Université Denis Diderot (Paris VII) *30 novembre 1996.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Corrigé du Partiel.

I

1. On suppose que T est continue de E muni de la topologie normique dans F muni de la topologie normique. Soit $\ell \in F'$; alors $\ell \circ T = {}^tT(\ell) \in E'$; la topologie $\sigma(E, E')$ est la plus faible topologie sur E pour laquelle les éléments de E' sont continus ; en particulier, $\ell \circ T$ est continue de E muni de la topologie $\sigma(E, E')$ dans $\mathbf{C}$. Cela étant vrai pour tout $\ell \in F'$, il en résulte que T est continue de E muni de la topologie faible dans F muni de la topologie faible.

2. On suppose que T est continue de E muni de la topologie faible dans F muni de la topologie faible.
a) Soit $\ell \in F'$; comme ℓ est continue pour la topologie $\sigma(F, F')$, $\ell \circ T$ est continue pour la topologie $\sigma(E, E')$ et, a fortiori, pour la topologie normique qui est plus fine.
b) Posons $G = \{ (x, y) \in E \times F\,,\ \forall \ell \in F'\,,\ (\ell \circ T)(x) = \ell(y) \}$. Pour tout $x \in E$ et tout $\ell \in F'$ on a $(\ell \circ T)(x) = \ell(T(x))$ donc $(x, Tx) \in G$; donc le graphe de T est inclus dans G.

Par ailleurs, si (x, y) n'est pas dans le graphe de T, alors $y \neq Tx$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\ell \in F'$ tel que $\ell(y - Tx) \neq 0$, c'est à dire $(\ell \circ T)(x) \neq \ell(y)$; donc $(x, y) \notin G$. Il s'ensuit que G est inclus dans le graphe de T.
c) Par b), le graphe de T est G. Or, par a), pour tout $\ell \in F'$, l'application $\varphi_\ell(x, y) \mapsto (\ell \circ T)(x) - \ell(y)$ est continue (pour la topologie normique) ; donc G, qui est l'intersection des noyaux des φ_ℓ, ($\ell \in F'$) est un sous-espace fermé de $E \times F$ (pour la topologie normique). Comme E et F sont des espaces de Banach, le théorème du graphe fermé s'applique, donc T est continue (de E muni de la topologie normique dans F muni de la topologie normique).

II

1. a) On a $\|e\| \leq 1$. De plus, $\|T\| = \|Te\| \leq \|T\|\|e\|$; comme $\|T\| > 0$, on obtient $\|e\| = 1$.
b) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, tel que $\langle Te, \lambda Ty \rangle \in \mathbf{R}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, posons $x_t = (1 + t^2\|y\|^2)^{-1/2}(e + t\lambda y)$. On a $\|x_t\|^2 = (1 + t^2\|y\|^2)^{-1}(\|e\|^2 + t^2\|y\|^2) \leq 1$, donc $x_t \in B$. Pour $t \in \mathbf{R}$, posons $\varphi(t) = \|Tx_t\|^2$. On a

$$\varphi(t) = \frac{\langle Te + t\lambda Ty, Te + t\lambda Ty \rangle}{1 + t^2\|y\|^2} = \frac{\|Te\|^2 + 2t\langle Te, \lambda Ty \rangle + t^2\|Ty\|^2}{1 + t^2\|y\|^2}\,.$$

Comme $x_t \in B$, $\varphi(t) \leq \|T\|^2 = \varphi(0)$, donc φ admet un maximum en 0. Comme φ est dérivable en 0, on trouve $2\langle Te, \lambda Ty \rangle = \varphi'(0) = 0$.
c) Pour tout $y \in \{e\}^\perp$, on a $\langle y, T^*Te \rangle = \langle Ty, Te \rangle = 0$, (par b), donc $T^*T \in (\{e\}^\perp)^\perp = \mathbf{C}e$.

2. L'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur le compact non vide TB ; elle y atteint donc son maximum. Il existe donc $x \in B$ tel que $\|Tx\| = \sup\{ \|y\|\,,\ y \in TB \} = \sup\{ \|Tz\|\,,\ z \in B \} = \|T\|$.

3. a) Pour $x, y \in E$, on a $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle$, donc Tx est orthogonal à Ty si et seulement si, x est orthogonal à T^*Ty. Il s'ensuit que, pour tout $x \in E$, on a $Tx \in (TE_1)^\perp \iff x \in (T^*TE_1)^\perp = E_1^\perp$.
b) On a $T(B \cap E_1^\perp) = \{ Tx\,,\ x \in B \text{ et } x \in E_1^\perp \} = \{ Tx\,,\ x \in B \text{ et } Tx \in (TE_1)^\perp \}$, par a). Donc $T(B \cap E_1^\perp) = TB \cap (TE_1)^\perp$. Comme $(TE_1)^\perp$ est fermé et TB est compact, leur intersection est compacte.

Appliquant la question 2 à la restriction T_1 de T à $E_1^\perp$, on trouve qu'il existe $e \in E_1^\perp$ tel que $\|Te\| = \|T_1 e\| = \|T_1\| = \sup\{\, \|Tx\|\,,\ x \in B \cap E_1^\perp\}$.

Remarquons que, si $y \in E_1$, $\langle Ty, Te\rangle = 0$ par a). Si $y \in E_1^\perp \cap \{e\}^\perp$, $\langle Ty, Te\rangle = \langle T_1 y, T_1 e\rangle = 0$ par la question 1.b) (appliquée à T_1). Il s'ensuit que, pour tout $y \in \{e\}^\perp = E_1 \oplus (\{e\}^\perp \cap E_1^\perp)$, on a $\langle y, T^*Te\rangle = \langle Ty, Te\rangle = \langle T_1 y, T_1 e\rangle = 0$, donc $T^*Te \in (\{e\}^\perp)^\perp = \mathbf{C}e$, donc e est un vecteur propre pour T^*T. Comme $\langle T^*Te, e\rangle = \langle Te, Te\rangle$, on trouve $T^*Te = \|Te\|^2 e$.

4. a) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. Pour $n = 0$, par la question 2, il existe $e_0 \in B$ tel que $\|Te_0\| = \|T\|$. De plus, par la question 1, $\|e_0\| = 1$ et e_0 est un vecteur propre pour T^*T.

Supposons construit, un système orthonormal $(e_k)_{0 \le k \le n}$, tel que, pour tout $k \le n$ on ait $\|Te_k\| = \sup\{\, \|Tx\|\,,\ x \in B \cap \{e_j\,,\ j < k\}^\perp\,\}$.

Notons E_1 le sous-espace de E engendré par $\{\, e_k\,,\ 0 \le k \le n\}$; comme l'image de T n'est pas de dimension finie, $TE \ne TE_1$, donc T n'est pas nul sur $E_1^\perp$. Comme pour tout $x \in B \cap E_1^\perp$ et tout k on a $\|Tx\| \le \|Te_k\|$, on en déduit que $Te_k \ne 0$. Par récurrence sur k on trouve que $T^*Te_k = \|Te_k\|^2 e_k$. En effet, supposons ceci montré pour tout $j < k$; le sous espace E_2 de E engendré par les e_j, $j < k$ est invariant par T^*T ; par la remarque à la fin de la question 3, on trouve $T^*Te_k = \|Te_k\|^2 e_k$.

Il en résulte que $T^*TE_1 = E_1$. Par la question 3, il existe $e_{n+1} \in E_1^\perp$ tel que $\|Te_{n+1}\| = \sup\{\|Tx\|,\ x \in B \cap E_1^\perp\}$. Par 1.a), appliqué à la restriction de T à $E_1^\perp$, $\|e_{n+1}\| = 1$, donc le système $(e_k)_{0 \le k \le n+1}$ est orthonormal. La construction de la suite $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc achevée par récurrence. Remarquons qu'on a de plus démontré que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T^*Te_n = \|Te_n\|^2 e_n$.

b) Soient $n, m \in \mathbf{N}$, $m > n$. Par 1.b) appliqué à la restriction de T à $\{e_k\,,\ k < n\}^\perp$ et à $y = e_m$, on trouve $\langle Te_n, Te_m\rangle = 0$, donc la suite $(Te_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale. Comme $e_m \in B \cap \{\, e_j\ \ j < n\,\}^\perp$, $\|Te_m\| \le \sup\{\, \|Tx\|\,,\ x \in B \cap \{e_j\,,\ j < n\}^\perp\,\} = \|Te_n\|$, donc la suite $(\|Te_n\|)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

c) Si $n \ne m$, comme Te_n et Te_m sont orthogonaux, on a $\|Te_n - Te_m\|^2 = \|Te_n\|^2 + \|Te_m\|^2 \ge 2a^2$. Si $a \ne 0$, toute suite extraite de la suite Te_n n'est pas de Cauchy, ce qui contredit l'existence d'une suite extraite convergente, donc la compacité de TB.

d) Soit $x \in E$ orthogonal à tous les e_k. Alors il existe $y \in B$, orthogonal à tous les e_k, tel que x soit proportionnel à y. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, y est orthogonal à $\{e_k\,,\ k < n\,\}$, donc $\|Ty\| \le \|Te_n\|$; cela étant vrai pour tout n, on trouve $\|Ty\| \le a = 0$, donc $Ty = 0$; enfin $Tx = 0$.

e) Soit B une base hilbertienne contenant le système orthonormal $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Si $b \in B$, alors, soit b est un des e_n qui sont des vecteurs propres pour T^*T, soit b est orthogonal aux e_n, donc $T^*Tb = T^*0 = 0$.

5. Notons P_n le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par $\{\, e_k\,,\ k < n\,\}$. Soit $x \in B$; comme $\|x\|^2 = \|P_n x\|^2 + \|x - P_n x\|^2$, $x - P_n x \in B \cap \{\, e_k\,,\ k < n\,\}^\perp$, donc $\|(Tx - TP_n)x\| \le \|Te_n\|$. Donc $\|T - TP_n\| = \|Te_n\|$. Comme la suite $\|Te_n\|$ tend vers 0, la suite TP_n converge vers T. Or, pour tout n, $TP_n \in \mathcal{R}(E,F)$.

Soit $S \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons que, comme E est réflexif, B est faiblement compacte. Comme S est continue pour les topologies faibles (I.1), SB est faiblement compact. En particulier, SB est faiblement fermé, donc normiquement fermé, donc complet.

Si S est de rang fini, les topologies faible et normique coïncident sur SE ; donc SB est normiquement compact.

Supposons que S est adhérent à $\mathcal{R}(E,F)$ et montrons que SB est précompact. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $R \in \mathcal{R}(E,F)$ tel que $\|R - S\| \leq \varepsilon/3$. Par compacité de RB, il existe une partie finie I de B telle que les boules de de rayon $\varepsilon/3$ et de centre Rx, ($x \in I$) recouvrent RB. Soit $y \in B$. Il existe $x \in I$ tel que $\|Rx - Ry\| < \varepsilon/3$. Alors $\|Sx - Sy\| \leq \|(S-R)x\| + \|Rx - Ry\| + \|(S-R)y\| < \varepsilon$. Donc les boules de rayon ε et de centre Sx, ($x \in I$) recouvrent SB.

Comme SB est précompact et complet, il est compact.