**Université Denis Diderot (Paris VII)** *Mercredi 29 janvier 1997.*

Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Corrigé de l'examen.

I

a) Comme $\varphi$ est continue sur $[-1,1]$, elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ ; il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [-1,1]$ tels que $|x-y| < \alpha$ on ait $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Si $x, y \in [0,1]$ sont tels que $|x-y| < \alpha$, alors $\varphi \star f(x) - \varphi \star f(y) = \int_0^1 f(t)(\varphi(x-t) - \varphi(y-t))\, dt$, donc $|\varphi \star f(x) - \varphi \star f(y)| \le \varepsilon \int_0^1 |f(t)|\, dt$, donc $\varphi \star f$ est continue.

b) Comme $C([0,1]) \subset L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$, l'application $T : f \mapsto \varphi \star f$ est bien définie de $L^2([0,1])$ dans $L^2([0,1])$. Elle est clairement linéaire. De plus, pour tout $f \in L^1([0,1])$ et tout $t \in [0,1]$, on a $|\varphi \star f(t)| \le \int_0^1 \|\varphi\|_\infty |f(s)|\, ds$, donc $\|\varphi \star f\|_2 \le \|\varphi \star f\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \le \|\varphi\|_\infty \|f\|_2$, donc $T$ est continue.

c) Pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi \star e_n(t) &= \int_0^1 \varphi(t-s) e_n(s)\, ds \\
&= -\int_t^{t-1} \varphi(u) e_n(t-u)\, du \qquad \text{(changement de variable } u = t-s\text{)} \\
&= \int_{t-1}^t \varphi(s) e_n(t-s)\, ds = e_n(t) \int_{t-1}^t \varphi(s) e^{-2ni\pi s}\, ds \\
&= e_n(t) \int_0^1 \varphi(s) e^{-2ni\pi s}\, dt
\end{aligned}$$

car $s \mapsto \varphi(s) e^{-2ni\pi s}$ est périodique de période $1$.

d) Comme $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne, on a $\|T\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \|Te_n\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\lambda_n|^2$. Or, $\lambda_n = \langle \varphi, e_n \rangle$, (où on a noté $\varphi$ la classe de $\varphi$ dans $L^2([0,1])$). Comme $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne, l'identité de Parseval nous donne $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\lambda_n|^2 = \int_0^1 |\varphi(s)|^2\, ds$.

e) Les $\lambda_n$ sont des valeurs propres de $T$. Donc $\{\lambda_n,\ n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{p}} \mathbf{T}$. Soit $f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n e_n \in L^2([0,1])$. Alors, $Tf - \lambda f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (\lambda_n - \lambda) x_n e_n$. Si $Tf = \lambda f$, alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $(\lambda_n - \lambda) x_n = 0$ ; si de plus $f \ne 0$ il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $x_m \ne 0$ ; dans ce cas, $\lambda = \lambda_m$. Il en ressort que $\mathrm{Sp}_p T = \{\lambda_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$. Comme $(\lambda_n)$ est dans $\ell^2$, la suite $(\lambda_n)$ tend vers $0$, donc $0 \in \mathrm{Sp}\, T$. Comme $T$ est compact, $\mathrm{Sp}\, T = \{0\} \cup \mathrm{Sp}_p T = \{0\} \cup \{\lambda_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$.

II

1. Comme $j$ est injective, $E = j^{-1}(j(E))$ donc, comme $j$ est continue, $E$ est fermé dans $C([0,1])$. Comme la restriction de $j$ à $E$ est une bijection continue entre les espaces de Banach $E$ et $j(E)$, sa réciproque $\varphi : j(E) \to E$ est continue par le théorème de l'application ouverte. Posant alors $M = \|\varphi\|$, pour tout $f \in E$ on a $\|f\|_\infty = \|\varphi(j(f))\|_\infty \le M \|j(f)\|_2$.

2. Pour tout $t \in [0,1]$, l'application $\ell_t : f \mapsto f(t)$ est une forme linéaire continue. L'application $\ell_t \circ \varphi$ est donc une forme linéaire continue sur $j(E)$. Il existe donc un unique $g_t \in j(E)$, tel que, pour tout $g \in j(E)$ on ait $\ell_t \circ \varphi(g) = \langle g, g_t \rangle$. Pour tout $f \in E$, on a $f = \varphi(j(f))$ donc $f(t) = \ell_t(f) = \ell_t \circ \varphi(j(f)) = \langle j(f), g_t \rangle$.

Enfin, pour tout $g \in j(E)$, on a $|\ell_t \circ \varphi(g)| \le \|\varphi(g)\|_\infty \le M \|g\|_2$, donc $\|g_t\|_2 = \|\ell_t \circ \varphi\| \le M$.

3. Comme $(j(f_1),\dots,j(f_n))$ est un système orthonormal de $j(E)$, par l'inégalité de Bessel on a $\sum_{k=1}^{n} |\langle j(f_k), g_t\rangle|^2 \leq \|g_t\|_2^2$. Or, par définition de $g_t$, on a $\langle j(f_k), g_t\rangle = f_k(t)$, donc $\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2 \leq \|g_t\|_2^2$.

4. On déduit de 2 et 3 que, si $(j(f_1),\dots,j(f_n))$ est un système orthonormal, on a, pour tout $t$, $\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2 \leq M^2$. Or, pour tout $k$ on a $\int_0^1 |f_k(t)|^2\,dt = \|j(f_k)\|_2^2 = 1$, d'où l'on déduit que $n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^2\,dt \leq M^2$. Il s'ensuit que la dimension de $E$ est finie et $\leq M^2$.

## III

1. a) Comme $T$ est normal, $T^{-1}$ est normal et son spectre est égal à $\{\lambda^{-1},\ \lambda \in \operatorname{Sp} T\} \subset \{\lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1\}$. La norme d'un opérateur normal étant égale à son rayon spectral, on a $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$.
b) Pour tout $x \in E$, on a $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| = \|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\| = \|Tx\|$, donc $\|Tx\| = \|x\|$. Il s'ensuit que $T$ est isométrique ; comme il est bijectif, il est unitaire.

2. a) Notons $F \in \mathbf{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = (1+iX)(1-iX)^{-1}$. Le spectre de $U = F(T)$ est égal à $\{F(\lambda),\ \lambda \in \operatorname{Sp} T\} \subset \{\lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1\}$, puisque, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $|1+i\lambda| = |1-i\lambda|$. Comme $F(T)$ est normal, il est unitaire par la question 1.
b) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $1+i\lambda \neq -1+i\lambda$, donc $F(\lambda) \neq -1$, donc $-1 \notin \operatorname{Sp} U$. Notons $G \in \mathbf{C}(X)$ la fraction rationnelle $G = i(1-X)(1+X)^{-1}$. Comme $G \circ F = X$, on a $G(U) = G(F(T)) = (G \circ F)(T) = T$.
c) On a $T^* = \overline{G}(U^*) = -G(U^{-1})$, car $\overline{G} = -G$. Or $-G(X^{-1}) = G$ ; donc $T^* = -G(U^{-1}) = G(U) = T$.

3. a) Soient $S$ et $T$ des opérateurs de $E$ dans $E$ tels que $\operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$ soit dense dans $E$. Pour $x \in \operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$ et $y \in \operatorname{dom} S^* \cap \operatorname{dom} T^*$, on a $\langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle x, (S^*+T^*)y\rangle$, donc $S^*+T^* \subset (S+T)^*$. Appliquant cela, à $S = D$ et $T = -\lambda \mathrm{id}_E$, puis à $S = D - \lambda\mathrm{id}_E$ et $T = -\lambda\mathrm{id}_E$, on trouve successivement $D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E \subset (D-\lambda\mathrm{id}_E)^*$ et $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^* + \overline{\lambda}\mathrm{id}_E \subset D^*$. Comme $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^* + \overline{\lambda}\mathrm{id}_E - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E = (D-\lambda\mathrm{id}_E)^*$, on en déduit $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^* = D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E$.

Pour $x \in \operatorname{dom} D = \operatorname{dom}(D-\lambda\mathrm{id}_E)$, comme $\lambda x \in \operatorname{dom} D^* = \operatorname{dom} D$, on a $Dx - \lambda x \in \operatorname{dom} D^* \iff Dx \in \operatorname{dom} D^*$. Donc,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(D^* - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D-\lambda\mathrm{id}_E) &= \{x \in \operatorname{dom}(D-\lambda\mathrm{id}_E),\ Dx - \lambda x \in \operatorname{dom}(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)\} \\
&= \{x \in \operatorname{dom} D,\ Dx - \lambda x \in \operatorname{dom} D^*\} \\
&= \{x \in \operatorname{dom} D,\ Dx \in \operatorname{dom} D^*\} \\
&= \operatorname{dom} D^*D.
\end{aligned}$$

b) On a $(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D-\lambda\mathrm{id}_E) = D^*(D-\lambda\mathrm{id}_E) - \overline{\lambda}\mathrm{id}_E(D-\lambda\mathrm{id}_E) \supset D^*D - \overline{\lambda}D - \lambda D^* + |\lambda|^2\mathrm{id}_E$. Ces opérateurs ont même domaine ; ils sont donc éguax.

Remplaçant $D$ par $D^*$ et $\lambda$ par $\overline{\lambda}$, on trouve $(D-\lambda\mathrm{id}_E)(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E) = DD^* - \overline{\lambda}D - \lambda D^* + |\lambda|^2\mathrm{id}_E = (D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D-\lambda\mathrm{id}_E)$.
c) On suppose que $\lambda \notin \operatorname{Sp} D$. Soit $x \in E$. Posons $y = ((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^*x$. Pour tout

$z \in \operatorname{dom} D$, on a $\langle (D-\lambda \mathrm{id}_E)z, y\rangle = \langle (D-\lambda \mathrm{id}_E)z, ((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^* x\rangle = \langle (D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1}(D-\lambda\mathrm{id}_E)z, x\rangle = \langle z, x\rangle$. Donc $y \in \operatorname{dom}(D-\lambda\mathrm{id}_E)^*$ et $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^* y = x$. En d'autres termes, $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^*((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^* = \mathrm{id}_E$. Comme $\ker(D-\lambda\mathrm{id}_E)^* = \mathrm{im}(D-\lambda\mathrm{id}_E)^\perp = \{0\}$, on en déduit que $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^*$ est bijectif de $\mathrm{dom} D^*$ sur $E$ et que $((D-\lambda\mathrm{id}_E)^*)^{-1} = ((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^*$.

On a alors, $(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D-\lambda\mathrm{id}_E)(D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1}((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^* = (D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)\mathrm{id}_E((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^* = \mathrm{id}_E$ et $(D-\lambda\mathrm{id}_E)(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^*(D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1} = (D-\lambda\mathrm{id}_E)\mathrm{id}_E(D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E$. Comme $(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)(D-\lambda\mathrm{id}_E) = (D-\lambda\mathrm{id}_E)(D^*-\overline{\lambda}\mathrm{id}_E)$ est injectif, cela implique $(D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1}((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^* = ((D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1})^*(D-\lambda\mathrm{id}_E)^{-1}$.

d) Remarquons que $\mathrm{id}_E + U = ((\mathrm{id}_E - iD) + (\mathrm{id}_E + iD))(\mathrm{id}_E - iD)^{-1} = 2(\mathrm{id}_E - iD)^{-1}$, donc $U$ est normal (par c). De plus, pour $\lambda \in \mathbf{C} - \{-1\}$ on a $D - i(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}\mathrm{id}_E = -i(1+\lambda)^{-1}((\mathrm{id}_E+iD) - \lambda(\mathrm{id}_E - iD)) = -i(1+\lambda)^{-1}(U-\lambda\mathrm{id}_E)(\mathrm{id}_E - iD)$. Donc $U-\lambda\mathrm{id}_E$ est bijectif de $E$ dans $E$ si et seulement si $D - i(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1}\mathrm{id}_E$ est bijectif de $\operatorname{dom} D$ dans $E$. Il s'ensuit que $\operatorname{Sp} U \subset \{-1\} \cup \{\, \lambda \in \mathbf{C} - \{-1\},\ i(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1} \in \operatorname{Sp} D \,\} \subset \{-1\} \cup \{\, \lambda \in \mathbf{C} - \{-1\},\ i(1-\lambda)(1+\lambda)^{-1} \in \mathbf{R} \,\} = \{\, \lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1 \,\}$. Par 1, $U$ est unitaire.

e) Remarquons que $2(\mathrm{id}_E - iD)^{-1} = \mathrm{id}_E + U$. Donc, $2(\mathrm{id}_E + iD^*)^{-1} = 2((\mathrm{id}_E - iD)^{-1})^* = \mathrm{id}_E + U^* = \mathrm{id}_E + U^{-1} = ((\mathrm{id}_E + iD) + (\mathrm{id}_E - iD))(\mathrm{id}_E + iD)^{-1} = 2(\mathrm{id}_E + iD)^{-1}$. Les opérateurs $\mathrm{id}_E + iD^*$ et $\mathrm{id}_E + iD$ ont même inverse, donc ils sont égaux.