Université Denis Diderot (Paris VII) *Samedi 25 Novembre 1995.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

CORRIGÉ DU PARTIEL.

I

1. a) Pour $a, b \in \mathcal{L}(H)$, on a $(ab)^* = b^*a^*$, donc $(S^*TS)^* = S^*T^*(S^*)^* = S^*TS$; soit $x \in H$, posons $y = Sx$. Comme T est positif, $\langle Ty, y\rangle \in \mathbf{R}_+$. Or $\langle Ty, y\rangle = \langle TSx, Sx\rangle = \langle S^*TSx, x\rangle$, donc S^*TS est positif.

Montrons par récurrence sur n que T^{2n} et T^{2n+1} sont positifs. Pour $x, y \in H$, $\langle \mathrm{id}_H x, y\rangle = \langle x, id_H y\rangle = \langle x, y\rangle$ donc $(T^0)^* = T^0$; de plus $\langle \mathrm{id}_H x, x\rangle = \langle x, x\rangle \in \mathbf{R}_+$, donc T^0 est positif ; par hypothèse, $T = T^1$ est positif. Supposons qu'on sache que T^{2n} et T^{2n+1} sont positifs ; alors $T^{2(n+1)} = TT^{2n}T$ et $T^{2(n+1)+1} = TT^{2n+1}T$ sont positifs.

b) Pour $x, y \in H$, posons $b(x, y) = \langle Tx, y\rangle$. Pour tout $y \in H$, l'application $x \mapsto b(x, y)$ est linéaire. Pour tout $y \in H$, on a $b(y, x) = \langle Ty, x\rangle = \overline{\langle x, Ty\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle}$ car $T = T^*$, donc b est une forme hermitienne. Or, pour tout $x \in H$, on a $b(x, x) = \langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}_+$, donc b est positive. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour b donne alors $|\langle Tx, y\rangle|^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle$ (pour tout $x, y \in H$).

c) Si de plus $\mathrm{id}_H - T$ est positif, on a $\langle Ty, y\rangle \leq \langle y, y\rangle$, donc, prenant $y = Tx$ dans b) on trouve $\langle Tx, Tx\rangle^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Tx, Tx\rangle$; comme $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, il s'ensuit que $\langle Tx, Tx\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$

d) Comme $(T - T^2)^* = T - T^2$, on déduit de c) que (i) $\Rightarrow$ (ii). Si $T - T^2$ est positif, pour tout $x \in H$, on a $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle \leq \langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|\|x\|$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc $\|Tx\| \leq \|x\|$, donc $\|T\| \leq 1$.

Enfin, si $\|T\| \leq 1$, pour tout $x \in H$, on a $\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, donc $\mathrm{id}_H - T$ est positif (il est clairement autoadjoint).

2. a) Soit $n \in \mathbf{N}$; notons k la partie entière de $n/2$. Si $n = 2k$, $T^n - T^{n+1} = T^k(\mathrm{id}_H - T)T^k$ est positif par 1.a). Si $n = 2k+1$, $T^n - T^{n+1} = T^k(T - T^2)T^k$ est positif par 1.a) et 1.d).

b) La suite $(\langle T^n x, x\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, par 2.a) ; par 1.a) elle est minorée par 0 ; elle est donc convergente.

c) Soient $n, m \in \mathbf{N}$; supposons que $n \leq m$. Il est clair que $(T^n - T^m)^* = T^n - T^m$; pour tout $x \in H$ la suite $(\langle T^k x, x\rangle)_{k\in\mathbf{N}}$ étant décroissante et minorée par 0, on a $\langle T^0 x, x\rangle \geq \langle T^n x, x\rangle \geq \langle T^m x, x\rangle \geq 0$, donc $0 \leq \langle (T^n - T^m)x, x\rangle \leq \langle \mathrm{id}_H x, x\rangle$. Donc $T^n - T^m$ et $\mathrm{id}_H - (T^n - T^m)$ sont positifs. Par 1.c), pour tout $x \in H$ on a alors $\|(T^n - T^m)x\|^2 \leq \langle T^n x, x\rangle - \langle T^m x, x\rangle$. Comme la suite $(\langle T^n x, x\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$, est de Cauchy, il en va de même pour la suite $(T^n x)_{n\in\mathbf{N}}$. Elle converge donc vers une limite, car H est complet ; notons $P(x)$ cette limite. L'ensemble des applications linéaires étant fermé dans H^H pour la topologie de la convergence simple, P est linéaire. Comme pour tout n et tout $x \in H$ on a $\|T^n x\| \leq \|T\|^n\|x\| \leq \|x\|$, cela reste vrai à la limite : $\|P(x)\| \leq \|x\|$; donc P est continue et $(T^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(H)$ pour la topologie forte.

d) Comme l'application $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue, pour $x, y \in H$, la suite $(\langle T^n x, y\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\langle Px, y\rangle$. Comme pour tout n, $(T^n)^* = T^n$, on a $\langle P^*x, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \lim_n\langle x, T^n y\rangle = \lim_n\langle T^n x, y\rangle = \langle Px, y\rangle$, donc $P = P^*$. Comme T est continue, $TPx = \lim_n TT^n x = Px$, donc $TP = P$.

e) Si $Tx = x$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T^n x = x$, donc $Px = x$. Soit $y \in H$; posons $x = Py$; par 2.d), $Tx = TPy = Py = x$, donc $Px = x$. Cela ayant lieu pour tout $y \in H$, on a $P^2 = P$. Par d), $(T - \mathrm{id}_H)P = 0$ donc $\mathrm{im}\,P \subset \ker(T - \mathrm{id}_H)$; pour $x \in \ker(T - \mathrm{id}_H)$, $Px = x$ donc $x \in \mathrm{im}\,P$; donc $\mathrm{im}\,P = \ker(T - \mathrm{id}_H)$. Enfin, si $x \in (\mathrm{im}P)^\perp$, pour tout $y \in H$ on a

$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle = 0$, donc $Px = 0$. On en déduit que $P(x+y) = x$ si $x \in \ker(T - \mathrm{id}_H)$ et $y \in (\ker(T - \mathrm{id}_H))^\perp$; donc P est le projecteur orthogonal d'image $\ker(T - \mathrm{id}_H)$.

II

Supposons (i) vérifiée. Soit $x \in E$; si $f(x) = 0$, alors $k\|x\| \leq \|f(x)\| = 0$, donc $x = 0$; on en déduit que f est injective. Soit $(y_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy dans $f(E)$; pour tout n, comme $y_n \in f(E)$, il existe $x_n \in E$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme, pour tout $m, n \in \mathbf{N}$, $k\|x_n - x_m\| \leq \|f(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\|$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy dans E, donc convergente ; comme f est continue, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente *i.e.* la suite $(y_n)_{n\in N}$ est convergente.

Il en résulte que $f(E)$ est complet donc fermé dans F. Donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

Supposons (ii) vérifiée. Notons $g : E \to f(E)$ l'application linéaire continue définie par $g(x) = f(x)$ (pour tout $x \in E$). Comme $f(E)$ est fermé dans F, c'est un espace de Banach ; comme g est surjective, elle est ouverte par le théorème de l'application ouverte ; c'est donc un homéomorphisme. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Supposons (iii) vérifiée. Soit $\ell \in E'$; alors $\ell \circ g^{-1} \in f(E)'$, où $g : E \to f(E)$ est l'application linéaire continue définie par $g(x) = f(x)$ (pour tout $x \in E$). Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $h \in F'$ dont la restriction à $f(E)$ soit $\ell \circ g^{-1}$; alors, pour tout $x \in E$, on a $({}^t f(h))(x) = (h \circ f)(x) = h(g(x)) = (\ell \circ g^{-1} \circ g)(x) = \ell(x)$. Il s'ensuit que ${}^t f$ est surjective. Donc (iii) $\Rightarrow$ (iv).

Enfin, supposons (iv) vérifiée. Par le théorème de l'application ouverte, il existe $k \in \mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout $\ell \in E'$, il existe $h \in F'$ tel que ${}^t f(h) = \ell$ et $\|\ell\| \geq k\|h\|$. Soit alors $x \in E$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\ell \in E'$ tel que $\|\ell\| \leq 1$ et $|\ell(x)| = \|x\|$. Soit alors $h \in F'$ tel que ${}^t f(h) = \ell$ et $1 \geq \|\ell\| \geq k\|h\|$. Alors $\|x\| = |\ell(x)| = |({}^t f(h))(x)| = |h(f(x)) \leq \|h\|\|f(x)\|$, donc $\|f(x)\| \geq k\|h\|\|f(x)\| \geq k\|x\|$. Donc (iv) $\Rightarrow$ (i).