Université Denis Diderot (Paris VII) *30 novembre 1996.*

Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Examen Partiel.

Les deux parties sont indépendantes. Documents et calculettes interdits.

I - *6 points*

Soient E et F des espaces normés et T une application linéaire de E dans F. On note E' et F' les duaux topologiques respectifs de E et F.

1. On suppose que T est continue de E muni de la topologie normique dans F muni de la topologie normique. Montrer que T est continue de E muni de la topologie faible ($\sigma(E,E')$) dans F muni de la topologie faible ($\sigma(F,F')$). *Rappelons qu'une application f d'un espace topologique X dans F est continue pour la topologie faible de F si et seulement si, pour tout $\ell \in F'$, $\ell \circ f$ est continue.*

2. On suppose que T est continue de E muni de la topologie faible dans F muni de la topologie faible.
a) Montrer que pour tout $\ell \in F'$, $\ell \circ T \in E'$.
b) Montrer que le graphe de T est $\{ (x,y) \in E \times F,\ \forall \ell \in F',\ (\ell \circ T)(x) = \ell(y) \}$.
c) On suppose que E et F sont des espaces de Banach. Montrer que T est continue de E muni de la topologie normique dans F muni de la topologie normique.

II - *14 points*

Soient E et F des espaces hilbertiens et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On note B la boule unité fermée de E.

1. Soit $e \in B$ tel que $\|Te\| = \|T\|$.
a) Montrer que, si $T \neq 0$, $\|e\| = 1$.
b) Soit $y \in \{e\}^\perp$. Montrer que $\langle Te, Ty \rangle = 0$. *On pourra poser, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$ et $t \in \mathbf{R}$, $x_t = (1 + t^2\|y\|^2)^{-1/2}(e + t\lambda y)$, remarquer que $t \mapsto \|Tx_t\|^2$ admet un maximum en 0, puis calculer sa dérivée.*
c) En déduire que e est un vecteur propre pour T^*T.

On suppose désormais que l'image TB par T de B est une partie (normiquement) compacte de F.

2. Montrer qu'il existe $x \in B$ tel que $\|Tx\| = \|T\|$.

3. Soit E_1 un sous espace de E de dimension finie tel que $T^*TE_1 = E_1$.
a) Soit $x \in E$; montrer que $x \in E_1^\perp$ si et seulement si $Tx \in (TE_1)^\perp$.
b) Montrer que $T(B \cap E_1^\perp)$ est une partie compacte de F. En déduire qu'il existe $e \in E_1^\perp$ tel que $\|Te\| = \sup\{ \|Tx\|,\ x \in B \cap E_1^\perp\}$.

4. On suppose que l'image de T n'est pas de dimension finie.
a) Montrer qu'il existe un système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $\|Te_n\| = \sup\{\, \|Tx\|\,,\ x \in B\,,\ \forall k < n\,,\ \langle x, e_k\rangle = 0\,\}$.
b) Montrer que la suite $(Te_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale et que la suite $(\|Te_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
c) Soit $a = \inf\{\, \|Te_n\|\,,\ n \in \mathbf{N}\,\}$. Montrer que pour $n \neq m$ on a $\|Te_n - Te_m\|^2 \geq 2a^2$. En déduire que $a = 0$, *(on utilisera la compacité de TB).*
d) Montrer que pour tout $x \in E$ orthogonal à tous les e_k, on a $Tx = 0$.
e) Montrer qu'il existe dans E une base hilbertienne formée de vecteurs propres pour T^*T.

5. *facultatif* Montrer que T est adhérent à l'ensemble $\mathcal{R}(E,F)$ des applications linéaires continues de rang fini. Montrer que, réciproquement, pour toute application $S \in \mathcal{L}(E,F)$ adhérente à $\mathcal{R}(E,F)$, SB est compacte dans F.