MT241 **Examen du 3 septembre 2003**

durée : 3 heures

Le poly est le seul document autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Exercice I.

1. Soit a un paramètre réel ; démontrer la convergence de la série numérique

$$\sum \left(\frac{n}{2^n}\sin(na)\right)_{n\geq 0}.$$

2. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\sin(nx).$$

Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer, pour t réel tel que $|t| < 1$, les sommes des séries entières

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,t^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\,t^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\,t^n.$$

En déduire la valeur de $f'(0)$.

Exercice II.

1. On suppose que la fonction $t \to y(t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y''(t) - y(t) = \sin(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Par récurrence, montrer que $y^{(2n)}(0) = 0$ et calculer les valeurs des dérivées $y^{(2n+1)}(0)$ pour tout entier $n \geq 0$.

2. Trouver une série entière $\sum a_n t^n$ solution de l'équation (E). Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

3. Exprimer la somme de la série entière précédente au moyen des fonctions classiques $\sin(t)$, e^t, $\mathrm{sh}(t)$, etc...

Exercice III.

On considère le système différentiel

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\,x(t) + y(t) \\ y'(t) &= \quad x(t) + z(t) \\ z'(t) &= \quad x(t). \end{aligned}$$

Déterminer la solution de ce système différentiel qui vérifie la condition initiale

$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, -1).$$