Université Denis Diderot (Paris VII) *Vendredi 6 septembre 1996.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Examen.

Les trois parties sont indépendantes. *Barème approximatif* I :2, II :4, III :14.
Documents et calculettes interdits.

I - Exercice

Soit T un opérateur compact d'un espace hilbertien H dans un espace hilbertien K. Montrer qu'il existe une base hilbertienne B de H telle que le système $\{Tb\,,\ b \in B\}$ soit orthogonal dans K *(on pourra diagonaliser T^*T).*

II - Exercice

Rappelons que pour une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ on définit un opérateur continu $M_f \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$, qui à la (classe de la) fonction g associe la (classe de la) fonction fg. Quel est le spectre de M_φ, où φ désigne l'application qui à $x \in [0,1]$ associe x ($\in \mathbf{C}$) ?

III - Problème

Soient E et F des espaces de Banach. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F.

1. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer qu'il existe un sous-espace fermé E_2 de E supplémentaire de E_1 *(on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E_1).*

2. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue surjective.
a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $\{\, y \in F\,,\ \|y\| \leq 1\,\} \subset \{\, Tx\,,\ x \in E\,,\ \|x\| \leq k\,\}$.

On fixe $k \in \mathbf{R}_+$ satisfaisant à la condition de a).
b) Montrer que pour tout $\ell \in F'$ on a $k\|\ell \circ T\| \geq \|\ell\|$.

Soit $S \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $k\|S - T\| < 1$. On pose $r = k\|S-T\|$. Soit $y \in F$
c) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq k\|y\|$ et $\|Sx - y\| \leq r\|y\|$.
d) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E et une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F tels que $y_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $\|x_n\| \leq k\|y_n\|$, $\|y_{n+1}\| \leq r\|y_n\|$ et $y_{n+1} = y_n - Sx_n$.
e) En déduire que S est surjective *(on posera $z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$; on montrera que la suite z_n converge et on calculera l'image de sa limite).*

3. Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues surjectives de E dans F est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons Ω_n l'ensemble des applications linéaires continues surjectives T de E dans F tels que la dimension de $\ker T$ soit supérieure ou égale à n.
a) Soit $T \in \Omega_n$ et $E_1 \subset \ker T$ un sous-espace de dimension n. Soit E_2 un sous-espace fermé E_2 de E supplémentaire de E_1. Montrer que l'ensemble des $S \in \mathcal{L}(E,F)$ dont la restriction à E_2 est surjective est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.
b) Montrer que Ω_n est un sous ensemble ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$.