Université Paris 7–Denis-Diderot **Année 2002–2003**
MT 241

PROBLÈME n° 1

I

Montrer que la série de terme général

$$a_n = \frac{n^2 + 9n + 5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}$$

est convergente et calculer sa somme.

II

Étudier, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

III

1) La série $\sum c_n$ étant supposée absolument convergente, montrer que la série $\sum c_n^2$ est convergente.

2) L'affirmation précédente reste-t-elle valide lorsqu'on suppose seulement que la série $\sum c_n$ est convergente ?

IV

On se propose de calculer la somme de la série de terme général

$$d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \ln(2), \quad \text{pour } n \geq 1.$$

1) Montrer que pour tout $t \neq -1$, on a

$$\frac{1}{1+t} = \frac{(-t)^n}{1+t} + \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k.$$

En déduire que

$$d_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

2) On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^n d_k$. Montrer que

$$\mathrm{S}_n = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\, dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt$$

où

$$\lim_n (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt = 0.$$

3) Montrer que la série $\sum d_n$ est convergente et calculer sa somme.

4) Cette série est-elle absolument convergente ?