Université Denis Diderot (Paris VII) *Lundi 12 février 1996.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

EXAMEN.

Les trois parties sont indépendantes. Documents et calculettes interdits.

I - *11 points*

On note $H = \ell^2(\mathbf{Z})$ l'espace hilbertien des familles $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n|^2 < +\infty$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille bornée de nombres complexes.

1. a) Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(H)$ telle que, pour tout $\xi = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in H$ on ait $T\xi = (y_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ où pour $n \in \mathbf{Z}$, on a $y_n = a_n x_{n-1}$.
b) Pour $\xi = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \in H$ calculer $T^*\xi$.
c) Montrer que T est normal si et seulement si $|a_n|$ ne dépend pas de n.

2. On pose $a_n = 1$ si $n < 0$ et $a_n = 2$ si $n \geq 0$.
a) Montrer que T est bijective et calculer T^{-1}.
b) Calculer la norme de T et celle de T^{-1}.
c) Calculer le spectre ponctuel de T et celui de T^*. En déduire le spectre résiduel et le spectre continu de T.

II -*4 points*

Soient H un espace hilbertien complexe et T un opérateur densément défini de H dans H.
a) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $x \in \operatorname{dom} T$, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$.
(ii) Pour tout $x, y \in \operatorname{dom} T$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.
(iii) T^* est une extension de T.

Si T vérifie ces conditions équivalentes, on dit qu'il est *hermitien* (ou symétrique).
b) On suppose que T est hermitien. Montrer que T est fermable et que $\overline{T}$ est hermitien.

III - *5 points*

Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.
a) Montrer que, pour toute fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, on a $Tf(T^*T) = f(TT^*)T$ *(on étudiera d'abord le cas où f est polynomiale).*
b) On suppose que $\|T\| \leq 1$. Montrer que l'application $U \in \mathcal{L}(E \oplus F)$ donnée par $U(x, y) = (\sqrt{\mathrm{id}_E - T^*T}\, x - T^*y, Tx + \sqrt{\mathrm{id}_F - TT^*}\, y)$ est unitaire.
c) *Facultatif.* Montrer que, pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, on a $Tf(T^*T) = f(TT^*)T$.