Université Denis Diderot (Paris VII) *Mercredi 29 janvier 1997.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Examen.

Les trois parties sont indépendantes. Documents et calculettes interdits.

Barème approximatif I : 6, II : 5, III : 9.

Dans les parties I et II, $L^2([0,1])$ désigne l'espace hilbertien des classes de fonctions mesurables de carré intégrable de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ pour la mesure de Lebesgue. On note $\| \ \|_2$ sa norme.

I

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue et périodique de période 1. Pour toute fonction intégrable $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ et tout $t \in [0,1]$, on pose

$$(\varphi \star f)(t) = \int_0^1 f(s)\varphi(t-s)\,ds\,.$$

a) Montrer que, pour toute fonction intégrable $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ la fonction $\varphi \star f$ est continue sur $[0,1]$.
b) Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ qui à (la classe d')une fonction f associe la (classe de la) fonction $\varphi \star f$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, notons $e_n \in L^2([0,1])$ la (classe de la) fonction $t \mapsto e^{2ni\pi t}$. Rappelons que $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.
c) Montrer que $Te_n = \lambda_n e_n$, où on a posé $\lambda_n = \int_0^1 \varphi(s)e^{-2ni\pi s}\,ds$.
d) Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt et que $\|T\|_2^2 = \int_0^1 |\varphi(s)|^2\,ds$ où $\|T\|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de T.
e) Quel est le spectre de T ?

II

On note $C([0,1])$ l'espace de Banach des application continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ (muni de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{\,|f(t)|\,,\ t\in[0,1]\,\}$).

Notons $j : C([0,1]) \to L^2([0,1])$ l'application qui à toute fonction continue f associe sa classe dans L^2.

Soit E un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ tel que $j(E)$ soit un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$.

1. Montrer que la réciproque $\varphi : j(E) \to E$ de la restriction de j est continue. En déduire qu'il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\|f\|_\infty \le M\|j(f)\|_2$.

2. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, il existe un unique élément $g_t \in j(E)$ tel que, pour tout $f \in E$ on ait $\langle j(f), g_t\rangle = f(t)$. Montrer que $\|g_t\|_2 \le M$.

3. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une suite d'éléments de E telle que $(j(f_1), \ldots, j(f_n))$ soit un système orthonormal de $j(E)$. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2 \leq \|g_t\|_2^2$.

4. En déduire que la dimension de E est finie.

III

Soit E un espace hilbertien complexe non nul et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur normal.

1. On suppose que $\operatorname{Sp} T \subset \{ \lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1 \}$.
a) Montrer que $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$.
b) En déduire que T est unitaire.

2. On suppose que $\operatorname{Sp} T \subset \mathbf{R}$. On pose $U = (\mathrm{id}_E + iT)(\mathrm{id}_E - iT)^{-1}$.
a) Montrer que U est unitaire.
b) Montrer que $-1 \notin \operatorname{Sp} U$ et que $T = i(U + \mathrm{id}_E)^{-1}(U - \mathrm{id}_E)$.
c) Montrer que $T = T^*$.

3. Soit D un opérateur densément défini fermé de E dans E. On suppose que $D^*D = DD^*$ et que $\operatorname{dom} D = \operatorname{dom} D^*$.

Soit $\lambda \in \mathbf{C}$.
a) Montrer que $(D - \lambda \mathrm{id}_E)^* = D^* - \overline{\lambda} \mathrm{id}_E$ et que le domaine de $(D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D - \lambda \mathrm{id}_E)$ est égal au domaine de D^*D.
b) Montrer que $(D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D - \lambda \mathrm{id}_E) = (D - \lambda \mathrm{id}_E)(D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E)$.
c) On suppose que $\lambda \notin \operatorname{Sp} D$. Montrer que $\overline{\lambda} \notin \operatorname{Sp} D^*$ et que $(D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E)^{-1} = ((D - \lambda \mathrm{id}_E)^{-1})^*$. En déduire que $(D - \lambda \mathrm{id}_E)^{-1}$ est normal.

Questions facultatives :

On suppose que $\operatorname{Sp} D \subset \mathbf{R}$. On pose $U = (\mathrm{id}_E + iD)(\mathrm{id}_E - iD)^{-1}$.
d) Montrer que U est un élément unitaire (de $\mathcal{L}(E)$).
e) En déduire que $D = D^*$.