un espace de Banach réel et* Z_0 *un* $\mathbb{C}$*-sous-espace du complexifié* $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$.

i. Si $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0 \oplus \mathrm{X}_1$*, alors* $\mathrm{X}^{\mathbb{C}} = \mathrm{X}_0^{\mathbb{C}} \oplus \mathrm{X}_1^{\mathbb{C}}$*. Si* E *est de dimension finie dans* X*,* $\mathrm{E}^{\mathbb{C}}$ *est de dimension finie dans* $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ *et* $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{E}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{E}$*. Si* Y *est de* $\mathbb{R}$*-codimension finie dans* X*,* $\mathrm{Y}^{\mathbb{C}}$ *est de* $\mathbb{C}$*-codimension finie dans* $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ *et* $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \mathrm{Y}^{\mathbb{C}} = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \mathrm{Y}$.

ii. Si Z_0 *est de type réel, il est le carré d'un* $\mathbb{R}$*-sous-espace* X_0 *de* X *:* $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{X}_0^{\mathbb{C}}$.

iii. Si Z_0 *est de type réel et de* $\mathbb{C}$*-codimension finie* k *dans* $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$*, sa partie réelle* $\Re \mathrm{Z}_0$ *est de* $\mathbb{R}$*-codimension* k *dans* X*. Si* Z_0 *est de* $\mathbb{C}$*-codimension finie* k *dans* $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$*,* $\Re \mathrm{Z}_0$ *est de* $\mathbb{R}$*-codimension finie* $\leqslant k$ *dans* X*, et* Z_0 *contient un sous-espace* Z_1 *de type réel tel que* $k \leqslant \operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \mathrm{Z}_1 \leqslant 2k$.

Preuve. Les deux premières assertions du point i sont évidentes, la troisième en résulte. Passons au point ii ; si $x_0 \in \mathrm{X}_0 = \Re \mathrm{Z}_0$, il existe y_0 tel que $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{Z}_0$ et comme Z_0 est un $\mathbb{C}$-sous-espace, on a également $y_0 = -\Re(\mathrm{i} z_0) \in \mathrm{X}_0$, donc $\mathrm{Z}_0 \subset \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$ et de même $\overline{\mathrm{Z}}_0 \subset \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$, par conséquent $\mathrm{Z}_0 + \overline{\mathrm{Z}}_0 \subset \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$. Étant donné que $2x_0^{\bullet} = z_0 + \overline{z}_0$, le $\mathbb{C}$-sous-espace $\mathrm{Z}_0 + \overline{\mathrm{Z}}_0$ contient $x_0^{\bullet} = (x_0, 0)$ et $\mathrm{i} x_0^{\bullet} = (0, x_0)$; pour tous $x_0, x_1 \in \mathrm{X}_0$, on aura donc $(x_0, x_1) \in \mathrm{Z}_0 + \overline{\mathrm{Z}}_0$ et finalement

$$\mathrm{Z}_0 \subset \mathrm{Z}_0 + \overline{\mathrm{Z}}_0 = \Re \mathrm{Z}_0 \times \Re \mathrm{Z}_0 = (\Re \mathrm{Z}_0)^{\mathbb{C}}. \tag{13}$$

Pour finir la preuve du point ii, on note que $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{Z}_0 + \overline{\mathrm{Z}}_0$ quand Z_0 est de type réel.

Supposons que $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$ soit de type réel et de $\mathbb{C}$-codimension finie non nulle ; alors $\mathrm{X}_0 \neq \mathrm{X}$, il existe $u \notin \mathrm{X}_0$ et la $\mathbb{C}$-droite $\mathbb{C} u^{\bullet}$ de type réel formée des $au + \mathrm{i} bu$ intersecte Z_0 en $\{0\}$, la somme est directe : l'espace $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_0 \oplus \mathbb{C} u^{\bullet} = (\mathrm{X}_0 \oplus \mathbb{R} u)^{\mathbb{C}}$ est encore de type réel. Procédant de proche en proche, on trouvera $\mathrm{E} \subset \mathrm{X}$ de dimension finie tel que $\mathrm{X}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Z}_0 \oplus \mathrm{E}^{\mathbb{C}} = (\mathrm{X}_0 \oplus \mathrm{E})^{\mathbb{C}}$, ce qui prouve l'égalité des codimensions.

On a vu que $\mathrm{Z}_0 \subset (\Re \mathrm{Z}_0)^{\mathbb{C}}$; si Z_0 est de $\mathbb{C}$-codimension finie k, alors $(\Re \mathrm{Z}_0)^{\mathbb{C}}$ est de $\mathbb{C}$-codimension $\leqslant k$, et donc $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Re \mathrm{Z}_0 \leqslant k$; de plus, $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Z}_0 \cap \overline{\mathrm{Z}}_0 \subset \mathrm{Z}_0$ est de type réel et de $\mathbb{C}$-codimension finie comprise entre k et $2k$. $\square$

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, on voit que $\overline{\mathrm{A}} := \mathbf{c}\mathrm{A}\mathbf{c}$ est un autre opérateur $\mathbb{C}$-linéaire. Si $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ provient d'un « opérateur réel » T, on a $\mathbf{c}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathbf{c}$ puisque

$$\mathbf{c}\mathrm{A}(x, y) = \mathbf{c}(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y) = (\mathrm{T}x, -\mathrm{T}y) = \mathrm{A}(x, -y) = \mathrm{A}\mathbf{c}(x, y).$$

Ceci s'écrit encore $\mathrm{A} = \mathbf{c}\mathrm{A}\mathbf{c} = \overline{\mathrm{A}}$. Inversement, si A est « réel », c'est-à-dire que $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$ ou encore $\mathrm{A}\mathbf{c} = \mathbf{c}\mathrm{A}$, posons $\mathrm{A}(z) = \mathrm{B}_1(z)^\bullet + \mathrm{i}\mathrm{B}_2(z)^\bullet$ pour $z \in \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, avec B_1 et B_2 opérateurs $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ dans X. La $\mathbb{C}$-linéarité impose $\mathrm{B}_2(z) = -\mathrm{B}_1(\mathrm{i}z)$, donc $\mathrm{A}(z) = \mathrm{B}_1(z)^\bullet - \mathrm{i}\mathrm{B}_1(\mathrm{i}z)^\bullet$. Ensuite

$$\mathrm{A}\mathbf{c}(\mathrm{i}y^\bullet) = \mathrm{B}_1(-\mathrm{i}y^\bullet)^\bullet - \mathrm{i}\mathrm{B}_1(y^\bullet)^\bullet, \quad \mathbf{c}\mathrm{A}(\mathrm{i}y^\bullet) = \mathrm{B}_1(\mathrm{i}y^\bullet)^\bullet + \mathrm{i}\mathrm{B}_1(-y^\bullet)^\bullet,$$

donc $\mathrm{B}_1(\mathrm{i}y^\bullet) = 0$ et $\mathrm{B}_1(x^\bullet + \mathrm{i}y^\bullet) = \mathrm{B}_1(x^\bullet) =: \mathrm{T}(x)$. Ainsi $\mathrm{A}(x^\bullet + \mathrm{i}y^\bullet) = \mathrm{T}(x)^\bullet + \mathrm{i}\mathrm{T}(y)^\bullet$, on a bien $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$.

On désignera par $\Re\mathcal{L}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ le $\mathbb{R}$-sous-espace de $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ qui est formé des opérateurs « réels » A, ceux qui vérifient $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$, ou encore ceux qui s'écrivent $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ pour un certain $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$. L'écriture

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{A} - \overline{\mathrm{A}}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{A}_2$$

permet d'écrire tout $\mathrm{A} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ à partir de deux opérateurs *réels* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \Re\mathcal{L}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, et de voir ainsi qu'on peut identifier $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ à $\mathcal{L}(\mathrm{X})^{\mathbb{C}}$, le complexifié de $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. Il serait raisonnable de dire que $\mathrm{A}_1 = (\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}})/2 \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ est la partie réelle de $\mathrm{A} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, mais puisque A_1 est un « opérateur réel », on sait qu'il est de la forme $\mathrm{A}_1 = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$, et c'est cet opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ qu'on considérera comme *partie réelle* de A, on notera $\mathrm{T} = \Re\mathrm{A}$; on a par conséquent $(\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}})/2 = (\Re\mathrm{A})^{\mathbb{C}}$. L'application $\mathrm{A} \to \Re\mathrm{A}$ est $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. On ne parlera pas de partie imaginaire : après tout, on peut se contenter de dire que tout nombre complexe $\zeta \in \mathbb{C}$ se représente sous la forme $\zeta = \mathrm{Re}\zeta - \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}\zeta)$. Ainsi on aura pour tout opérateur $\mathrm{A} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ l'égalité

$$\mathrm{A} = (\Re\mathrm{A})^{\mathbb{C}} - \mathrm{i}(\Re(\mathrm{i}\mathrm{A}))^{\mathbb{C}}. \tag{14}$$

On voit que $\overline{\mathrm{AB}} = \mathbf{c}\mathrm{AB}\mathbf{c} = (\mathbf{c}\mathrm{A}\mathbf{c})(\mathbf{c}\mathrm{B}\mathbf{c}) = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}$. Il en résulte que si $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ est un projecteur de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$, alors $\overline{\mathrm{P}} = \mathbf{c}\mathrm{P}\mathbf{c}$ est un autre projecteur. De l'égalité $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}$ résulte aussi que l'inverse du conjugué est le conjugué de l'inverse. Ainsi,

$$\mathbf{c}(\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \mathrm{A})^{-1}\mathbf{c} = (\overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \overline{\mathrm{A}})^{-1}.$$

La résolvante de $\overline{\mathrm{A}}$ au point $\overline{\zeta}$ est donc l'opérateur conjugué de la résolvante $\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})$ de A en $\zeta \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, et le spectre de $\overline{\mathrm{A}}$ est le conjugué du spectre de A ; de plus, si λ est une valeur spectrale infiniment singulière pour A, le complexe conjugué $\overline{\lambda}$ est valeur spectrale infiniment singulière pour $\overline{\mathrm{A}}$; en effet, si on pose $\overline{z} = \mathbf{c}z$, on voit que

$$\overline{\mathrm{A}}\,\overline{z} - \overline{\lambda}\,\overline{z} = (\mathbf{c}\mathrm{A}\mathbf{c})(\mathbf{c}z) - \mathbf{c}(\lambda z) = \mathbf{c}(\mathrm{A}z - \lambda z)$$

a la même norme que $\mathrm{A}z - \lambda z$. Quand $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, le spectre de l'opérateur complexifié $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ est donc invariant par conjugaison, ainsi que l'ensemble des valeurs spectrales infiniment singulières.

Revenons au calcul fonctionnel holomorphe. Supposons que f, g holomorphes vérifient $\overline{f(\overline{\zeta})} = g(\zeta)$, la fonction f étant définie sur un ouvert D contenant le spectre de A (et par conséquent, la fonction g sera définie sur l'ouvert conjugué $\overline{\mathrm{D}}$ qui contient le spectre de $\overline{\mathrm{A}}$). Alors l'intégrale (2) qui définit l'opérateur $f(\mathrm{A})$ est limite de sommes finies de la forme

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \sum_i f(\zeta_i) \mathrm{R}(\zeta_i, \mathrm{A})(\zeta_{i+1} - \zeta_i),$$

qui sont conjuguées en

$$-\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \sum_i \overline{f(\zeta_i)} \mathrm{R}(\overline{\zeta}_i, \overline{\mathrm{A}})(\overline{\zeta}_{i+1} - \overline{\zeta}_i) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \sum_i g(\overline{\zeta}_i) \mathrm{R}(\overline{\zeta}_i, \overline{\mathrm{A}})(\overline{\zeta}_{i+1} - \overline{\zeta}_i),$$

approximation d'une intégrale concernant $\overline{\mathrm{A}}$, prise sur le contour conjugué $\overline{\gamma}$, avec le « sens positif » préservé par une double inversion de signe : le lacet conjugué est parcouru « en sens inverse ». On en déduit

$$\overline{f(\mathrm{A})} = g\big(\overline{\mathrm{A}}\big). \tag{15}$$

Si $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}} = \overline{\mathrm{A}} \in \Re\mathcal{L}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ est réel, on a simplement $\overline{f(\mathrm{A})} = g(\mathrm{A})$. Si de plus le spectre de A, non connexe, contient un compact K qui est aussi ouvert dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathrm{K}}$ est le projecteur spectral (7), alors le projecteur « conjugué » $\overline{\mathrm{P}} = \mathbf{c}\mathrm{P}\mathbf{c}$ est le projecteur spectral pour le compact conjugué $\overline{\mathrm{K}} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$: en effet, si f est holomorphe dans un voisinage Ω du spectre de A, vaut 1 au voisinage de K et 0 ailleurs, alors $\mathrm{P} = f(\mathrm{A})$ et $\overline{\mathrm{P}} = g(\mathrm{A})$ d'après (15), g étant définie par $g(\zeta) = \overline{f(\overline{\zeta})}$ pour tout $\zeta \in \overline{\Omega}$, valant donc 1 au voisinage de $\overline{\mathrm{K}}$ et 0 ailleurs. Si $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{P}\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ est l'image de P (image invariante par A), on voit que l'image de $\overline{\mathrm{P}}$ est $\overline{\mathrm{Z}}_0 = \mathbf{c}\mathrm{Z}_0$.

Si $\mathrm{P} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ est un projecteur, écrivons $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{P}_2)/2$, avec P_1 et P_2 « réels », c'est-à-dire éléments de $\Re\mathcal{L}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$. L'équation $4\mathrm{P}^2 = 4\mathrm{P}$ se traduit par

$$\mathrm{P}_1^2 - \mathrm{P}_2^2 = 2\mathrm{P}_1, \quad \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = 2\mathrm{P}_2. \tag{16}$$

1.4. *Strictement singuliers, Fredholm et complexification*

Il faut faire attention à un point : quand on parle de $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ dans le cas réel, on s'intéresse aux sous-espaces réels, alors que $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ s'adresse aux seuls sous-espaces complexes. Par ailleurs, pour calculer l'indice des opérateurs de Fredholm, il faut bien sûr utiliser les $\mathbb{R}$-codimensions dans le cas réel et les $\mathbb{C}$-codimensions dans le cas complexe.

Lemme 1.9. *Soit* X *un espace de Banach réel.*

i. Un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *induit un isomorphisme de* $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ *sur l'image* TY *si et seulement si* $\mathrm{T}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ *induit un isomorphisme de* $\mathrm{Y}^{\mathbb{C}}$ *sur l'image* $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}(\mathrm{Y}^{\mathbb{C}})$.

ii. Un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *est finiment singulier si et seulement si* $\mathrm{T}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ *est finiment singulier. L'opérateur* T *est de Fredholm si et seulement si* $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ *est de Fredholm, et l'indice (réel) de* T *est égal à l'indice (complexe) de* $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$.

iii. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, *alors* $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ *si et seulement si* $\mathrm{S}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$.

Preuve. Si T induit un isomorphisme de $\mathrm{Y} \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X})$ sur TY, il existe $c > 0$ tels que $\|\mathrm{T}(y)\| \geqslant c\|y\|$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$. Alors

$$\|\mathrm{T}^{\mathbb{C}}(y_1^{\bullet} + \mathrm{i}y_2^{\bullet})\| = \|\mathrm{T}(y_1)^{\bullet} + \mathrm{i}\,\mathrm{T}(y_2)^{\bullet}\| \geqslant \max(\|\mathrm{T}(y_1)\|, \|\mathrm{T}(y_2)\|)$$

$$\geqslant c\max(\|y_1\|, \|y_2\|) \geqslant (c/2)\,\|y_1^{\bullet} + \mathrm{i}y_2^{\bullet}\|, \quad y_1, y_2 \in \mathrm{Y},$$

où on a utilisé la norme (12) sur $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ et ses propriétés. L'inverse est évident : si on sait que $\|\mathrm{T}^{\mathbb{C}}(z)\| \geqslant c\|z\|$ pour tout $z \in \mathrm{Y}^{\mathbb{C}}$, on note que $y^{\bullet} \in \mathrm{Y}^{\mathbb{C}}$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$ et

$$\|\mathrm{T}(y)\| = \|\mathrm{T}(y)^{\bullet}\| = \|\mathrm{T}^{\mathbb{C}}(y^{\bullet})\| \geqslant c\|y^{\bullet}\| = c\|y\|, \quad y \in \mathrm{Y}.$$

Si T est finiment singulier, il induit un isomorphisme d'un certain $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ sur l'image $\mathrm{TY}^{(0)}$. Alors $\mathrm{Y}^{(0)\mathbb{C}}$ est de $\mathbb{C}$-codimension finie dans $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ d'après le lemme 1.8 et $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Y}^{(0)\mathbb{C}}$ sur l'image, d'après le premier point, donc $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ est finiment singulier. Inversement, si Z_0 est de codimension finie dans $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ et $\|\mathrm{T}^{\mathbb{C}}(z_0)\| \geqslant c\|z_0\|$ pour tout $z_0 \in \mathrm{Z}_0$, on sait que Z_0 contient $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{Y}_1^{\mathbb{C}}$ avec $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{X}$ de codimension finie d'après le lemme 1.8-*iii*, donc T induit un isomorphisme de $\mathrm{Y}_1 \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ sur l'image TY_1 d'après le premier point.

Si T est de Fredholm, il induit encore un isomorphisme de $\mathrm{Y}^{(0)} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ sur l'image, mais de plus $\mathrm{TY}^{(0)}$ est de codimension finie. On a vu que $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ induit alors un isomorphisme de $\mathrm{Y}^{(0)\mathbb{C}}$ sur l'image $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}\mathrm{Y}^{(0)\mathbb{C}}$, et cette image est égale à $\mathrm{TY}^{(0)} \times \mathrm{TY}^{(0)}$: le résultat provient du lemme 1.8-*i*.

Pour le point *iii*, supposons d'abord que $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$; dans cette direction, on a en fait un résultat *a priori* plus fort : si $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, l'opérateur $\mathrm{S}^{\mathbb{C}}$ est strictement singulier *au sens réel* sur $\mathrm{X}^{\mathbb{C}} = \mathrm{X} \times \mathrm{X}$. En effet, si on écrit $\mathrm{S}^{\mathbb{C}} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2$, avec $\mathrm{S}_1(x, y) = (\mathrm{S}(x), 0)$ et $\mathrm{S}_2(x, y) = (0, \mathrm{S}(y))$, il suffit de voir que S_1 et S_2 sont strictement singuliers. Le résultat est clair puisque $\mathrm{S}_1 = j_1\mathrm{S}\pi_1$, où $\pi_1(x, y) = x$ et $j_1(x) = (x, 0)$, même preuve pour $\mathrm{S}_2 = j_2\mathrm{S}\pi_2$.

L'implication inverse est encore plus facile : si $\mathrm{S}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, considérons un sous-espace réel quelconque $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$; alors $\mathrm{Y}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$ est un $\mathbb{C}$-sous-espace, donc il existe un vecteur $z = (y_1, y_2) \in \mathrm{Y}^{\mathbb{C}}$ de norme 1 tel que $\mathrm{S}^{\mathbb{C}}(z) = (\mathrm{S}(y_1), \mathrm{S}(y_2))$ soit petit, donc $\mathrm{S}(y_1)$ *et* $\mathrm{S}(y_2)$ sont petits, mais y_1 *ou* y_2 n'est pas petit, ce qu'il nous fallait trouver : un vecteur « pas petit » dans Y, avec une petite image par S. □

Corollaire 1.4. *Soient* X *un espace HI réel,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *et* $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ *son complexifié. Le spectre de* $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ *dans* $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ *est soit un singleton* $\{\lambda\}$*,* λ *réel, soit un ensemble de la forme* $\{\lambda, \overline{\lambda}\}$*,* $\lambda \notin \mathbb{R}$ *; tous les points de* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \setminus \{\lambda, \overline{\lambda}\}$ *sont isolés dans* $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ *et sont des valeurs propres de* A*, de multiplicité finie.*

Preuve. Il est possible qu'il existe λ réel tel que l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ soit infiniment singulier, donc strictement singulier puisque X est HI (corollaire 1.1). Notons $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$; le complexifié $\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ est strictement singulier d'après le lemme précédent 1.9. Alors $\mathrm{A} - \mu\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}} = (\lambda - \mu)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}} + (\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}})$ sera Fredholm pour tout $\mu \neq \lambda$ (proposition 2) et le spectre de $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{A})$ sera le singleton $\{\lambda\}$.

Dans le cas contraire, on sait (comme toujours) que le complexifié A admet au moins une valeur infiniment singulière λ (lemme 1.4), mais on a ici $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Considérons le polynôme p_λ à coefficients réels défini par $p_\lambda(t) = (t - \lambda)(t - \overline{\lambda}) = t^2 - 2(\mathrm{Re}\,\lambda)t + |\lambda|^2$, pour $t \in \mathbb{R}$. L'opérateur $p_\lambda(\mathrm{A}) = (\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}})(\mathrm{A} - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}}) = p_\lambda(\mathrm{T})^{\mathbb{C}}$ est infiniment singulier, donc $p_\lambda(\mathrm{T})$ aussi ; comme X est HI, $p_\lambda(\mathrm{T})$ est strictement singulier. Si μ est une autre valeur infiniment singulière pour A, $(p_\lambda - p_\mu)(\mathrm{T})$ est strictement singulier, ce qui n'est possible ici que si $p_\lambda = p_\mu$, puisque $p_\lambda - p_\mu$ est de degré $\leqslant 1$, mais ne peut être ni de degré 1 (il aurait une racine réelle a telle que $\mathrm{T} - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ soit infiniment singulier, ce qu'on a exclu ici) ni une constante non nulle. On a donc

$$\mathrm{Re}\lambda = \mathrm{Re}\mu,\ \ |\lambda|^2 = |\mu|^2,$$

qui implique que $\mu \in \{\lambda, \overline{\lambda}\}$. La fin de la preuve est identique à celle du corollaire 1.3.
□

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ et si $\mathrm{Z}_0 \in \mathcal{G}_\infty(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, il existe $z \in \mathbf{c}\mathrm{Z}_0 = \overline{\mathrm{Z}}_0$ de norme 1 sur lequel A est petit, donc $\overline{\mathrm{A}} = \mathbf{c}\mathrm{A}\mathbf{c}$ est petit sur $\mathbf{c}z \in \mathrm{Z}_0$, puisque $\|\overline{\mathrm{A}}(\mathbf{c}z)\| = \|\mathbf{c}\mathrm{A}(z)\| = \|\mathrm{A}(z)\|$; autrement dit, $\overline{\mathrm{A}} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, il en résulte que $(\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}})/2 = (\Re\mathrm{A})^{\mathbb{C}}$ et aussi $(\mathrm{A} - \overline{\mathrm{A}})/(2\mathrm{i}) = -\Re(\mathrm{i}\mathrm{A})^{\mathbb{C}}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, et l'inverse est évident d'après (14). De plus, l'opérateur $(\Re\mathrm{A})^{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-strictement singulier si et seulement si $\Re\mathrm{A} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$, et de même pour $\Re(\mathrm{i}\mathrm{A})$.

L'algèbre quotient complexe $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}}) = \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})/\mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ peut être vue comme complexifiée de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$. En effet, si a est une classe mod. $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ et $\mathrm{A}, \mathrm{A}' \in \mathcal{L}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ deux représentants de a, on sait que $\mathrm{A} - \mathrm{A}' \in \mathcal{S}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$ donc $\Re(\mathrm{A} - \mathrm{A}') = \Re\mathrm{A} - \Re\mathrm{A}' \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$. Ainsi la classe mod. $\mathcal{S}(\mathrm{X})$ de $\Re\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ ne dépend que de la classe a, on peut adopter la notation $\Re a \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$. La classe a peut s'écrire sous la forme $a = (\Re a)^{\mathbb{C}} - \mathrm{i}\,\Re(\mathrm{i}a)^{\mathbb{C}}$.

2. Quarts de tour

Si X est un espace de Banach réel, un *quart de tour* sera une application $\rho \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ telle que $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$. Si Z est un espace de Banach complexe, l'application $\mathrm{T} = \mathrm{i}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ vérifie $\mathrm{T}^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ mais ne sera pas intéressante pour la suite : dans le cas complexe, un quart de tour sera une application *anti-linéaire* ρ de Z dans Z vérifiant $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$ (rappelons que le produit de deux anti-linéaires est évidemment linéaire, et que l'image anti-linéaire d'un $\mathbb{C}$-sous-espace est un $\mathbb{C}$-sous-espace). On notera $\mathcal{R}(\mathrm{X})$ ou $\mathcal{R}(\mathrm{Z})$ l'ensemble (peut-être vide) de ces applications.

Pour traiter les cas réel et complexe ensemble, on va poser $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dira « $\mathbb{K}$-anti-linéaire » et on écrira des conjugués $\overline{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$, ce qui est un peu absurde quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — mais pas faux —. Considérons donc un $\mathbb{K}$-espace de Banach Z et une application ρ de Z dans Z, qui soit $\mathbb{K}$-*anti-linéaire* et qui vérifie $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}}$. On voit que z et $\rho(z)$ sont $\mathbb{K}$-indépendants quand z est non nul : si on a

$$\alpha z + \beta\rho(z) = 0, \quad \text{on déduit} \quad -\overline{\beta}z + \overline{\alpha}\rho(z) = 0$$

en appliquant ρ, puis $(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta})z = 0$ qui implique que les coefficients α, β de la combinaison linéaire doivent être nuls.

Si X est un espace de Banach réel, si $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ et si $x \in \mathrm{X}$ est non nul, on considérera le cercle $\mathrm{C}_\rho(x) = \{x\cos\theta + \rho(x)\sin\theta : \theta \in [0, 2\pi)\}$; quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le « cercle » $\mathrm{C}_\rho(z)$, pour $z \neq 0$, est complexe (c'est en fait une sphère S^3 dans $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$), il est défini par

$$\mathrm{C}_\rho(z) = \{zu\cos\theta + \rho(z)v\sin\theta : \theta \in \mathbb{R},\ u, v \in \mathbb{C},\ |u| = |v| = 1\}.$$

Afin de regrouper les deux cas, pour un $\mathbb{K}$-espace Z et pour $z \neq 0$, on écrira

$$\mathrm{C}_\rho(z) = \{zu\cos\theta + \rho(z)v\sin\theta : \theta \in \mathbb{R},\, u, v \in \mathbb{K},\, |u| = |v| = 1\}.$$

Posons $z_1 = zu\cos\theta + \rho(z)v\sin\theta$; on a par Cauchy–Schwarz $\|z_1\|^2 \leqslant \|z\|^2 + \|\rho(z)\|^2$, donc

$$\|z_1\| \leqslant \sqrt{1 + \|\rho\|^2}\, \|z\| \tag{17}$$

pour tout $z_1 \in \mathrm{C}_\rho(z)$. On posera

$$\mathrm{K}_\rho = \sqrt{1 + \|\rho\|^2}\,; \quad \kappa_\rho = \mathrm{K}_\rho^{-1}.$$

Si on reprend $z_1 = zu\cos\theta + \rho(z)v\sin\theta \in \mathrm{C}_\rho(z)$ et si on pose $\alpha = u\cos\theta$, $\beta = v\sin\theta$, on écrit $z_1 = \alpha z + \beta\rho(z)$ et on peut exprimer le couple $(z_1, \rho(z_1))$ sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \rho(z_1) \end{pmatrix} = \mathrm{U} \begin{pmatrix} z \\ \rho(z) \end{pmatrix}, \quad \text{où } \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Le déterminant de la matrice U est égal à 1 ; en fait, la matrice U est unitaire (ou orthogonale), mais pas unitaire quelconque : par exemple, sa trace est réelle. Le produit de deux matrices du type U précédent reste du même type,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\overline{\beta}_1 & \overline{\alpha}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 - \beta\overline{\beta}_1 & \alpha\beta_1 + \beta\overline{\alpha}_1 \\ -\overline{\beta}\alpha_1 - \overline{\alpha}\overline{\beta}_1 & -\overline{\beta}\beta_1 + \overline{\alpha}\overline{\alpha}_1 \end{pmatrix},$$

le produit reste bien sûr unitaire et de déterminant égal à 1. On déduit que si $z_1 \in \mathrm{C}_\rho(z)$, alors $\mathrm{C}_\rho(z_1) = \mathrm{C}_\rho(z)$, donc $\|z\| \leqslant \mathrm{K}_\rho \|z_1\|$ pour tout $z_1 \in \mathrm{C}_\rho(z)$.

Lemme 2.1. *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que Z est un $\mathbb{K}$-espace de Banach et $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{Z})$. Si un $\mathbb{K}$-sous-espace Y de codimension finie de Z est stable par ρ, sa $\mathbb{K}$-codimension est paire.*

Preuve. Si $y \in \mathrm{Y}$, alors $\mathrm{C}_\rho(y) \subset \mathrm{Y}$ puisque $\mathrm{C}_\rho(y)$ est contenu dans le $\mathbb{K}$-plan $[y, \rho(y)]$ engendré par y et $\rho(y)$, et que $\rho(y) \in \mathrm{Y}$ parce que Y est ρ-stable ; si $\mathrm{C}_\rho(z)$ rencontre Y en y, alors $\mathrm{C}_\rho(z) = \mathrm{C}_\rho(y)$ est contenu dans Y, donc $z \in \mathrm{Y}$. Pour tout $z \notin \mathrm{Y}$, on trouvera donc un complément $[z, \rho(z)]$ à Y, de $\mathbb{K}$-dimension 2 et stable par ρ. Si Y est de codimension finie dans Z, on obtient avec $\mathrm{Y} \oplus [z, \rho(z)]$ un nouveau $\mathbb{K}$-sous-espace ρ-stable de codimension diminuée de 2. Par récurrence, on prouve alors que Z est la somme directe de Y et d'un sous-espace E de X, où E est de $\mathbb{K}$-dimension finie paire (et cet espace E est ρ-stable). □

Si Y est stable par $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{Z})$, on a $\rho\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$ puisque tout $y \in \mathrm{Y}$ s'écrit $y = \rho(-\rho(y))$ avec $-\rho(y) \in \mathrm{Y}$. C'est le bon moment pour prouver le lemme suivant, même si son application n'interviendra que nettement plus tard.

Lemme 2.2. *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{Z}$ un $\mathbb{K}$-espace de Banach, $\rho \in \mathcal{R}(\mathcal{Z})$ un « quart de tour » et $\mathcal{Y}$ un $\mathbb{K}$-hyperplan de $\mathcal{Z}$.*

i. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur $e_0 \in \mathcal{Z}$ tel que $\mathrm{dist}(e_0, \mathcal{Y}) = 1$, $\rho(e_0) \in \mathcal{Y}$, et tel que $\|e_0\| \leqslant \mathrm{K}_\rho + \varepsilon$, $\|\rho(e_0)\| \leqslant \mathrm{K}_\rho + \varepsilon$.

ii. *Le $\mathbb{K}$-sous-espace $\mathcal{Y} \cap \rho\mathcal{Y}$ est un $\mathbb{K}$-hyperplan de $\mathcal{Y}$, invariant par ρ. Pour tout $y \in \mathcal{Y}$ on a l'inégalité*
$$\mathrm{dist}(y, \mathcal{Y} \cap \rho\mathcal{Y}) \leqslant \mathrm{K}_\rho \,\mathrm{dist}(\rho(y), \mathcal{Y}).$$

Preuve. Introduisons une forme $\mathbb{K}$-linéaire ξ sur $\mathcal{Z}$ telle que $\mathcal{Y} = \ker \xi$, et supposons que ξ soit de norme 1. Il en résulte que $\mathrm{dist}(z, \mathcal{Y}) = |\xi(z)|$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$. Il existe $z_0 \in \mathcal{Z}$ de norme $< 1 + \varepsilon$ tel que $\xi(z_0) = 1$. Comme $\mathcal{Y}$ est de $\mathbb{K}$-codimension 1 dans $\mathcal{Z}$ et $[z_0, \rho(z_0)]$ de $\mathbb{K}$-dimension 2, le « cercle » $\mathrm{C}_\rho(z_0)$ rencontre $\mathcal{Y}$, disons en y_1, donc $\xi(y_1) = 0$. Posons $z_1 = \rho(y_1)$; on a $\rho(z_1) = -y_1 \in \mathcal{Y}$. On sait que $\mathrm{C}_\rho(z_1) = \mathrm{C}_\rho(z_0)$, on peut écrire par conséquent, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ et pour $u, v \in \mathbb{K}$ de module 1, que

$$z_0 = z_1 u \cos\theta + \rho(z_1) v \sin\theta = z_1 u \cos\theta - y_1 v \sin\theta,$$

par conséquent
$$1 = \xi(z_0) = \xi(z_1) u \cos\theta, \quad |\xi(z_1)| \geqslant 1,$$
et on sait que $\|z_1\|, \|y_1\| \leqslant \mathrm{K}_\rho \|z_0\| < (1+\varepsilon)\mathrm{K}_\rho$. On pose $e_0 = \xi(z_1)^{-1} z_1 = z_1 u \cos\theta$, d'où $\xi(e_0) = 1 = \mathrm{dist}(e_0, \mathcal{Y})$, par conséquent $e_0, z_1 \notin \mathcal{Y}$. On a $\rho(e_0) \in \mathcal{Y}$, de plus, on voit que $\|e_0\| \leqslant \|z_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{K}_\rho$ et de même pour $\|\rho(e_0)\| \leqslant \|\rho(z_1)\| = \|y_1\| \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{K}_\rho$.

L'image $\rho\mathcal{Y}$ du $\mathbb{K}$-sous-espace $\mathcal{Y}$ par l'application $\mathbb{K}$-anti-linéaire ρ reste un $\mathbb{K}$-sous-espace ; introduisons $\mathrm{V} = \mathcal{Y} \cap \rho\mathcal{Y}$; comme $\rho^2 = -\mathrm{Id}_{\mathcal{Z}}$, on constate que

$$\mathrm{V} = \mathcal{Y} \cap \rho\mathcal{Y} = \{y \in \mathcal{Y} : \rho(y) \in \mathcal{Y}\} \,;$$

ce $\mathbb{K}$-sous-espace V est distinct de $\mathcal{Y}$ (on a $y_1 \notin \mathrm{V}$ puisque $\rho(y_1) = z_1 \notin \mathcal{Y}$), donc V est un $\mathbb{K}$-hyperplan de $\mathcal{Y}$; de plus V est clairement stable par ρ. Considérons un vecteur $y \in \mathcal{Y}$ quelconque. Puisque $\mathcal{Z} = \mathbb{K}e_0 \oplus \mathcal{Y}$, on a pour un certain $y' \in \mathcal{Y}$ et pour un a scalaire les égalités

$$\rho(y) = a e_0 + y', \quad \rho(\rho(y)) = -y = \overline{a}\rho(e_0) + \rho(y'),$$

d'où résulte que $\rho(y') = -y - \overline{a}\rho(e_0) \in \mathcal{Y}$ puisque $\rho(e_0) \in \mathcal{Y}$, donc $\rho(y') \in \mathrm{V}$; on déduit que $\mathrm{dist}(y, \mathrm{V}) \leqslant \|\overline{a}\rho(e_0)\| \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{K}_\rho |a|$. D'autre part $\mathrm{dist}(\rho(y), \mathcal{Y}) = |\xi(\rho(y))| = |a|$, d'où $\mathrm{dist}(y, \mathrm{V}) \leqslant (1+\varepsilon)\mathrm{K}_\rho \,\mathrm{dist}(\rho(y), \mathcal{Y})$, et le résultat est obtenu quand $\varepsilon \to 0$. □

Remarque. Supposons l'espace $\mathcal{Z}$ réflexif ; on peut alors prendre $\varepsilon = 0$, car on peut trouver z_0 de norme 1 satisfaisant $\xi(z_0) = 1$. Si on a renormé $\mathcal{Z}$ de façon que tous les points de $\mathrm{C}_\rho(z)$ aient la même norme, on aura aussi $|y_1| = |z_1| = |z_0| = 1$.

Comme on l'a indiqué, le lemme 2.2 ne serait pas vrai dans le cas complexe pour une application ρ vérifiant $\rho^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{Z}$ mais *qui soit $\mathbb{C}$-linéaire* : il serait possible que la dimension complexe du $\mathbb{C}$-sous-espace $[z, \rho(z)]$ soit égale à 1 (quand $\rho(z) = \pm \mathrm{i}\, z$), ou en d'autres termes, qu'un $\mathbb{C}$-hyperplan Y soit ρ-stable.

Lemme 2.3. *Soient* X *un espace de Banach réel et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *; on suppose que le spectre de l'opérateur complexifié* $\mathrm{T}^\mathbb{C}$ *contient un compact-ouvert* K *contenu dans le demi-plan supérieur* $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ *du plan complexe* $\mathbb{C}$. *Soit* $\mathrm{P_K} = \mathrm{P_K}(\mathrm{T}^\mathbb{C})$ *le projecteur spectral (7) associé au compact* K, *soit* $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{P_K}\mathrm{X}^\mathbb{C}$ *son image et* $\mathrm{X}_0 = \Re \mathrm{Z}_0 \subset \mathrm{X}$ *la partie réelle de* Z_0 *; il existe un opérateur* $\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ *tel que* Z_0 *se représente comme graphe de* φ, *à savoir*
$$\mathrm{Z}_0 = \{(x_0, \varphi(x_0)) : x_0 \in \mathrm{X}_0\}.$$

De plus, on a $\mathrm{X}_0 = q\mathrm{X}$ *où* q *est le projecteur dans* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ *qui est défini par l'égalité* $(\mathrm{P}_\mathrm{K} + \overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K})(x, y) = (q(x), q(y))$ *pour tous* $x, y \in \mathrm{X}$.

Si le complémentaire dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^\mathbb{C})$ *de* $\mathrm{K} \cup \overline{\mathrm{K}}$ *est un ensemble fini formé de valeurs propres de multiplicité finie, alors* X_0 *est de codimension finie dans* X.

Bien entendu, Z_0 sera alors aussi bien *l'anti-graphe* de $\rho = \varphi^{-1} = -\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$,

$$\mathrm{Z}_0 = \{(\rho(y_0), y_0) : y_0 \in \mathrm{X}_0\}.$$

Cette présentation comme anti-graphe pourra être mieux adaptée dans certains cas.

Preuve. Posons $\mathrm{A} = \mathrm{T}^\mathbb{C} \in \mathcal{L}^\mathbb{C}(\mathrm{X}^\mathbb{C})$ et $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\mathrm{K}$; le spectre $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ de A est stable par conjugaison. Puisque le compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ de l'énoncé est contenu dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, il est disjoint de son conjugué $\overline{\mathrm{K}} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. On a donc $\overline{\mathrm{P}}\mathrm{P} = \mathrm{P}\overline{\mathrm{P}} = 0$ d'après (9) ; on en déduit que l'opérateur $\mathrm{Q} = \mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}}$ est le projecteur spectral pour $\mathrm{K} \cup \overline{\mathrm{K}}$, il est « réel », et on déduit aussi que $\overline{\mathrm{P}}$ est nul sur Z_0 et P nul sur $\overline{\mathrm{Z}}_0$. Si $z_0 = \overline{w}_0 \in \mathrm{Z}_0 \cap \overline{\mathrm{Z}}_0$, il en résulte que $z_0 = \mathrm{P}(z_0) = \mathrm{P}(\overline{w}_0) = 0$, donc $\mathrm{Z}_0 \cap \overline{\mathrm{Z}}_0 = \{0\}$, la somme $\mathrm{Z}_0 \oplus \overline{\mathrm{Z}}_0$ est directe ; on voit aussi que l'image $\mathrm{Q}\mathrm{X}^\mathbb{C}$ de Q est égale à $\mathrm{Z}_0 \oplus \overline{\mathrm{Z}}_0$.

Posons $\mathrm{X}_0 = \Re \mathrm{Z}_0$; on a vu en (13) que $\mathrm{Z}_0 + \overline{\mathrm{Z}}_0 = \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$. Le projecteur réel $\mathrm{Q} \in \Re\mathcal{L}(\mathrm{X}^\mathbb{C})$ agit par $\mathrm{Q}(x, y) = \big(q(x), q(y)\big)$ où $q \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est un projecteur de X ; puisque l'image de Q est égale à $\mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$, on a $q\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$. Comme la somme $\mathrm{Z}_0 \oplus \overline{\mathrm{Z}}_0$ est directe, Z_0 considéré dans $\mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$ est le graphe d'une application $\mathbb{R}$-linéaire définie sur X_0 : en effet, si $(0, y_0) \in \mathrm{Z}_0$, alors $(0, -y_0) \in \overline{\mathrm{Z}}_0$, donc $(0, y_0) \in \mathrm{Z}_0 \cap \overline{\mathrm{Z}}_0$ et $y_0 = 0$. Il existe donc une application linéaire φ définie sur X_0 telle que

$$\mathrm{Z}_0 = \{(x_0, \varphi(x_0)) : x_0 \in \mathrm{X}_0\}.$$

On sait d'avance que φ est continue, puisque son graphe Z_0 est fermé ! On considérera φ comme élément de $\mathcal{L}(\mathrm{X}_0)$. Puisque Z_0 est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel, il contient aussi le vecteur $\mathrm{i}\,(x_0, \varphi(x_0)) = (-\varphi(x_0), x_0)$, ce qui implique que $x_0 = \varphi(-\varphi(x_0))$ pour tout $x_0 \in \mathrm{X}_0$, autrement dit, on a $\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$. Le sous-espace conjugué $\overline{\mathrm{Z}}_0$ est le graphe de l'application $\rho = -\varphi = \varphi^{-1} \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$.

Supposons pour finir que $\mathrm{L} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}^\mathbb{C}) \setminus (\mathrm{K} \cup \overline{\mathrm{K}})$ soit fini, formé de valeurs propres de multiplicité finie. Alors P_L est de rang fini, et

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^\mathbb{C}} = \mathrm{P}_{\mathrm{Sp}(\mathrm{T}^\mathbb{C})} = \mathrm{P}_\mathrm{L} + \mathrm{P}_{\mathrm{K} \cup \overline{\mathrm{K}}} = \mathrm{P}_\mathrm{L} + \mathrm{Q}.$$

Le projecteur spectral P_L étant de rang fini, il en résulte que l'image $\mathrm{Z}_0 \oplus \overline{\mathrm{Z}}_0$ du projecteur $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_\mathrm{K} + \overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K}$ est de codimension finie dans $\mathrm{X}^\mathbb{C}$. Comme $\mathrm{Z}_0 \oplus \overline{\mathrm{Z}}_0 = \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0$, on déduit que X_0 est de codimension finie dans X. □

Si on écrit $2\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{i}\mathrm{P}_2$ comme en (16), on a également maintenant $\mathrm{P}\overline{\mathrm{P}} = 0$, avec $2\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}_1 - \mathrm{i}\mathrm{P}_2$, qui fournit $\mathrm{P}_1^2 + \mathrm{P}_2^2 = 0$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = 0$, de sorte qu'avec (16) on retrouve $\mathrm{P}_1^2 = \mathrm{P}_1$; on voit aussi que $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_1$; l'opérateur P_1 est donc le projecteur « réel » qui agit par $\mathrm{P}_1(x, y) = \mathrm{Q}(x, y) = (q(x), q(y))$. On a vu que $\mathrm{P}_2(x, y) = (\varphi q(x), \varphi q(y))$, on a finalement

$$\mathrm{P}_\mathrm{K}(x^\bullet + \mathrm{i}\, y^\bullet) = \frac{(q(x) - \varphi q(y))^\bullet + \mathrm{i}\,(\varphi q(x) + q(y))^\bullet}{2} \in \mathrm{Z}_0, \quad x, y \in \mathrm{X}.$$

Remarque 2. Supposons que dans le lemme précédent on ait $\mathrm{T} = \rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$. L'opérateur complexifié $\rho^{\mathbb{C}}$ admet les seules valeurs spectrales i et $-\mathrm{i}$; considérons $\mathrm{K} = \{\mathrm{i}\}$, compact-ouvert du spectre de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}} = \rho^{\mathbb{C}}$. Notons que $\mathrm{B} := (\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} + \mathrm{i}\,\rho^{\mathbb{C}})/2$ est un projecteur de $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$. Soit $\mathrm{Z}_0 \subset \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ l'image du projecteur spectral $\mathrm{P}_{\{\mathrm{i}\}}$; ce sous-espace Z_0 est invariant par $\rho^{\mathbb{C}}$ et par B, et 0 est la seule valeur spectrale de la restriction $\mathrm{B}_{\restriction \mathrm{Z}_0} \in \mathcal{L}(\mathrm{Z}_0)$, projecteur de Z_0 : ce projecteur est donc nul, et on obtient ainsi que $\rho^{\mathbb{C}}(z_0) = \mathrm{i}\,z_0$ pour tout $z_0 \in \mathrm{Z}_0$. Si $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{Z}_0$, on a

$$\rho^{\mathbb{C}}(z_0) = (\rho(x_0), \rho(y_0)) = \mathrm{i}\,z_0 = (-y_0, x_0),$$

et par conséquent $x_0 = \rho(y_0)$ pour tout $y_0 \in \mathrm{X}_0 = \Re \mathrm{Z}_0$. Les éléments de Z_0 peuvent s'écrire $(\rho(y_0), y_0)$, pour y_0 variant dans X_0. Le lemme 2.3, appliqué à $\mathrm{T} = \rho$, $\mathrm{K} = \{\mathrm{i}\}$, dit que Z_0 est l'anti-graphe d'un élément de $\mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$, c'est en fait ici l'anti-graphe de l'application $\rho = \mathrm{T}$ donnée au départ. De plus, $\mathrm{X}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Z}_0 \oplus \overline{\mathrm{Z}}_0$ dans le cas présent, il en résulte que $\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}$.

On pourrait s'étonner du fait qu'on n'ait pas trouvé d'estimation pour la norme de l'application φ du lemme 2.3. C'est en fait normal, si le problème est posé en nos termes. Considérons un quart de tour ρ dans $\mathbb{R}^2$ euclidien ; en prenant pour nouvelle boule unité de $\mathrm{X} \simeq \mathbb{R}^2$ l'intérieur d'une ellipse très allongée, on peut rendre la norme de ρ arbitrairement grande dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. On vient de voir que l'espace $\mathrm{Z}_0 \subset \mathbb{C}^2$ de la preuve du lemme 2.3, appliquée à $\mathrm{T} = \rho$ et $\mathrm{K} = \{\mathrm{i}\}$, est formé des couples $(\rho(y), y)$, $y \in \mathbb{R}^2$, ou bien des couples $(x, \varphi(x))$; la norme de $\varphi = -\rho$ peut donc devenir arbitrairement grande, bien que le spectre $\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ reste fixé.

Remarque 3. On va montrer que si on applique le lemme 2.3 en supposant seulement que $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T}) \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$, on peut trouver $\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}$ de codimension finie et $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ tels que $\pi_{\mathcal{S}}(\rho) = \pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})$. L'affirmation est un peu cavalière si on ne remarque pas d'abord qu'une application linéaire définie sur X_0 de codimension finie peut se prolonger en élément de $\mathcal{L}(\mathrm{X})$, que tous les prolongements possibles diffèrent d'un opérateur de rang fini et ont donc tous la même image dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$, ce qui légitime l'écriture $\pi_{\mathcal{S}}(\rho)$. On va montrer que :

tout $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ se relève en $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$, X_0 de codimension finie dans X.

Si la codimension de X_0 dans X est paire, on peut prolonger $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ en élément de $\mathcal{R}(\mathrm{X})$, on reviendra sur cette question dans le lemme 2.4 qui suit.

Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ un relèvement quelconque de r. Puisque $r^2 = -\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$, l'opérateur $\mathrm{T}^2 + \mathrm{Id}_{\mathrm{X}}$ est strictement singulier, ainsi que $(\mathrm{T}^{\mathbb{C}})^2 + \mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}}$ d'après le lemme 1.9, donc $\pi_{\mathcal{S}}^{\mathbb{C}}(\mathrm{T}^{\mathbb{C}}) = -\mathbf{1}_{\mathcal{S}}^{\mathbb{C}}$ et $\mathrm{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}^{\mathbb{C}}(\mathrm{T}^{\mathbb{C}})) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Les valeurs spectrales de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ qui ne sont pas dans $\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ sont isolées d'après le lemme 1.7, donc en quantité finie dans le complémentaire de tout ouvert contenant i et $-\mathrm{i}$; prenons pour K une partie compacte-ouverte du spectre de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$, de la forme $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}^{\mathbb{C}}) \cap \mathrm{D}$ où D est un petit disque situé dans le demi-plan complexe supérieur et centré au point i ; les valeurs spectrales de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ hors de $\mathrm{K} \cup \overline{\mathrm{K}}$ sont en nombre fini. Considérons $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{P}_{\mathrm{K}} \mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ et $\mathrm{X}_0 = \Re \mathrm{Z}_0$, de codimension finie dans X d'après le lemme 2.3 ; posant encore $\mathrm{B} := (\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} + \mathrm{i}\,\mathrm{T}^{\mathbb{C}})/2$ et $b = \pi_{\mathcal{S}}^{\mathbb{C}}(\mathrm{B}) = (\mathbf{1}_{\mathcal{S}}^{\mathbb{C}} + \mathrm{i}\,r^{\mathbb{C}})/2$, on aura que $\mathrm{B}\mathrm{Z}_0 \subset \mathrm{Z}_0$, et aussi $b^2 = b$ dans le quotient complexifié $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{\mathbb{C}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$. Le spectre de la restriction $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ de B à Z_0 est contenu dans le petit disque translaté $\mathrm{D} - \mathrm{i}$, centré en 0, et $\mathrm{B}^2 - \mathrm{B} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$. Si B_0 n'était pas strictement singulier, on trouverait un sous-espace $\mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{Z}_0$ tel que B_0 soit un isomorphisme de Y_0 sur son image $\mathrm{B}\mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{Z}_0$, c'est-à-dire que $\|\mathrm{B}(y)\| \geqslant \kappa \|y\|$ pour un $\kappa > 0$ et tout $y \in \mathrm{Y}_0$; ensuite, puisque $\mathrm{B}^2 - \mathrm{B} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, il existerait $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}_0$ sur lequel $\mathrm{B}^2(y) \sim \mathrm{B}(y)$ et $\|\mathrm{B}(y)\| \geqslant \kappa\|y\|$, ce qui impliquerait que 1 soit valeur singulière pour B_0, contradiction. On a par conséquent $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}_{\restriction \mathrm{Z}_0} \sim_s \mathrm{i}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0}$, ce qui implique, si on représente Z_0 comme graphe de $\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$, que $\mathrm{T} \sim_s -\varphi$ sur X_0 ; en effet, si X_1 est un sous-espace (toujours d.d.i) de X_0, alors Z_1, ensemble des $(x_1, \varphi(x_1))$ pour $x_1 \in \mathrm{X}_1$, est un sous-espace d.d.i de Z_0 ; il existe donc des vecteurs $x_1 \in \mathrm{X}_1$ tels que $(\mathrm{T}(x_1), \mathrm{T}\varphi(x_1)) \sim (-\varphi(x_1), x_1)$, d'où $\mathrm{T}(x_1) \sim -\varphi(x_1)$. Finalement $r = \pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T}) = \pi_{\mathcal{S}}(-\varphi)$ est égal à l'image dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ de l'application $\rho = -\varphi = \varphi^{-1} \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$.

Un meilleur argument : gardons B et K comme avant ; l'opérateur B commute avec P_K, donc $\mathrm{B}_1 = \mathrm{P}_\mathrm{K}\mathrm{B} = \mathrm{B}\mathrm{P}_\mathrm{K}$ a un spectre contenu dans un petit disque autour de 0, ne contenant pas le point 1 (décomposer $\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ en somme directe de Z_0 et de l'image de $\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \mathrm{P}_\mathrm{K}$ pour inverser $\zeta\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \mathrm{B}_1$ quand $|\zeta| > \varepsilon$) ; le spectre de $b_1 = \pi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}}(\mathrm{B}_1)$ est contenu dans celui de B_1, donc $\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} - b_1$ est inversible et puisque $b_1(\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} - b_1) = 0$ il en résulte que $b_1 = 0$. On conclut comme dans le paragraphe précédent.

Encore autrement : dans [F–G], on remarque que $(\zeta\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} - r^{\mathbb{C}})(\zeta\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} + r^{\mathbb{C}}) = (\zeta^2+1)\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}}$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$; si γ est un lacet positif autour de i, on aura donc

$$\pi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}}(\mathrm{P}_\mathrm{K}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma (\zeta\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} - r^{\mathbb{C}})^{-1}\,d\zeta = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{\zeta\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} + r^{\mathbb{C}}}{\zeta^2+1}\,d\zeta = \frac{\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} - \mathrm{i}\,r^{\mathbb{C}}}{2},$$

et $4b_1 = 4\pi^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}}(\mathrm{P}_\mathrm{K}\mathrm{B}) = (\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} - \mathrm{i}\,r^{\mathbb{C}})(\mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} + \mathrm{i}\,r^{\mathbb{C}}) = \mathbf{1}^{\mathbb{C}}_{\mathcal{S}} + (r^{\mathbb{C}})^2 = 0$, c'est comme avant. □

Rappelons que X est de type $\mathcal{R}_0$ s'il existe $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$, et de type $\mathcal{R}_1$ s'il existe $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X} \oplus \mathbb{R})$.

Lemme 2.4. *Soit* X *un espace de Banach réel et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *tel que* $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ *soit Fredholm pour tout* λ *réel. Il existe sur* X *ou sur* $\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}$ *un opérateur* ρ *tel que* $\rho^2 = -\mathrm{Id}$*. Autrement dit, l'espace* X *est de type* $\mathcal{R}_0$ *ou de type* $\mathcal{R}_1$*. Dans le cas* $\mathcal{R}_0$*, on peut trouver* $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ *tel que l'opérateur* $\rho\mathrm{T} - \mathrm{T}\rho$ *soit de rang fini.*

Il est bien sûr possible que X soit des deux types (c'est plutôt fréquent, on l'a vu pour l'espace de Hilbert, entre beaucoup d'autres exemples). Il est moins fréquent — mais possible— que l'on ait $\mathcal{R}(\mathrm{X}) = \emptyset$, ou même $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) = \emptyset$, auquel cas l'espace n'est ni $\mathcal{R}_0$ ni $\mathcal{R}_1$: si X est un espace HI réel et si $d_s(\mathrm{X}) = 1$, il n'existe pas dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{R}$ d'élément $t = \pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})$ tel que $t^2 = -\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$, et *a fortiori* pas de $\mathrm{T} \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$.

Preuve. Supposons que $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ soit Fredholm pour tout λ réel. On sait qu'il en est de même pour le complexifié $\mathrm{T}^{\mathbb{C}} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}}$ (lemme 1.9-*ii*), donc λ n'est pas dans le spectre de l'image $\pi_{\mathcal{S}^{\mathbb{C}}}(\mathrm{T}^{\mathbb{C}})$ dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$. Ainsi, l'axe réel est contenu dans la composante connexe non bornée Ω du complémentaire de ce spectre. D'après le lemme 1.7, l'hypothèse du lemme 2.4 entraîne que toutes les valeurs réelles du spectre de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ sont des valeurs propres de multiplicité finie, isolées, donc en nombre fini. Il en résulte aussi que la partie du spectre de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ contenue dans le demi-plan supérieur est un compact-ouvert K du spectre. De plus, le complémentaire de $\mathrm{K} \cup \overline{\mathrm{K}}$ dans le spectre est un ensemble fini F formé de valeurs propres de multiplicité finie. D'après le lemme 2.3, on sait que $\mathrm{X}_0 = \Re\mathrm{Z}_0$ est de codimension finie dans X.

On a vu au lemme 2.3 que Z_0 est le graphe d'un opérateur $\rho_0 \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$. Si la codimension (finie) de X_0 dans X est paire, on peut compléter ρ_0 en un opérateur ρ sur X vérifiant encore l'équation $\rho^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{X}$, sinon on pourra le faire en ajoutant une dimension à X, et trouver alors $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X} \oplus \mathbb{R})$. Comme Z_0 est invariant par $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$, on a $(\mathrm{T}x_0, \mathrm{T}y_0) \in \mathrm{Z}_0$ quand $(x_0, y_0) = (x_0, \rho(x_0)) \in \mathrm{Z}_0$: ainsi $\mathrm{T}\rho(x_0) = \mathrm{T}(y_0) = \rho\mathrm{T}(x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathrm{X}_0$, donc $\rho\mathrm{T} - \mathrm{T}\rho$, nul sur X_0, est de rang fini. □

On peut ajouter des informations sur l'existence d'homotopies. Écrivons le projecteur $\mathrm{Q} = \mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}}$ sous la forme $\mathrm{Q}(x, y) = \big(q(x), q(y)\big)$; on sait que $\mathrm{X}_0 = q\mathrm{X}$. Sur ce sous-espace X_0, invariant par T et par ρ_0, considérons

$$\mathrm{T}_t x_0 = (1-t)\mathrm{T}(x_0) - t\rho_0(x_0), \ \ t \in [0,1], \ x_0 \in \mathrm{X}_0.$$

Il s'agit de vérifier que T_t est un isomorphisme de X_0 pour tout $t \in (0,1)$. L'affirmation devient claire en complexifiant : en effet, pour tout vecteur $z = (x_0, \rho(x_0)) \in \mathrm{Z}_0$, on voit que $-\rho_0^{\mathbb{C}} z = (-\rho_0(x_0), x_0) = \mathrm{i}z$, et $(1-t)\mathrm{T}^{\mathbb{C}} + t\,\mathrm{i}\,\mathrm{Id}_{\mathrm{Z}_0}$ est un isomorphisme de Z_0 puisque le spectre de la restriction $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}{}_{\restriction \mathrm{Z}_0}$ est contenu dans le demi-plan supérieur (proposition 3) et ne contient donc aucun élément de la forme $-s\mathrm{i}$, $s = t/(1-t) > 0$. On rappelle pour finir que $z = (x_0, \rho_0(x_0))$ est contrôlé en norme par $x_0 \in \mathrm{X}_0$, donc T_t est un isomorphisme de X_0. Si on choisit pour supplémentaire de X_0 l'image E de $\mathrm{Id}_\mathrm{X} - q$, qui est stable par T, on peut par exemple étendre T_t par

$$\mathrm{T}_t x = \mathrm{T}(x - q(x)) + \big((1-t)\mathrm{T} - t\rho_0\big)\, q(x), \ \ t \in [0,1], \ x \in \mathrm{X},$$

ainsi que par toutes les déformations dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ de la restriction de T à E : la seule restriction sur le point d'arrivée dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est que son déterminant ait le même signe que celui de la restriction $\mathrm{T}_{\restriction \mathrm{E}}$.

Corollaire 2.1. *Soit* X *un espace HI réel tel que* $d_s(\mathrm{X}) > 1$. *Il existe sur* X *ou sur* $\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}$ *un opérateur* ρ *tel que* $\rho^2 = -\mathrm{Id}$. *Autrement dit, l'espace* X *est de type* $\mathcal{R}_0$ *ou de type* $\mathcal{R}_1$.

On n'a pas (pour l'instant) exclu la possibilité que X, espace HI réel, soit des deux types à la fois.

Preuve. Puisque $d_s > 1$ il existe un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ tel que $\mathrm{T}^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{X} \sim_s 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{T}^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{X}$ est strictement singulier. Les valeurs $\lambda = \pm\mathrm{i}$ sont infiniment singulières pour le complexifié $\mathrm{T}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}^{\mathbb{C}})$, les autres valeurs du spectre sont isolées de multiplicité finie, donc $\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_\mathrm{X}$ est Fredholm pour tout λ réel, et on applique le lemme 2.4. □

Le lemme suivant va permettre d'étudier le cas où un espace (l'espace Y_0 de l'énoncé) est à la fois de type $\mathcal{R}_0$ et de type $\mathcal{R}_1$. On va en donner une version mixte réelle-complexe, ce lemme resservira plus loin.

Lemme 2.5. *Posons* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soient* Z *un* $\mathbb{K}$*-espace de Banach,* ρ_0 *et* ρ_1 *deux applications* $\mathbb{R}$*-linéaires de* Z *dans* Z, *et* $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{U}$ *trois* $\mathbb{K}$*-sous-espaces de* Z *tels que :*

— le produit $\mathrm{T} = \rho_0\rho_1$ *est* $\mathbb{K}$*-linéaire, le sous-espace* U *est invariant par* T, Y_0 *est invariant par* ρ_0, Y_1 *est un* $\mathbb{K}$*-hyperplan de* Y_0 *et* Y_1 *est invariant par* ρ_1,

— la restriction $\rho_{0,0}$ *de* ρ_0 *à* Y_0 *est dans* $\mathcal{R}(\mathrm{Y}_0)$, *et la restriction* $\rho_{1,1}$ *de* ρ_1 *à* Y_1 *est dans* $\mathcal{R}(\mathrm{Y}_1)$.

Alors, pour tout polynôme unitaire p *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, *de degré* $d \geqslant 1$, *le rayon spectral* $\operatorname{sp-rad} p(\mathrm{T})$ *de l'opérateur* $p(\mathrm{T})$ *vérifie la minoration* $\operatorname{sp-rad} p(\mathrm{T}) \geqslant (\kappa_{\rho_0}\kappa_{\rho_1})^d$.

Preuve. Posons $\mathrm{K}_j = \mathrm{K}_{\rho_j}$ et $\kappa_j = \mathrm{K}_j^{-1}$, pour $j = 0, 1$. En appliquant le lemme 2.2 à $\mathcal{Z} = \mathrm{Y}_0$, $\mathcal{Y} = \mathrm{Y}_1$ et $\rho = \rho_{0,0}$, on sait d'abord que $\mathrm{Y}_2 = \mathrm{Y}_1 \cap \rho_0\mathrm{Y}_1$ est un $\mathbb{K}$-hyperplan de Y_1, invariant par ρ_0, et que pour tout $y_1 \in \mathrm{Y}_1$ on a

$$\operatorname{dist}(y_1, \mathrm{Y}_2) \leqslant \mathrm{K}_0 \operatorname{dist}(\rho_0(y_1), \mathrm{Y}_1).$$

Prenons ensuite $\mathcal{Z} = \mathrm{Y}_1$, $\mathcal{Y} = \mathrm{Y}_2$ et $\rho = \rho_{1,1} \in \mathcal{R}(\mathcal{Z})$; on sait maintenant par le même lemme 2.2 que $\mathrm{Y}_3 = \mathrm{Y}_2 \cap \rho_1 \mathrm{Y}_2$ est un $\mathbb{K}$-hyperplan de Y_2, invariant par ρ_1 et que pour tout $y_2 \in \mathrm{Y}_2$, on a

$$\operatorname{dist}(y_2, \mathrm{Y}_3) \leqslant \mathrm{K}_1 \operatorname{dist}(\rho_1(y_2), \mathrm{Y}_2), \quad \text{et} \ \ \rho_1(y_2) \in \mathrm{Y}_1$$

parce que $y_2 \in \mathrm{Y}_2 \subset \mathrm{Y}_1$ et $\rho_1 \mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}_1$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on continue de poser $\mathrm{Y}_{2n} = \mathrm{Y}_{2n-1} \cap \rho_0 \mathrm{Y}_{2n-1}$, $\mathbb{K}$-hyperplan de Y_{2n-1} ; le sous-espace Y_{2n} est ρ_0-invariant. On désigne par $\rho_{0,2n-2} \in \mathcal{R}(\mathrm{Y}_{2n-2})$ la restriction de ρ_0 à Y_{2n-2} et on applique encore le lemme 2.2 à $\rho = \rho_{0,2n-2}$: pour tout $y_{2n-1} \in \mathrm{Y}_{2n-1}$, on a

$$\operatorname{dist}(y_{2n-1}, \mathrm{Y}_{2n}) \leqslant \mathrm{K}_0 \operatorname{dist}(\rho_0(y_{2n-1}), \mathrm{Y}_{2n-1}), \quad \text{et} \ \ \rho_0(y_{2n-1}) \in \mathrm{Y}_{2n-2}$$

puisque $y_{2n-1} \in \mathrm{Y}_{2n-1} \subset \mathrm{Y}_{2n-2}$ et que Y_{2n-2} est ρ_0-invariant. On pose de la même façon $\mathrm{Y}_{2n+1} = \mathrm{Y}_{2n} \cap \rho_1 \mathrm{Y}_{2n}$, $\mathbb{K}$-hyperplan de Y_{2n}, ρ_1-stable, on considère $\rho_{1,2n-1} \in \mathcal{R}(\mathrm{Y}_{2n-1})$, restriction de ρ_1 à Y_{2n-1} et on continue : pour tout $y_{2n} \in \mathrm{Y}_{2n}$, on a

$$\operatorname{dist}(y_{2n}, \mathrm{Y}_{2n+1}) \leqslant \mathrm{K}_1 \operatorname{dist}(\rho_1(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n}) \ \ \text{et} \ \ \rho_1(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-1}.$$

On peut conjuguer les deux dernières informations en posant $y_{2n-1} = \rho_1(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-1}$; on obtient pour tout $y_{2n} \in \mathrm{Y}_{2n}$ les inégalités

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(y_{2n}, \mathrm{Y}_{2n+1}) &\leqslant \mathrm{K}_1 \operatorname{dist}(\rho_1(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n}) \\ &\leqslant \mathrm{K}_1\mathrm{K}_0 \operatorname{dist}(\rho_0\rho_1(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n-1}), \quad \text{et} \ \ \rho_0\rho_1(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-2}. \end{aligned}$$

Avec $\mathrm{T} = \rho_0\rho_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Z})$, résumons ce qui précède : pour tout $y_{2n} \in \mathrm{Y}_{2n}$, on a

$$\operatorname{dist}(y_{2n}, \mathrm{Y}_{2n+1}) \leqslant \mathrm{K}_1\mathrm{K}_0 \operatorname{dist}(\mathrm{T}(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n-1}) \ \ \text{et} \ \ \mathrm{T}(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-2}.$$

Donnons la suite de la preuve pour le degré $d = 2$. Posons

$$p(t) = a + bt + t^2, \ \ a, b, t \in \mathbb{K}.$$

Remplaçant $2n$ par $2n-2$, écrivons à nouveau l'inégalité

$$\operatorname{dist}(y_{2n-2}, \mathrm{Y}_{2n-1}) \leqslant \mathrm{K}_1\mathrm{K}_0 \operatorname{dist}(\mathrm{T}(y_{2n-2}), \mathrm{Y}_{2n-3}) \ \ \text{et} \ \ \mathrm{T}(y_{2n-2}) \in \mathrm{Y}_{2n-4}$$

pour tout $y_{2n-2} \in \mathrm{Y}_{2n-2}$, puis avec $y_{2n-2} = \mathrm{T}(y_{2n})$, pour tout $y_{2n} \in \mathrm{Y}_{2n}$,

$$\operatorname{dist}(y_{2n}, \mathrm{Y}_{2n+1}) \leqslant (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_0)^2 \operatorname{dist}(\mathrm{T}^2(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n-3}) \ \ \text{et} \ \ \mathrm{T}^2(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-4}.$$

Comme $a y_{2n} + b\mathrm{T}(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-2} \subset \mathrm{Y}_{2n-3}$, on a encore

$$\operatorname{dist}(\mathrm{T}^2(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n-3}) = \operatorname{dist}(a y_{2n} + b\mathrm{T}(y_{2n}) + \mathrm{T}^2(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n-3})$$

donc pour tout vecteur $y_{2n} \in \mathrm{Y}_{2n}$, on a

$$\operatorname{dist}(y_{2n}, \mathrm{Y}_{2n+1}) \leqslant (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_0)^2 \operatorname{dist}(p(\mathrm{T})(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2n-3}), \ \ \text{et} \ \ p(\mathrm{T})(y_{2n}) \in \mathrm{Y}_{2n-4}.$$

On est en position d'itérer cette inégalité, tant que $2k \leqslant n$, obtenant ainsi

$$\operatorname{dist}(y_{2n}, \mathrm{Y}_{2n+1}) \leqslant (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_0)^{2k} \operatorname{dist}(p(\mathrm{T})^k(y_{2n}), \mathrm{Y}_{2(n-2k)+1}) \leqslant (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_0)^{2k} \|p(\mathrm{T})^k(y_{2n})\|.$$

Comme Y_{2n+1} est un $\mathbb{K}$-hyperplan de Y_{2n}, on peut, pour tout entier $n \geqslant 1$, choisir un vecteur $y_{2n} \in \mathrm{Y}_{2n}$ de norme un dont la distance à Y_{2n+1} est presque 1, obtenant pour tout entier $k \geqslant 0$ l'inégalité

$$1 \leqslant (\mathrm{K}_1\mathrm{K}_0)^{2k} \|p(\mathrm{T})^k\|, \quad \text{donc} \ \ \text{sp-rad}\, p(\mathrm{T}) \geqslant (\kappa_0\kappa_1)^2$$

qui termine la preuve. $\square$

Lemme 2.6. *Un espace HI réel* X *tel que* $d_s(\mathrm{X}) > 1$ *est de type* $\mathcal{R}_0$ *ou de type* $\mathcal{R}_1$. *Il ne peut pas être à la fois des deux types* $\mathcal{R}_0$ *et* $\mathcal{R}_1$.

Preuve. La première affirmation est donnée par le corollaire 2.1. Si X a les deux types $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$, il existe $\rho_0 \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ et un isomorphisme ρ_1 de X tel que $\ker(\rho_1^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{X})$ soit un hyperplan Y de X.

D'après le lemme 2.2, il existe $e_0 \in \mathrm{X}$ qui vérifie $\mathrm{dist}(e_0, \mathrm{Y}) = 1$ et $\rho_0(e_0) \in \mathrm{Y}$; supposons par ailleurs que $\rho_1(e_0) = e_0$, de sorte que $\rho_1^4 = \mathrm{Id}_\mathrm{X}$; on a $\mathrm{X} = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathrm{Y}$. Posons $\mathrm{T} = \rho_0\rho_1$. On sait ([G–M, Lemma 20], et corollaire 1.4 plus haut) qu'il existe un polynôme p à coefficients réels de degré $\leqslant 2$ tel que $p(\mathrm{T})$ soit strictement singulier. Supposons p de degré 2 pour fixer les idées, soient λ et $\overline{\lambda} \neq \lambda$ ses racines.

Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ la partie réelle de l'image $\mathrm{U}^\mathbb{C} \subset \mathrm{X}^\mathbb{C}$ d'un projecteur spectral *réel* de $\mathrm{T}^\mathbb{C}$, obtenu pour un contour invariant par conjugaison, entourant deux petits disques autour des valeurs spectrales infiniment singulières conjuguées λ et $\overline{\lambda}$ de $\mathrm{T}^\mathbb{C} = (\rho_0\rho_1)^\mathbb{C}$. On peut supposer que 0 n'est pas dans ces disques, donc par le théorème spectral de la proposition 3, la restriction $\mathrm{T}^\mathbb{C}_{\restriction \mathrm{U}^\mathbb{C}}$ est dans $\mathrm{GL}(\mathrm{U}^\mathbb{C})$, et la restriction $\mathrm{T}_{\restriction \mathrm{U}} = (\rho_0\rho_1)_{\restriction \mathrm{U}}$ est dans $\mathrm{GL}(\mathrm{U})$. On a par conséquent

$$\rho_0\rho_1\mathrm{U} = \mathrm{U}, \quad \text{d'où } \rho_1\mathrm{U} = \rho_0\mathrm{U}.$$

Alors $\mathrm{V}_0 = \mathrm{U} \cap \rho_0\mathrm{U} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ est invariant par ρ_0, et on a aussi $\mathrm{V}_0 = \mathrm{U} \cap \rho_1\mathrm{U}$.

Si $v \in \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{Y}$, on a d'une part $v \in \mathrm{V}_0 = \mathrm{U} \cap \rho_1\mathrm{U}$ donc $v \in \mathrm{U}$ et $v = \rho_1(u)$, $u \in \mathrm{U}$. Ensuite, $u = \rho_1^4(u) = \rho_1^3(v)$, et comme d'autre part $v \in \mathrm{Y}$, stable par ρ_1, on déduit que $u = \rho_1^3(v) \in \mathrm{Y}$ puis $\rho_1(v) = \rho_1^2(u) = -u \in \mathrm{U}$ donc $\rho_1(v)$ est dans $\mathrm{U} \cap \rho_1\mathrm{U} = \mathrm{V}_0$; de plus $\rho_1(v) \in \mathrm{Y}$ et finalement $\rho_1(v) \in \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{Y}$. Ainsi, le sous-espace $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{Y}$ est stable par ρ_1, c'est un hyperplan de V_0, et V_0 est stable par ρ_0 ; on voit que V_1 est différent de V_0 pour une raison de codimension : le sous-espace V_0 est de codimension finie, stable par ρ_0 défini sur X, donc sa codimension dans X est paire (lemme 2.1), alors que celle de V_1, invariant par $\rho_{1\restriction \mathrm{Y}} \in \mathcal{R}(\mathrm{Y})$, doit être impaire.

On est dans la situation du cas réel du lemme 2.5, avec $\mathrm{U} = \mathrm{U}$, $\mathrm{Y}_0 = \mathrm{V}_0$ et $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{V}_1$. Comme $p(\lambda) = p(\overline{\lambda}) = 0$, la restriction à U de $p(\mathrm{T}) = p(\rho_0\rho_1)$ a son spectre dans un petit disque centré en 0, dont on peut supposer le rayon $< (\kappa_{\rho_0}\kappa_{\rho_1})^2$. On a atteint une contradiction, l'espace X ne peut pas être à la fois de type $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$. $\square$

Remarque. La preuve s'applique aussi bien aux espaces réels X tels que pour tout opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, il existe un polynôme p, de degré borné indépendamment de T, tel que $p(\mathrm{T})$ soit strictement singulier. Donnons un exemple très simple : si Y est un espace HI réel tel que $d_s(\mathrm{Y}) = 1$, considérons $\mathrm{X} = \mathrm{Y}^n$ (c'est un espace HD_n au sens de [Fer3]) ; tout opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est représenté par une matrice $n \times n$ d'opérateurs sur Y, qui induit une matrice d'éléments de $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{Y})$, en l'occurrence, une matrice réelle M, qui est annulée par un polynôme réel p de degré $\leqslant n$ en vertu de Cayley–Hamilton. Si $n = 2m$ est pair, X est isomorphe au carré de Y^m et admet donc un opérateur de quart de tour : dans ce cas, l'espace X est de type $\mathcal{R}_0$, et il n'est donc pas de type $\mathcal{R}_1$.

Remarque. Le lemme 2.6 peut être obtenu facilement quand $d_s(\mathrm{X}) = 2$ à partir de la preuve de la proposition 8 de Ferenczi–Galego [F–G]. En effet, on peut alors supposer que

$$\rho_0\rho_1 \sim_s -\mathrm{Id}_\mathrm{X}$$

donc $\rho_1 \sim_s \rho_0$. Il existe un strictement singulier S tel que $\rho_1 = \rho_0 + \mathrm{S}$. Pour t dans $[0,1]$, on peut définir la parité de la dimension caractéristique réelle totale $n_r(t)$ de $\rho_0 + t\mathrm{S}$ (voir la section 3), qui est localement constante, nulle pour $t = 0$ mais égale à 1 quand $t = 1$: un passage continu de l'un à l'autre est donc impossible.

De la même façon quand $d_s(\mathrm{X}) = 4$, on peut vérifier que tous les ρ avec $\rho^2 \sim_s -\mathrm{Id}_\mathrm{X}$ sont du même type : si ρ_0, ρ_1 sont dans ce cas, on pourra trouver un chemin dans les quaternions, joignant les deux images $\pi_\mathcal{S}(\rho_j) \in \mathbb{H}$ et contenu dans l'ensemble des $r \in \mathbb{H}$ tels que $r^2 = -1$, ensemble homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^3$,

$$\{r \in \mathbb{H} : r^2 = -1\} = \{b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} : b, c, d \in \mathbb{R},\ b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

On pourra écrire le chemin dans $\mathbb{H}$ sous la forme

$$b(t)\,\mathrm{i} + c(t)\,\mathrm{j} + d(t)\,\mathrm{k}, \quad b(t)^2 + c(t)^2 + d(t)^2 = 1,$$

puis en relevant les trois éléments i, j et k des « quaternions » de $\mathcal{L}_\mathcal{S}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{H}$ en trois opérateurs $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ on aura

$$\rho_0 = b(0)\mathrm{B} + c(0)\mathrm{C} + d(0)\mathrm{D} + \mathrm{S}_0, \quad \rho_1 = b(1)\mathrm{B} + c(1)\mathrm{C} + d(1)\mathrm{D} + \mathrm{S}_1,$$

et $\pi_\mathcal{S}(\rho_j) \in \mathcal{R}_\mathcal{S}(\mathrm{X})$: l'argument du chemin dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ sera identique.

3. Homotopies

Soient X un espace de Banach réel, $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $\mathrm{A} = \mathrm{T}^\mathbb{C} \in \mathcal{L}^\mathbb{C}(\mathrm{X}^\mathbb{C})$ et $a < b$ deux nombres réels. On dira que la *parité de la dimension caractéristique totale de* T *dans* $[a, b]$, qui sera notée $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, b)$, est *bien définie* si :

— l'intersection $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap [a, b]$ est contenue dans l'ouvert (a, b), et tous les éléments de $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ dans (a, b) sont des valeurs propres isolées de multiplicité finie.

On peut alors définir la somme

$$\mathrm{dct}(\mathrm{T}, [a, b]) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap (a,b)} \dim_\mathbb{C} \mathrm{F}_\mu(\mathrm{A}),$$

la *dimension caractéristique totale de* T *dans* $[a, b]$. On posera $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, b) = 0$ si $\mathrm{dct}(\mathrm{T}, a, b)$ est pair et $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, b) = 1$ si $\mathrm{dct}(\mathrm{T}, a, b)$ est impair. Si $a < b < c$ et si $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, b)$ et $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, b, c)$ sont bien définies, on voit immédiatement que $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, c)$ est bien définie, que $\mathrm{dct}(\mathrm{T}, [a, c]) = \mathrm{dct}(\mathrm{T}, [a, b]) + \mathrm{dct}(\mathrm{T}, [b, c])$, d'où le même résultat modulo 2 pour $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, c)$.

Le lemme qui suit et son corollaire apparaissent sous une forme très voisine chez Ferenczi–Galego [F–G, preuve de la Proposition 8], ainsi que chez de Rancourt [deR1, Remark 5.4, et deR2, Lemma 3.2, 3.4, 3.5].

Lemme 3.1. *On suppose que* X *est un espace de Banach réel, que* $\mathrm{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *et que la valeur* 0*, ou bien n'est pas dans le spectre de* $\mathrm{A}_0 = \mathrm{T}_0^\mathbb{C}$*, ou bien est une valeur spectrale isolée, valeur propre de multiplicité finie. Il existe* $r_0 > 0$ *qui a la propriété suivante : pour tous* c, d *réels tels que* $-r_0 < c < 0 < d < r_0$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, c, d)$ *reste bien défini et constant pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *vérifiant* $\|\mathrm{T} - \mathrm{T}_0\| < \varepsilon$.

Preuve. Le résultat est clair quand T_0 est inversible, supposons donc que $0 \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_0)$. Soit $r_0 > 0$ tel que le disque fermé $\mathrm{C}_0 \subset \mathbb{C}$, de rayon r_0 et centré en 0 soit disjoint du compact $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \setminus \{0\}$; soient c, d tels que $-r_0 < c < 0 < d < r_0$, soit D le disque ouvert centré en $(c+d)/2$, de rayon $(d-c)/2$; on a $\mathrm{D} \cap \mathbb{R} = (c, d)$, $0 \in \mathrm{D}$ et D est égal à son conjugué $\overline{\mathrm{D}}$. Posons $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_0 \setminus \mathrm{D}$; C_1 est un compact contenu dans C_0 et disjoint de $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}_0)$. La résolvante $\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A}_0)$, continue en ζ, est uniformément bornée sur le compact C_1, donc C_1 reste extérieur au spectre de $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ quand T est proche de T_0, et par conséquent $\mathrm{K}_{\mathrm{A}} = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{D}$ est compact-ouvert dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. Précisément, si $\mathrm{M} = \max_{\zeta \in \mathrm{C}_1} \|\mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A}_0)\|$ et si on a $\|\mathrm{A} - \mathrm{A}_0\| < \mathrm{M}^{-1}$, l'opérateur $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \mathrm{A}$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathrm{C}_1$. Soit γ un cercle centré en 0, contenu dans C_1 et P_0 le projecteur spectral de rang fini

$$\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_{\{0\}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A}_0)\, d\zeta.$$

La dimension caractéristique de $\mu = 0$ pour T_0 est égale au rang de P_0, égale aussi à $\mathrm{dct}(\mathrm{T}_0, c, d)$. Pour T voisin de T_0 et $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$, le projecteur spectral

$$\mathrm{P}_{\mathrm{K}_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \mathrm{R}(\zeta, \mathrm{A})\, d\zeta$$

est proche de P_0, par conséquent son rang reste égal à celui de P_0 (lemme 3.2). Les valeurs spectrales μ de A dans $\mathrm{K}_{\mathrm{A}} \subset \mathrm{D}$ sont donc de multiplicité finie ; elles peuvent devenir complexes, mais dans ce cas, puisque $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$, les dimensions caractéristiques se répartissent de façon égale entre μ et $\overline{\mu} \in \mathrm{D} = \overline{\mathrm{D}}$, donc la somme

$$s_1(\mathrm{A}) = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap (\mathrm{D} \setminus \mathbb{R})} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{F}_\mu(\mathrm{A})$$

est paire. La somme totale $s_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$ des dimensions caractéristiques pour les $\mu \in \mathrm{D}$, incluant les valeurs propres réelles dans $\mathrm{D} \cap \mathbb{R} = (c, d)$, vaut

$$s_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = s_1(\mathrm{A}) + \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap (c,d)} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{F}_\mu(\mathrm{A}) = s_1(\mathrm{A}) + \mathrm{dct}(\mathrm{T}, c, d).$$

On sait que la quantité $s_{\mathrm{D}}(\mathrm{A})$, qui est le rang de $\mathrm{P}_{\mathrm{K}_{\mathrm{A}}}$, est restée constante pour $\mathrm{A} = \mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ voisin de A_0, égale au rang de P_0 ; il en résulte que la parité $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, c, d)$ est restée inchangée. □

Lemme 3.2. *Soit* X *un espace de Banach réel ou complexe, et* $\mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *un projecteur de rang fini* $\geqslant 1$ *; si* $1 \leqslant k \leqslant \dim \mathrm{PX}$, $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ *et* $\|\mathrm{Q} - \mathrm{P}\| < k^{-1}$, *on a* $\dim \mathrm{QX} \geqslant k$. *Si* P_0 *est un projecteur de rang* n *et* P *un projecteur tel que* $\|\mathrm{P} - \mathrm{P}_0\| < (n+1)^{-1}$, *le rang de* P *est égal à celui de* P_0.

Preuve. On va se servir de la notion classique de *base d'Auerbach*. Soit $\mathrm{E} = \mathrm{PX}$ l'image de P, $\dim \mathrm{E} = n$, et φ une forme n-linéaire alternée non nulle sur E. Posons

$$\mathrm{D} = \max\{|\varphi(x_1, \ldots, x_n)| : x_i \in \mathrm{E},\ \|x_i\| \leqslant 1\}\,;$$

on a $\mathrm{D} > 0$ puisque φ n'est pas nulle. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uple de vecteurs de E, de norme 1, qui réalise le maximum D ; c'est une base de E puisque $|\varphi(e_1, \ldots, e_n)| = \mathrm{D} \neq 0$ (c'est une base d'Auerbach). Si $x = \sum_{j=1}^n c_j e_j \in \mathrm{E}$ est de norme $\leqslant 1$, on sait que

$$\mathrm{D}\,|c_i| = |\varphi(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_n)| \leqslant \mathrm{D},$$

donc $|c_i| \leqslant 1$: les formes linéaires coordonnées $e_i^* \in \mathrm{E}^*$, $i = 1, \ldots, n$, sont de norme 1, et vérifient par définition $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Par Hahn–Banach, on étend ces formes linéaires en formes linéaires e_i^* de norme 1 sur X.

Si $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ et si on pose $b_{i,j} = e_i^*(\mathrm{Q}(e_j))$ on aura, sachant que $e_j = \mathrm{P}(e_j)$,

$$|\delta_{i,j} - b_{i,j}| = |e_i^*(e_j) - e_i^*(\mathrm{Q}(e_j))| = |e_i^*(\mathrm{P}(e_j) - \mathrm{Q}(e_j))| \leqslant \|e_i^*\|\,\|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\|\,\|e_j\| \leqslant \|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\|.$$

Si $\|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\| < 1/k$ on déduit que la matrice $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^k$ de taille $k \times k$ est inversible, puisqu'on a

$$\|\mathrm{I}_k - \mathrm{B}\|_{\mathcal{L}(\ell_k^1, \ell_k^1)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \|(\mathrm{I}_k - \mathrm{B})(\mathbf{e}_j)\|_{\ell_k^1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \sum_{i=1}^k |\delta_{i,j} - b_{i,j}| \leqslant k\,\|\mathrm{P} - \mathrm{Q}\| < 1\,;$$

les vecteurs $(\mathrm{Q}(e_j))_{j=1}^k$ sont donc indépendants et $\dim \mathrm{QX} \geqslant k$.

Supposons que $\dim \mathrm{P}_0\mathrm{X} = n$, $\|\mathrm{P} - \mathrm{P}_0\| < (n+1)^{-1}$ et $\dim \mathrm{PX} > n$. En appliquant ce qui précède avec $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_0$ et $k = n + 1 \leqslant \dim \mathrm{PX}$ on obtiendrait $\dim \mathrm{P}_0\mathrm{X} \geqslant n + 1$, contradiction. On a donc $\dim \mathrm{PX} \leqslant n$, mais aussi $\dim \mathrm{PX} \geqslant n$ en inversant les rôles de P et P_0. $\square$

Corollaire 3.1. *On suppose que* X *est un espace de Banach réel,* $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$, $a < b$ *et que* $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}_1, a, b)$ *est bien défini. Alors* $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, a, b)$ *reste bien défini et constant pour tout* T *proche de* T_1*.*

Preuve. Par le lemme précédent appliqué à $\mathrm{T}_1 - x\,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$, $x \in [a, b]$, on peut procéder à un recouvrement fini de $[a, b]$ par des intervalles $(x_i - r_{0,i}, x_i + r_{0,i})$ tels qu'on ait la propriété du lemme 3.1 pour chaque $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_1 - x_i\,\mathrm{Id}_\mathrm{X}$, avec $r_0 = r_{0,i}$. En réduisant ces intervalles on arrive à une partition de $[a, b]$ de la forme

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_\mathrm{N} = b$$

où $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}, c_j, c_{j+1})$ est bien défini et constant pour T voisin de T_1. Le corollaire en découle. $\square$

Nous allons donner pour finir un résultat prouvé récemment par Noé de Rancourt [deR2], mais avec une preuve moins efficace que la sienne. Une petite remarque préliminaire sera utile.

Remarque. *Si* X *est un espace HI réel et si* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$*, l'opérateur* $\mathrm{T}^\mathbb{C}$ *admet une valeur spectrale infiniment singulière* réelle λ *si et seulement si* $\pi_\mathcal{S}(\mathrm{T}) = \lambda \mathbf{1}_\mathcal{S}$*.*

Si λ est réel et si $\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^\mathbb{C}} - \mathrm{T}^\mathbb{C}$ est infiniment singulier, alors $\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}$ est infiniment singulier (lemme 1.9-*ii* et lemme 1.1), donc strictement singulier puisque l'espace X est HI (corollaire 1.1), donc l'image $\pi_\mathcal{S}(\mathrm{T})$ de T est égale à $\lambda \mathbf{1}_\mathcal{S}$. Si inversement $\pi_\mathcal{S}(\mathrm{T}) = \lambda \mathbf{1}_\mathcal{S}$, l'opérateur $\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} - \mathrm{T}$ est strictement singulier, ainsi que $\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^\mathbb{C}} - \mathrm{T}^\mathbb{C}$, qui est donc infiniment singulier.

Théorème 1. *Si* X *est un espace HI réel, il n'existe pas dans* $\mathrm{GL(X)}$ *de chemin continu allant de* $\mathrm{Id_X}$ *à une réflexion.*

Preuve. Le cas $d_s(\mathrm{X}) = 1$ a déjà été réglé par de Rancourt dans [deR1, Remark 5.4], on va rappeler l'argument.

Lorsque $d_s(\mathrm{X}) = 1$, tout opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ est de la forme $\lambda \mathrm{Id_X} + \mathrm{S}$, $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X})$ et λ réel. Cette valeur $\lambda = \lambda(\mathrm{T})$ est l'unique valeur spectrale infiniment singulière de $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$, et elle varie continûment avec T. Supposons que (T_t), $t \in [0, 1]$, soit un chemin continu dans $\mathrm{GL(X)}$, issu de l'identité : $\mathrm{T}_0 = \mathrm{Id_X}$. On sait déjà que 0 n'est jamais dans le spectre de $\mathrm{T}_t^{\mathbb{C}}$; puisque $\lambda(\mathrm{T}_t)$ est continu, ne s'annule jamais et que $\lambda(\mathrm{T}_0) = 1$, la valeur $\lambda(\mathrm{T}_t)$ reste > 0. Par conséquent, les valeurs réelles négatives sont, soit en dehors des spectres des T_t, soit isolées de multiplicité finie. Puisque le chemin est continu, la norme $\|\mathrm{T}_t\|$ est uniformément bornée par un certain $\mathrm{M} \geqslant 1$. Fixons $a < -\mathrm{M}$; il découle des considérations précédentes que $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}_t, a, 0)$ reste défini pour tout $t \in [0, 1]$, et il est continu par le corollaire précédent. Comme on est parti de $\mathrm{T}_0 = \mathrm{Id_X}$, auquel cas $\mathrm{pdct}(\mathrm{T}_0, a, 0) = 0$, il est impossible que le point d'arrivée soit une réflexion R, pour laquelle $\mathrm{pdct}(\mathrm{R}, a, 0) = 1$.

Cette démonstration s'applique en fait à tout chemin (T_t) tel que $\mathrm{T}_t^{\mathbb{C}}$ n'admette jamais de valeur spectrale infiniment singulière réelle négative, situation à laquelle on va essayer de se ramener quand $d_s(\mathrm{X}) > 1$. Quand $d_s(\mathrm{X}) > 1$, l'algèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ est isomorphe, en tant qu'algèbre, à $\mathbb{C}$ ou aux quaternions $\mathbb{H}$; l'isomorphisme de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ sur $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ envoie l'unité $1 \in \mathbb{R}$ sur $\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$, et envoie l'axe réel $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ sur l'ensemble $\{t\mathbf{1}_{\mathcal{S}} : t \in \mathbb{R}\}$ des multiples réels de $\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$, qu'on pourra appeler *l'axe réel* de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$. On a vu à la remarque précédant le théorème que $\mathrm{T}^{\mathbb{C}}$ admet une valeur spectrale infiniment singulière *réelle* si et seulement si $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})$ est dans l'axe réel de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$.

Dans le cas où $d_s(\mathrm{X}) = 4$, on pourra remplacer un chemin donné (T_t) dans $\mathrm{GL(X)}$, $t \in [0, 1]$, par un chemin dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ de mêmes extrémités, qui soit une petite perturbation (U_t) du chemin donné, donc restant dans $\mathrm{GL(X)}$, mais dont l'image dans l'algèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{H}$, qui est un espace réel de dimension 4, évitera « l'axe réel des quaternions » pour tout $t \in (0, 1)$. Trouver le chemin perturbé dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ est facile : on peut par exemple, utilisant l'uniforme continuité, remplacer (T_t) par un chemin affine par morceaux, et ensuite modifier légèrement les « nœuds » de l'image dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ pour que les segments entre deux nœuds successifs évitent l'axe ; par passage au quotient, il suffit de savoir modifier un chemin dans $\mathbb{R}^2$, affine par morceaux, pour qu'il évite 0 ; si on a un nombre total pair de nœuds, on pourra déjà les supposer non nuls (à l'exception peut-être des extrémités, qui sont fixées), distincts, puis dans chaque paire de segments successifs $[\mathrm{N}_{2i}, \mathrm{N}_{2i+1}] = [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, $[\mathrm{N}_{2i+1}, \mathrm{N}_{2i+2}] = [\mathrm{B}, \mathrm{C}]$ modifier B légèrement, si nécessaire : la question ne se pose que si 0 est intérieur à un des deux segments, par exemple (A, B) ; si ξ est une forme linéaire nulle sur $v = \mathrm{B} - \mathrm{A} \neq 0$ et telle que $\xi(\mathrm{C} - \mathrm{B}) \geqslant 0$, on ajoutera à B un petit vecteur w tel que $\xi(w) > 0$.

Ensuite, soient $\mathrm{i}_{\mathcal{S}}$, $\mathrm{j}_{\mathcal{S}}$ et $\mathrm{k}_{\mathcal{S}}$ les contreparties dans l'algèbre quotient $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{H}$ des éléments i, j et k de $\mathbb{H}$; relevons $\mathrm{i}_{\mathcal{S}}, \mathrm{j}_{\mathcal{S}}$ et $\mathrm{k}_{\mathcal{S}}$ en trois opérateurs $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$; soit $\gamma(t)$ le chemin initial dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$, image de (T_t), soit $\delta(t)$ sa petite perturbation évitant l'axe réel et écrivons

$$\delta(t) = \gamma(t) + a(t) + b(t)\mathrm{i}_{\mathcal{S}} + c(t)\mathrm{j}_{\mathcal{S}} + d(t)\mathrm{k}_{\mathcal{S}}.$$

Posons

$$\mathrm{U}_t = \mathrm{T}_t + a(t)\mathrm{Id_X} + b(t)\mathrm{B} + c(t)\mathrm{C} + d(t)\mathrm{D}.$$

Maintenant U_t, $t \in (0,1)$, est dans $\mathrm{GL}(\mathrm{X})$, et U_t n'admet pas de valeur infiniment singulière réelle puisque $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{U}_t) = \delta(t)$ « évite l'axe » ; la preuve dans [deR1] s'applique pour montrer que l'identité Id_X ne peut pas être reliée à une réflexion R.

Il reste le cas $d_s(\mathrm{X}) = 2$, $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{C}$. Si (T_t) est un chemin dans $\mathrm{GL}(\mathrm{X})$ entre un isomorphisme T_0 et un autre T_1, où $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1$ n'admettent pas de valeur spectrale infiniment singulière réelle négative (c'est le cas de $\mathrm{T}_0 = \mathrm{Id}_\mathrm{X}$ et $\mathrm{T}_1 = \mathrm{R}$ qui sont tels que $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1 \sim_s \mathrm{Id}_\mathrm{X}$), on peut considérer l'image de (T_t) dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ comme un chemin $\zeta(t)$ dans $\mathbb{C}$, $t \in [0,1]$, qui ne passe pas par 0 et dont les extrémités ne sont pas dans le demi-axe réel négatif. On peut trouver un autre chemin $\zeta_1(t)$ allant de $\zeta(0)$ à $\zeta(1)$, tel que $\zeta_1(t)$ ne coupe pas le demi-axe réel négatif $(-\infty, 0]$; posons

$$\lambda(t) = \zeta_1(t)/\zeta(t) = a(t) + \mathrm{i}\, b(t), \quad t \in [0,1].$$

On a $\lambda(0) = \lambda(1) = 1$, $\lambda(t) \neq 0$ donc $a(t)b(t) \neq 0$. On sait par le corollaire 2.1 que X est de type $\mathcal{R}_0$ ou de type $\mathcal{R}_1$. Dans le cas $\mathcal{R}_0$, introduisons $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$, $\rho^2 = -\mathrm{Id}_\mathrm{X}$, et posons

$$\mathrm{U}_t = a(t)\,\mathrm{Id}_\mathrm{X} + b(t)\rho, \quad t \in [0,1]\,;$$

on voit alors que U_t est un isomorphisme de X puisque $a(t)b(t) \neq 0$ pour tout réel $t \in [0,1]$; dans le cas $\mathcal{R}_1$, on prend pour ρ un opérateur qui est dans $\mathcal{R}(\mathrm{Y})$ pour un certain hyperplan Y, on restreint la formule précédente pour U_t à Y, on complète la définition de U_t, $t \in [0,1]$, par $\mathrm{U}_t(e_0) = e_0$ pour un $e_0 \notin \mathrm{Y}$.

Dans les deux cas, on a $\mathrm{U}(0) = \mathrm{U}(1) = \mathrm{Id}_\mathrm{X}$; l'image de $\mathrm{T}_t\mathrm{U}_t$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ est égale à $\zeta(t)\lambda(t) = \zeta_1(t)$, donc $(\mathrm{T}_t\mathrm{U}_t)$ est un chemin d'isomorphismes qui a les mêmes extrémités que (T_t) et dont l'image dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ évite le demi-axe réel négatif. On conclut comme avant. $\square$

4. Anti-commutation

Il sera commode ici de définir les quaternions $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \in \mathbb{H}$ par les propriétés suivantes :

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{j\,i} = -\mathrm{i\,j} \quad \text{et} \quad \mathrm{k} = \mathrm{i\,j}.$$

Les autres propriétés en découlent : $\mathrm{k}^2 = \mathrm{i\,j\,i\,j} = -\mathrm{i\,i\,j\,j} = -1$, $\mathrm{j\,k} = \mathrm{j\,i\,j} = -\mathrm{i\,j\,j} = \mathrm{i}$, $\mathrm{k\,j} = \mathrm{i\,j\,j} = -\mathrm{i}$, et de même $\mathrm{k\,i} = -\mathrm{i\,k} = \mathrm{j}$.

S'il existe sur un espace vectoriel réel X deux quarts de tour $\rho, \sigma \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ qui anti-commutent, on posera $\tau = \rho\sigma$, et d'après ce qui précède les quatre opérateurs $\mathrm{Id}_\mathrm{X}, \rho, \sigma, \tau$ engendrent dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ une sous-algèbre isomorphe aux quaternions ; on peut alors définir sur X une « structure quaternionique » en posant

$$\mathrm{i}x = \rho(x), \quad \mathrm{j}x = \sigma(x), \quad \mathrm{k}x = \rho\sigma(x)$$

pour tout $x \in \mathrm{X}$. Bien entendu, chacune des trois multiplications par i, par j ou par k définit aussi une structure complexe sur X : le cas « quaternionique » est un cas particulier du cas de la « structure complexe ».

Continuons avec quelques évidences algébriques. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre réelle avec unité $\mathbf{1}_\mathfrak{A}$, et soit $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ l'ensemble (peut-être vide) des éléments $a \in \mathfrak{A}$ tels que $a^2 = -\mathbf{1}_\mathfrak{A}$. Si a et b sont deux éléments de $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$, on a évidemment $(ab)^{-1} = (-b)(-a) = ba$; par ailleurs, les trois conditions suivantes pour $a, b \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ sont clairement équivalentes :

- $ab + ba = 0$ (anti-commutation),
- $abab = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$, c'est-à-dire que $ab \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$,
- $(a+b)/\sqrt{2} \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$, ou bien, si $\sin(2\theta) \neq 0$, $a \cos\theta + b \sin\theta \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$.

Dans ce cas anti-commutant, les éléments $\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}, a, b$ et $c := ab$ de $\mathfrak{A}$ vérifient les équations satisfaites par les éléments $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ de l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions, et ils engendrent par conséquent une sous-algèbre de $\mathfrak{A}$ de dimension 4 et isomorphe à $\mathbb{H}$.

Notons aussi que pour tous $a, b \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$, $a' = (a + bab)/2$ et b anti-commutent :

$$2ba' = ba - ab, \quad 2a'b = ab - ba. \tag{18}$$

Si $a, b \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ anti-commutent, on a $a' = a \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$, mais on n'a pas $a' \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ en général, il faudrait pour cela que $(abab + baba)/2 = -\mathbf{1}_{\mathfrak{A}}$.

Faisons quelques rappels élémentaires sur l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions. À chaque vecteur $v = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ associons

$$i(v) = b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} \in \mathbb{H}.$$

En introduisant le produit vectoriel usuel $v \wedge v'$ sur $\mathbb{R}^3$, défini si $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $v' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ par

$$v \wedge v' = (v_2 v'_3 - v_3 v'_2, v_3 v'_1 - v_1 v'_3, v_1 v'_2 - v_2 v'_1)$$

et le produit scalaire $v \cdot v' = v_1 v'_1 + v_2 v'_2 + v_3 v'_3$, on vérifiera que

$$i(v) i(v') = -v \cdot v' + i(v \wedge v'),$$

en particulier $i(v)i(v) = -v \cdot v = -\|v\|^2$. Si v et v' sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$, alors $i(v)$ et $i(v')$ anti-commutent, et $i(v)$ et $i(v')$ ne commutent que si v et v' sont colinéaires. Tout élément $h \in \mathbb{H}$ s'écrit $h = a + i(v)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^3$. Définissons alors le *conjugué* de h par $\overline{h} = a - i(v)$. Si $v = (b, c, d)$, on voit que

$$h\,\overline{h} = (a + i(v))(a - i(v)) = a^2 - i(v)i(v) = a^2 + v \cdot v = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \overline{h}\,h\,;$$

on posera $|h| = (h\,\overline{h})^{1/2}$. On a aussi

$$h^2 = (a + i(v))(a + i(v)) = a^2 - v \cdot v + 2a i(v).$$

Pour que $h^2 = -1$, il est nécessaire que $v \cdot v = 1 + a^2 \neq 0$, puis que $a i(v) = 0$ donc $a = 0$. Dans $\mathbb{H}$ on a donc

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}) = \{i(v) : v \in \mathbb{R}^3,\ \|v\| = 1\} = \{b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k} : b, c, d \in \mathbb{R},\ b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Si $h' = a' + i(v')$ on a encore

$$hh' = aa' - v \cdot v' + a i(v') + a' i(v) + i(v \wedge v'),$$

soit

$$hh' = aa' - v \cdot v' + i(av' + a'v + v \wedge v').$$

Le conjugué $aa' - v \cdot v' - i(av' + a'v + v \wedge v')$ de hh' est obtenu en remplaçant dans l'expression de hh' la paire (a, v) par $(a, -v)$, (a', v') par $(a', -v')$ et en échangeant l'ordre des facteurs, c'est-à-dire que

$$\overline{hh'} = \overline{h}'\,\overline{h}.$$

Il en résulte que $|hh'| = |h|\,|h'|$, puisque

$$hh'\,\overline{hh'} = hh'\overline{h}'\,\overline{h} = |h'|^2\, h\overline{h}.$$

Le sous-ensemble des éléments tels que $|h| = 1$ forme un groupe pour la multiplication.

Recherchons à quelle condition on a anti-commutation pour h et h', c'est-à-dire à quelle condition

$$0 = \frac{hh' + h'h}{2} = aa' - v \cdot v' + i(av' + a'v)\,;$$

on doit avoir $av' + a'v = 0$ et $aa' = v \cdot v'$. Alors $(aa')^2 = aa'v \cdot v' = -\|av'\|^2$, donc $av' = a'v = 0$ et $aa' = 0$. Si $a \neq 0$, on aura $v' = 0$ et $a' = 0$ de sorte que $h' = 0$, cas trivial. Si $a = 0$ et $h \neq 0$, alors $v \neq 0$ donc $a' = 0$ et $v \cdot v' = aa' = 0$. Pour avoir anti-commutation, il faut que $h = i(v)$, $h' = i(v')$ avec v et v' orthogonaux.

Lemme 4.1. *Soit* X *un espace HI réel tel que* $d_s(\mathrm{X}) = 4$, *et soit* $\rho_1 \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$. *Il existe un sous-espace* $\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}$ *de codimension finie tel que* $\rho_1 \mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$, *et* $\rho_0 \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ *tel que pour tout* $x_0 \in \mathrm{X}_0$ *on ait*

$$(\rho_0\rho_1 + \rho_1\rho_0)(x_0) = 0.$$

Preuve. Puisque $d_s(\mathrm{X}) = 4$ on sait que l'algèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ est isomorphe aux quaternions ; soient $\psi : \mathbb{H} \to \mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ un isomorphisme d'algèbre, puis $\mathrm{i}_{\mathcal{S}}$, $\mathrm{j}_{\mathcal{S}}$ et $\mathrm{k}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ les images par ψ des quaternions usuels i, j et k. Puisque $\rho_1 \in \mathcal{R}(\mathrm{X}) = \mathfrak{I}(\mathcal{L}(\mathrm{X}))$, on a

$$r_1 := \pi_{\mathcal{S}}(\rho_1) = b_1\,\mathrm{i}_{\mathcal{S}} + c_1\,\mathrm{j}_{\mathcal{S}} + d_1\,\mathrm{k}_{\mathcal{S}}, \quad b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1.$$

Si le vecteur (b_0, c_0, d_0) est orthogonal à (b_1, c_1, d_1) dans $\mathbb{R}^3$ et de norme 1, on sait que $r_0 = b_0\,\mathrm{i}_{\mathcal{S}} + c_0\,\mathrm{j}_{\mathcal{S}} + d_0\,\mathrm{k}_{\mathcal{S}}$ est dans $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) = \mathfrak{I}(\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}))$ et anti-commute avec r_1. Comme X est de type $\mathcal{R}_0$, on peut relever r_0 en $\rho_0 \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$; cela résulte de la remarque 3, mais on peut le retrouver ici de la façon suivante : soit T un relèvement quelconque de r_0, appliquons-lui le lemme 2.4, qui donne $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ tel que l'opérateur $\rho\mathrm{T} - \mathrm{T}\rho$ soit de rang fini, ce qui implique que $\pi_{\mathcal{S}}(\rho) \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ commute avec $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T}) = r_0$; par les propriétés de $\mathbb{H}$, il en résulte que $\pi_{\mathcal{S}}(\rho) = \pm r_0$, on prend $\rho_0 = \pm\rho$ de façon que $\pi_{\mathcal{S}}(\rho_0) = r_0$.

Posons

$$\rho_0' = \frac{\rho_0 + \rho_1\rho_0\rho_1}{2}.$$

On a vu à l'équation (18) que ρ_0' et ρ_1 anti-commutent, leurs complexifiés $\rho_0'^{\mathbb{C}}$ et $\rho_1^{\mathbb{C}}$ aussi, et de plus $\pi_{\mathcal{S}}(\rho_0') = (r_0 + r_1 r_0 r_1)/2 = (r_0 - r_0 r_1 r_1)/2 = r_0$, ce qui entraîne que $\mathrm{Sp}(\pi_{\mathcal{S}}(\rho_0'^{\mathbb{C}})) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ et que les valeurs spectrales de $\rho_0'^{\mathbb{C}}$ différentes de i et $-\mathrm{i}$ sont isolées (corollaire 1.2). Notons que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, on a

$$\rho_1^{\mathbb{C}}(-\zeta\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \rho_0'^{\mathbb{C}}) + (\zeta\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}^{\mathbb{C}}} - \rho_0'^{\mathbb{C}})\rho_1^{\mathbb{C}} = 0,$$

donc, en passant aux résolvantes, et comme $(\rho_1^{\mathbb{C}})^{-1} = -\rho_1^{\mathbb{C}}$, on obtient quand ζ et $-\zeta$ sont hors du spectre de $\rho_0'^{\mathbb{C}}$, la relation

$$\mathrm{R}(-\zeta, \rho_0'^{\mathbb{C}})\,\rho_1^{\mathbb{C}} + \rho_1^{\mathbb{C}}\,\mathrm{R}(\zeta, \rho_0'^{\mathbb{C}}) = 0. \tag{19}$$

Soit K la partie du spectre de $\rho_0'^{\mathbb{C}}$ contenue dans un petit disque D centré en i, disque contenu dans le demi-plan $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ et dont le bord ne rencontre pas le spectre. L'ensemble K est un compact-ouvert du spectre de $\rho_0'^{\mathbb{C}}$; soit $\mathrm{Z}_0 = \mathrm{P}_\mathrm{K}\mathrm{X}^{\mathbb{C}}$ l'image du projecteur spectral P_K ; d'après le lemme 2.3, Z_0 est le graphe d'un opérateur $\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$, où $\mathrm{X}_0 = \Re \mathrm{Z}_0$ est de codimension finie dans X. Si ζ décrit « positivement » le petit cercle γ autour de i qui borde D, alors $-\zeta$ décrit dans le sens positif un cercle autour de $-$i, qui est en même temps le cercle conjugué $\overline{\gamma}$; on obtient par conséquent, en intégrant l'équation (19) le long de γ comme en (7), la relation

$$\overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K}\,\rho_1^{\mathbb{C}} + \rho_1^{\mathbb{C}}\,\mathrm{P}_\mathrm{K} = 0.$$

Considérons $x_0 \in \mathrm{X}_0$ et $z_0 = (x_0, \varphi(x_0)) \in \mathrm{Z}_0$. On a

$$0 = \overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K}\rho_1^{\mathbb{C}}(z_0) + \rho_1^{\mathbb{C}}\mathrm{P}_\mathrm{K}(z_0) = \overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K}\rho_1^{\mathbb{C}}(z_0) + \rho_1^{\mathbb{C}}(z_0) = \overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K}\rho_1^{\mathbb{C}}(z_0) + (\rho_1(x_0), \rho_1\varphi(x_0)).$$

Il en résulte que $(\rho_1(x_0), \rho_1\varphi(x_0)) \in \overline{\mathrm{P}}_\mathrm{K}\mathrm{X}^{\mathbb{C}} = \overline{\mathrm{Z}}_0$; on a donc $\rho_1(x_0) \in \Re\overline{\mathrm{Z}}_0 = \Re\mathrm{Z}_0 = \mathrm{X}_0$, et comme le sous-espace conjugué $\overline{\mathrm{Z}}_0$ est le graphe de $-\varphi = \varphi^{-1}$, on conclut que

$$\rho_1\varphi(x_0) = -\varphi\rho_1(x_0), \quad x_0 \in \mathrm{X}_0.$$

Comme $\rho_1(x_0) \in \mathrm{X}_0$ pour tout $x_0 \in \mathrm{X}_0$, on déduit que $\rho_1\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$. On a trouvé les deux opérateurs φ et $(\rho_1)_{\restriction \mathrm{X}_0}$ dans $\mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ avec la propriété voulue d'anti-commutation. □

Corollaire 4.1. *Soit* X *un espace HI réel tel que* $d_s(\mathrm{X}) = 4$, *et de type* $\mathcal{R}_0$ *(un espace* pair*, selon la terminologie de [F–G]). Il existe sur* X *ou sur* $\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}^2$ *deux rotations* ρ_0, ρ_1 *dans* $\mathcal{R}(\mathrm{X})$ *ou dans* $\mathcal{R}(\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}^2)$ *telles que* $\rho_0\rho_1 + \rho_1\rho_0 = 0$. *Autrement dit, il existe dans* $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ *ou dans* $\mathcal{L}(\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}^2)$ *une sous-algèbre de dimension* 4 *isomorphe à* $\mathbb{H}$.

On dira que X est de type $\mathcal{R}_{0,0}$ lorsqu'il existe dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ une sous-algèbre de dimension 4 isomorphe à $\mathbb{H}$, et on dira que X est de type $\mathcal{R}_{0,2}$ lorsque cette sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{H}$ existe dans $\mathcal{L}(\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}^2)$, ou, de façon équivalente, sur les sous-espaces de codimension 2 de X. Dans les deux cas, on a $d_s(\mathrm{X}) = 4$ et l'espace X est de type $\mathcal{R}_0$.

Preuve. Puisque X est de type $\mathcal{R}_0$, on peut considérer $\rho_1 \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$. Par le lemme précédent, on trouve $\mathrm{X}_0 \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ tel que $\rho_1\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0$ et un opérateur $\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ qui anti-commute avec ρ_1. Puisque $\varphi \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_0)$ et que X est pair, la codimension de X_0 est paire. Si la codimension de X_0 est multiple de 4, on peut étendre φ et $(\rho_1)_{\restriction \mathrm{X}_0}$ à X en gardant leur anti-commutation, en produisant des copies de $\mathbb{H}$ et de ses opérateurs de produit par i et j, sinon on peut le faire dans $\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}^2$. □

Lemme 4.2. *Si* E *est un espace vectoriel réel de dimension finie et* ρ, ρ' *deux éléments de* $\mathcal{R}(\mathrm{E})$, *on peut les conjuguer par un isomorphisme* $\psi \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *:* $\rho' = \psi\rho\psi^{-1}$.

Preuve. La dimension de E est nécessairement paire, $\dim \mathrm{E} = 2n$. On peut trouver deux bases de E, l'une de la forme $u_1, v_1 = \rho(u_1), \ldots, u_n, v_n = \rho(u_n)$ et l'autre $u_1', v_1' = \rho'(u_1'), \ldots, u_n', v_n' = \rho'(u_n')$; on peut conjuguer ρ et ρ' en posant

$$\psi(u_j) = v_j', \;\; \psi(v_j) = -u_j'. \;\; \text{Alors } \rho'\psi(u_j) = \rho'(v_j') = \rho'^2(u_j') = -u_j' = \psi\rho(u_j),$$

et $\rho'\psi(v_j) = -\rho'(u_j') = -v_j' = -\psi(u_j) = \psi\rho(v_j)$, pour $j = 1, \ldots, n$. □

Le lemme qui suit est une variante d'un lemme de Ferenczi–Galego [F–G, Lemma 2].

Lemme 4.3. *Soient* X *un espace de Banach réel et* ρ, ρ' *deux éléments de* $\mathcal{R}(\mathrm{X})$ *; on suppose que* $\rho + \rho'$ *est un isomorphisme de* X*, ou bien que* 0 *est valeur propre isolée de multiplicité finie pour* $(\rho + \rho')^{\mathbb{C}}$ *; on peut alors conjuguer les applications* ρ *et* ρ' *par un isomorphisme* $\psi \in \mathrm{GL}(\mathrm{X})$.

Preuve. Le cas « $\rho + \rho'$ isomorphisme » est très simple puisqu'avec $\psi = \rho + \rho'$, on a

$$\rho'(\rho + \rho') = \rho'\rho - \mathrm{Id}_{\mathrm{X}} = -\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} + \rho'\rho = (\rho + \rho')\,\rho.$$

Dans l'autre cas, soit $\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_0(\rho+\rho') = \ker(\rho+\rho')^k$ le sous-espace caractéristique de $\rho+\rho'$ pour la valeur propre 0, vu à l'équation (1) ; par hypothèse, l'espace F_0 est de dimension finie. Notons que si $\mathrm{E}_0 \subset \mathrm{X}$ est invariant par ρ, alors

$$\mathrm{E}_1 = \{x \in \mathrm{X} : (\rho + \rho')(x) \in \mathrm{E}_0\}$$

est invariant par ρ' (et inversement avec ρ', ρ) : en effet si on pose $y = \rho'(x)$ pour un vecteur $x \in \mathrm{E}_1$, on a $\rho'(x) = -\rho(x)+e$, $e \in \mathrm{E}_0$ et $(\rho+\rho')(y) = \rho\rho'(x)-x = x+\rho(e)-x = \rho(e) \in \mathrm{E}_0$, donc $y = \rho'(x) \in \mathrm{E}_1$. Partant de $\mathrm{E}_0 = \{0\}$, qui est stable par ρ et par ρ', on obtient par récurrence que les noyaux successifs $\ker(\rho + \rho')^j$ sont stables par ρ' et ρ.

On sait maintenant que $\mathrm{F}_0 = \ker(\rho + \rho')^k$, évidemment stable par $\rho + \rho'$, est aussi stable par ρ et ρ' (un seul des deux suffisait !). Comme en (1), décomposons X sous la forme

$$\mathrm{X} = \mathrm{F}_0 \oplus \mathrm{Y},$$

où $\mathrm{Y} = (\rho+\rho')^k\mathrm{X}$ est stable aussi par $\rho+\rho'$. La restriction de $\rho+\rho'$ à Y est dans GL(Y) d'après la proposition 3 et on a aussi bien $\mathrm{Y} = (\rho+\rho')^{k+1}\mathrm{X}$, on peut donc supposer que la puissance k est paire, $\mathrm{Y} = (\rho + \rho')^{2\ell}\mathrm{X}$. On observe que ρ commute avec $(\rho + \rho')^2$, donc Y est invariant par ρ. On a vu au lemme 4.2 qu'on peut conjuguer les restrictions à F_0 de ρ, ρ' au moyen d'un isomorphisme $\psi_0 \in \mathrm{GL}(\mathrm{F}_0)$. Définissons ψ sur X par

$$\psi(f + y) = \psi_0(f) + (\rho + \rho')(y), \quad f \in \mathrm{F}_0,\ y \in \mathrm{Y}.$$

La restriction de $\rho + \rho'$ à Y induit un isomorphisme de Y sur Y, donc ψ est un isomorphisme de X. Alors, écrivant $x \in \mathrm{X}$ comme $x = f + y$, $f \in \mathrm{F}$ et $y \in \mathrm{Y}$, rappelant que $\rho(y) \in \mathrm{Y}$, on aura

$$\rho'\psi(f + y) = \rho'\psi_0(f) + \rho'(\rho + \rho')(y)$$
$$= \psi_0\rho(f) + (\rho + \rho')\rho(y) = \psi\rho(f + y). \quad \square$$

Corollaire 4.2. *Soient* X *un espace de Banach HI réel et* ρ, ρ' *deux éléments de* $\mathcal{R}(\mathrm{X})$ *tels que* $\pi_{\mathcal{S}}(\rho + \rho') \neq 0$ *; on peut conjuguer* ρ *et* ρ' *par un isomorphisme* $\psi \in \mathrm{GL}(\mathrm{X})$.

Preuve. L'image $r \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ de $\rho + \rho'$ est inversible dans le corps $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ (peut-être non commutatif), donc 0 n'est pas dans le spectre de $r^{\mathbb{C}}$; le corollaire 1.2 fournit l'hypothèse du lemme précédent : ou bien 0 n'est pas dans $\mathrm{Sp}((\rho + \rho')^{\mathbb{C}})$, ou bien c'est une valeur spectrale isolée, valeur propre de multiplicité finie. $\square$

Supposons que X soit un espace HI réel pair avec $d_s(\mathrm{X}) = 4$, que ρ, σ et $\tau = \rho\sigma$ soient définies sur X et représentent $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ par le fait que $\rho, \sigma \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ et $\rho\sigma + \sigma\rho = 0$. Considérons la structure complexe donnée par σ sur l'espace réel X ; on notera X_σ cet espace complexe : dire que ρ anti-commute avec σ revient à dire que ρ est une application *anti-linéaire* sur X_σ, par conséquent ρ est un élément de $\mathcal{R}(\mathrm{X}_\sigma)$.

Théorème 2. *Un espace HI réel pair* X *tel que* $d_s(\mathrm{X}) = 4$ *est de type* $\mathcal{R}_{0,0}$ *ou de type* $\mathcal{R}_{0,2}$*, il ne peut pas être à la fois des deux types* $\mathcal{R}_{0,0}$ *et* $\mathcal{R}_{0,2}$*.*

Preuve. La première affirmation est donnée par le corollaire 4.1. Supposons maintenant que X soit un espace HI réel pair avec $d_s(\mathrm{X}) = 4$ et possédant les deux types $\mathcal{R}_{0,0}$ et $\mathcal{R}_{0,2}$. Puisque X est de type $\mathcal{R}_{0,0}$, il existe $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ qui représentent $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$. Puisque X est aussi de type $\mathcal{R}_{0,2}$ et que tous les sous-espaces de codimension 2 de X sont isomorphes entre eux, il existera une autre représentation de $\mathbb{H}$ sur n'importe quel sous-espace Y de X de codimension réelle égale à 2.

Supposons donc que ρ, σ et $\tau = \rho\sigma$ soient définies sur X et représentent $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{X})$ par le fait que $\rho, \sigma \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ et $\rho\sigma + \sigma\rho = 0$. On supposera que $\pi_{\mathcal{S}}(\rho) = \mathrm{i}_{\mathcal{S}}$ et que $\pi_{\mathcal{S}}(\sigma) = \mathrm{j}_{\mathcal{S}} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$. Introduisons Y de codimension 2, invariant par σ, de la façon suivante : on considère $x_0 \in \mathrm{X}$ non nul, puis les quatre vecteurs $\mathbb{R}$-linéairement indépendants $x_0, \rho(x_0), \sigma(x_0)$ et $\tau(x_0)$; soit ξ une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur X telle que $\xi(\sigma(x_0)) = 1$ mais nulle sur les trois autres vecteurs $x_0, \rho(x_0)$ et $\tau(x_0)$. Alors $\sigma^*(\xi) = \xi \circ \sigma$ vaut 1 sur le vecteur x_0, et 0 sur les trois autres vecteurs ; le sous-espace

$$\mathrm{Y} = \ker(\xi) \cap \ker \sigma^*(\xi) = \{x \in \mathrm{X} : \xi(x) = \xi(\sigma(x)) = 0\} \subset \mathrm{X}$$

est de codimension réelle 2 dans X, et il est invariant par σ.

Puisque X est aussi de type $\mathcal{R}_{0,2}$, considérons $\rho', \sigma', \tau' = \rho'\sigma'$ qui représentent l'algèbre $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{Y})$. En conjuguant par $\psi \in \mathrm{GL}(\mathrm{Y})$ on voit que $\psi^{-1}\rho'\psi$, $\psi^{-1}\sigma'\psi$, $\psi^{-1}\tau'\psi$ est une autre représentation de $\mathbb{H}$ dans laquelle on peut, d'après le corollaire 4.2, supposer que $\sigma' = \sigma_{\restriction \mathrm{Y}}$, en échangeant si nécessaire ρ' et σ' dans la deuxième représentation pour garantir $\pi_{\mathcal{S}}(\sigma + \sigma') \neq 0$ et pouvoir appliquer ce corollaire 4.2.

Considérons la structure complexe donnée par $\sigma \in \mathcal{R}(\mathrm{X})$ sur l'espace réel X ; on notera X_σ cet espace complexe, où on aura modifié la norme pour en faire une norme complexe ; dire que ρ anti-commute avec σ revient à dire que ρ est une application *anti-linéaire* sur X_σ, donc $\rho \in \mathcal{R}(\mathrm{X}_\sigma)$. L'espace Y, invariant par σ, est un $\mathbb{C}$-hyperplan Y_σ de X_σ, et de la même façon, le fait que l'application ρ' anti-commute avec $\sigma' = \sigma_{\restriction \mathrm{Y}}$ revient à dire que ρ' est anti-linéaire sur Y_σ et donc $\rho' \in \mathcal{R}(\mathrm{Y}_\sigma)$. Désormais on écrira simplement Y au lieu de Y_σ. L'espace X_σ est un espace HI complexe : en effet, les sous-espaces complexes de dimension infinie de X_σ sont aussi des $\mathbb{R}$-sous-espaces de X.

D'après le lemme 2.2 dans le cas complexe, il existe un $e_0 \in \mathrm{X}_\sigma$ de norme $< \mathrm{K}_\rho + 1$ tel que $\operatorname{dist}(e_0, \mathrm{Y}) = 1$ et que $\rho(e_0) \in \mathrm{Y}$; on a $\mathrm{X}_\sigma = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathrm{Y}$. On prolonge ρ' à X_σ en posant $\rho'(\alpha e_0) = \overline{\alpha} e_0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, de sorte que ρ' ainsi prolongée est anti-linéaire sur X_σ. On a alors $\rho'^2(\alpha e_0) = \alpha e_0$, et $\rho'^2_{\restriction \mathrm{Y}} = -\mathrm{Id}_\mathrm{Y}$ sur Y ; il sera commode d'utiliser le fait que $\rho'^4 = \mathrm{Id}_{\mathrm{X}_\sigma}$. Maintenant, le produit $\mathrm{T} = \rho\rho'$ est défini sur X_σ, et il est $\mathbb{C}$-linéaire.

Les images $\pi_{\mathcal{S}}(\rho)$ et $\pi_{\mathcal{S}}(\rho')$ anti-commutent avec $\pi_{\mathcal{S}}(\sigma)$, qu'on a choisi de prendre égal à l'élément $\mathrm{j}_{\mathcal{S}}$ des quaternions de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$; on a par conséquent

$$\pi_{\mathcal{S}}(\rho) = b\,\mathrm{i}_{\mathcal{S}} + d\,\mathrm{k}_{\mathcal{S}}, \quad \pi_{\mathcal{S}}(\rho') = b'\,\mathrm{i}_{\mathcal{S}} + d'\,\mathrm{k}_{\mathcal{S}}, \quad b, d, b', d' \in \mathbb{R},$$

donc $\pi_{\mathcal{S}}(\rho\rho') = -(bb' + dd')\mathbf{1}_{\mathcal{S}} + (db' - bd')\,\mathrm{j}_{\mathcal{S}}$; cela fournit la valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle qu'on puisse écrire $\mathrm{T} = \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}_\sigma} + \mathrm{S}$ avec $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{X}_\sigma)$, à savoir $\lambda = -(bb' + dd') + (db' - bd')\,\mathrm{i}$, de plus $\pi_{\mathcal{S}}(\rho\rho') \neq 0$ puisque $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif, et donc $\lambda \neq 0$.

Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X}_\sigma)$ l'image d'un projecteur spectral de T, obtenu pour un contour entourant un disque centré en $\lambda \neq 0$. On peut supposer que 0 n'est pas dans ce disque, donc par le résultat spectral de la proposition 3, la restriction $\mathrm{T}_{\restriction \mathrm{U}} = (\rho\rho')_{\restriction \mathrm{U}}$ est dans $\mathrm{GL}(\mathrm{U})$. On a par conséquent

$$\rho\rho'\mathrm{U} = \mathrm{U}, \quad \text{d'où } \rho'\mathrm{U} = \rho\mathrm{U}.$$

Alors $\mathrm{V}_0 = \mathrm{U} \cap \rho\mathrm{U}$ est invariant par ρ, et on a aussi $\mathrm{V}_0 = \mathrm{U} \cap \rho'\mathrm{U}$. De plus, le sous-espace V_0 est de codimension finie dans X_σ.

Si $v \in \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{Y}$, on a d'une part $v \in \mathrm{V}_0 = \mathrm{U} \cap \rho'\mathrm{U}$ donc $v \in \mathrm{U}$ et $v = \rho'(u)$, $u \in \mathrm{U}$. D'autre part, on a $v \in \mathrm{Y}$, donc $\rho'^3(v) \in \mathrm{Y}$ puisque Y est ρ'-stable, et par conséquent $u = \rho'^4(u) = \rho'^3(v) \in \mathrm{Y}$. On a $\rho'_{\restriction \mathrm{Y}} \in \mathcal{R}(\mathrm{Y})$, donc $\rho'(v) = \rho'^2(u) = -u \in \mathrm{U}$ ce qui implique que $\rho'(v)$ est dans $\mathrm{U} \cap \rho'\mathrm{U}$, de plus $\rho'(v) \in \mathrm{Y}$. Finalement $\rho'(v) \in \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{Y}$. Le sous-espace $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{Y}$ est stable par ρ', V_0 est stable par ρ et V_1 est un hyperplan de V_0 ; en effet, on peut voir que V_1 est différent de V_0 pour une raison de codimension : le $\mathbb{C}$-espace V_0 est invariant par ρ, donc sa $\mathbb{C}$-codimension dans X_σ est paire par le lemme 2.1, alors que le cas de V_1, invariant par $\rho'_{\restriction \mathrm{Y}} \in \mathcal{R}(\mathrm{Y})$, ramène à l'hyperplan Y de X_σ et donne une $\mathbb{C}$-codimension impaire dans X_σ.

On est dans le cas complexe du lemme 2.5, avec $\mathrm{U} = \mathrm{U}$, $\mathrm{Y}_0 = \mathrm{V}_0$ et $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{V}_1$. Le polynôme ici sera simplement $p(t) = t - \lambda$; la restriction à U de $p(\mathrm{T}) = \rho\rho' - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{X}_\sigma}$ a son spectre dans un petit disque centré en 0, dont on peut supposer le rayon $< \kappa_\rho \kappa_{\rho'}$, contrairement à la conclusion du lemme 2.5. On a atteint une contradiction, et l'espace X ne peut pas être à la fois de type $\mathcal{R}_{0,0}$ et $\mathcal{R}_{0,2}$. □

Remarque–Question. Soit X un espace HI réel tel que $d_s(\mathrm{X}) > 1$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ tel que $\pi_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})^2 = -\mathbf{1}_{\mathcal{S}}$. Comme T est 0-Fredholm, il existe un sous-espace $\mathrm{V} \in \mathcal{G}_{/\mathrm{F}}(\mathrm{X})$ et $\kappa > 0$ tels que $\|\mathrm{T}v\| \geqslant \kappa\|v\|$ pour tout $v \in \mathrm{V}$. Si X_0 est un sous-espace de X et $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_0 \cap \mathrm{V}$, la propriété HI appliquée à X_1 et à son image TX_1 implique l'existence d'une suite basique $(e_n) \subset \mathrm{X}_1$, de constante < 2 disons, telle que $\sum_n \operatorname{dist}(\mathrm{T}(e_n), \mathrm{X}_1) < \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ sera choisi suffisamment petit ; on peut trouver une suite $(f_n) \subset \mathrm{X}_1$ telle que $\sum_n \|\mathrm{T}(e_n) - f_n\| < 2\varepsilon$, et $(\mathrm{T}(e_n))$ est aussi basique, de constante $< 2\kappa^{-1}\|\mathrm{T}\|^{-1}$. Par le caractère strictement singulier de $\mathrm{T}^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{X}$, on peut faire la construction de proche en proche de façon que les vecteurs $(e_m)_{m \geqslant n}$ soient dans un sous-espace $\mathrm{Y}_n \subset \mathrm{Y}_{n-1}$ de X_1 sur lequel $\|(\mathrm{T}^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{X})y\| \leqslant 2^{-n}\|y\|$. Considérons l'espace $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}_1$ engendré par la suite (e_n) ; l'opérateur U défini sur TY par $\mathrm{U}(\mathrm{T}(e_n)) = f_n$ est un isomorphisme de TY dans Y, et $\mathrm{T}' = \mathrm{U} \circ \mathrm{T}$ est un endomorphisme de Y tel que $\mathrm{T}'^2 + \mathrm{Id}_\mathrm{Y}$ soit infiniment singulier, donc strictement singulier puisque Y est HI. Ainsi, tout sous-espace X_0 d'un espace HI X tel que $d_s(\mathrm{X}) > 1$ contient un sous-sous-espace $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}_0$ tel que $d_s(\mathrm{Y}) > 1$.

Cette ligne de raisonnement est tirée de [Fer2], où l'auteur introduit une notion de « germes d'opérateurs » : à chaque opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ défini sur un sous-espace Y (variable) de X on associe un élément $g(\mathrm{T})$ d'un ensemble $\mathcal{G}(\mathrm{X})$, de façon que pour tout sous-espace $\mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{Y}$, on ait $g(\mathrm{T}) = g(\mathrm{T}_{\restriction \mathrm{Y}_0})$, et qu'on ait $g(\mathrm{T}_0) = g(\mathrm{T}_1)$ quand $\mathrm{T}_0 \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}_0, \mathrm{X})$, $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}_1, \mathrm{X})$ et $\mathrm{T}_0 = \mathrm{T}_1\mathrm{U}$, avec $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1)$ tel que $\mathrm{U}(y_0) = y_0 + \mathrm{S}(y_0) \in \mathrm{Y}_1$ pour tout $y_0 \in \mathrm{Y}_0$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{S}(\mathrm{Y}_0, \mathrm{X})$. L'espace $\mathcal{G}(\mathrm{X})$ a une structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$, qui en fait un corps, peut-être non commutatif, donc isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. L'espace $\mathcal{G}(\mathrm{X})$ est *a priori* plus riche que $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$, qui ne prend en compte que les opérateurs définis sur X entier ; on en déduit que $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X}) \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ puisque $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$ se plonge dans $\mathcal{G}(\mathrm{X})$ (à la fin de [Fer3], on en trouve une preuve directe fondée sur les rapports entre le caractère Fredholm et l'inversibilité dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}(\mathrm{X})$).

Le début de la remarque illustre la situation décrite dans [Fer2] : appliquée à un sous-espace X d'un espace HI réel $\mathcal{X}$ « plus gros » que X, elle dit que la présence d'un opérateur $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{X})$ qui témoigne de la propriété $d_s(\mathrm{X}) > 1$ va subsister dans un « filtre » de sous-sous-espaces de $\mathcal{X}$, et contribuer à un élément non nul de $\mathcal{G}(\mathcal{X})$. Il ne semble pas impossible qu'un espace HI avec $d_s(\mathcal{X}) = 1$ puisse contenir un sous-espace Y avec $d_s(\mathrm{Y}) > 1$. Je ne me rappelle pas avoir vu un tel exemple. Existe-t-il ? De même, un espace HI réel $\mathcal{X}$ avec $d_s(\mathcal{X}) > 1$ pourrait contenir Y tel que $d_s(\mathrm{Y}) = 1$.

Bibliographie

[Aien] P. Aiena, Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers, Kluwer Academic Publishers, Springer 2004.

[A–D] S. Argyros & I. Deliyanni, Examples of asymptotic-ℓ^1 Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 3, 973–995.

[A–H] S. Argyros & R. Haydon, A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}^\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem, Acta Math. 206 (2011), no. 1, 1–54.

[Bana] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografie Matematyczne 1, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 1932.

[deR1] N. de Rancourt, Spectral-free methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin, à paraître.

[deR2] N. de Rancourt, Connected components of the general linear group of hereditarily indecomposable Banach spaces, preprint.

[D–S] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I : General Theory, Interscience, New York, 1958.

[Fer1] V. Ferenczi, A uniformly convex hereditarily indecomposable Banach space, Israel J. Math. 102 (1997), 199–225.

[Fer2] V. Ferenczi, Operators on subspaces of hereditarily indecomposable Banach spaces, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), 338–344.

[Fer3] V. Ferenczi, Hereditarily finitely decomposable Banach spaces, Studia Math. 123 (1997), no. 2, 135–149.

[Fer4] V. Ferenczi, Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach spaces, Advances in Mathematics 213 (2007), 462–488.

[F–G] V. Ferenczi & E. M. Galego, Even infinite-dimensional real Banach spaces, Journal of Functional Analysis 253 (2007), 534–549.

[Gonz] M. González, Banach spaces with small Calkin algebras, in : Banach Center Publ., vol. 75, 2007, pp. 159–170.

[Gowe] W. T. Gowers, A solution to Banach's hyperplane problem. Bull. London Math. Soc. 26 (1994), no. 6, 523–530.

[G–M] W. T. Gowers & B. Maurey, The unconditional basic sequence problem, J. Amer. Math. Soc. 6 (4) (1993), 851–874.

[L–T] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, Springer-Verlag, New York, 1979.

[Rudi] W. Rudin, Real and complex analysis, third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. xiv+416 pp.