Université Denis Diderot (Paris VII) *Samedi 25 Novembre 1995.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

EXAMEN PARTIEL.

Les deux parties sont indépendantes. Documents et calculettes interdits.

I

Soit H un espace hilbertien. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans lui même. Un élément $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit *positif* si $T = T^*$ et, pour tout $x \in H$, on a $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}_+$. On note $\mathrm{id}_H \in \mathcal{L}(H)$ l'application identique (telle que, pour tout $x \in H$, on ait $\mathrm{id}_H(x) = x$).

1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément positif.
a) Montrer que, pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$, S^*TS est positif, puis que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, T^n est positif (par convention $T^0 = \mathrm{id}_H$).
b) Montrer que, pour tout $x, y \in H$, on a : $|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle$.
c) Si de plus $\mathrm{id}_H - T$ est positif, montrer que, pour tout $x \in H$, $\langle Tx, Tx\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$.
d) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathrm{id}_H - T$ est positif.
   (ii) $T - T^2$ est positif.
   (iii) $\|T\| \leq 1$.

2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un élément positif tel que $\mathrm{id}_H - T$ soit positif.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T^n - T^{n+1}$ est positif.
b) Montrer que, pour tout $x \in H$, la suite $(\langle T^n x, x\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
c) Montrer que la suite $(T^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(H)$ pour la topologie forte *(à l'aide de 1.c, on démontrera que, pour tout $x \in H$, la suite $(T^n x)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy).*

On note P la limite forte de la suite $(T^n)_{n\in\mathbf{N}}$.
d) Montrer que $P = P^*$ et que $TP = P$.
e) Soit $x \in H$ tel que $Tx = x$. Montrer que $Px = x$. En déduire que $P^2 = P$ puis que P est le projecteur orthogonal d'image $\ker(T - \mathrm{id}_H)$.

II

Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire continue. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe $k \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \geq k\|x\|$.
(ii) f est injective et son image est fermée dans F.
(iii) f induit un homéomorphisme de E sur $f(E)$.
(iv) La transposée (topologique) ${}^t f : F' \to E'$ de f est surjective.

On pourra montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).