Examen.

Les trois parties sont indépendantes. *Documents et calculettes interdits.*

Barème approximatif I : 4, II : 8, III : 8.

I

Soient E, F des espaces de Banach réels et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\ell \in F'$ la forme linéaire $\ell \circ T : E \to \mathbf{R}$ est continue.

1. Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que $y \neq Tx$. Montrer qu'il existe $\ell \in F'$ tel que $\ell(y) \neq \ell \circ T(x)$.

2. Montrer que T est continue.

II

Soient H un espace hilbertien complexe, $U \in \mathcal{L}(H)$ une application linéaire continue inversible et $e \in H$. Pour $n \in \mathbf{Z}$ on pose $e_n = U^n(e)$. On suppose que que $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de H.

1. Montrer que U est unitaire.

2. Déterminer le spectre résiduel et le spectre ponctuel de U.

3. Soit λ un nombre complexe de module 1.
a) Montrer qu'il existe un opérateur unitaire $V_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ tel que $V_\lambda(e_n) = \lambda^n e_n$.
b) Montrer que $V_\lambda U = \lambda U V_\lambda$. En déduire que si $\mu \in \mathrm{Sp}U$ alors $\lambda\mu \in \mathrm{Sp}U$.
c) Déterminer le spectre de U.
d) Déterminer la mesure spectrale de U relativement à e (*i.e.* la mesure μ sur le spectre de U telle que pour toute fonction continue $f : \mathrm{Sp}U \to \mathbf{C}$ on ait $\mu(f) = \langle f(U)e, e \rangle$).

III

Soient E, F des espaces de Banach complexes, $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(F,E)$ des applications linéaires continues.

1. Soit $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$.
a) Montrer que S induit une bijection de $\ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)$ sur $\ker(ST - \lambda \mathrm{id}_F)$. Montrer que $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est injective si et seulement si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est injective.
b) Montrer que l'image de $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est dense si et seulement si l'image de $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est dense *(on pourra utiliser les adjoints)*.
c) Montrer que $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est surjective si et seulement si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjective *(si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjective, on montrera que, pour tout $y \in F$, STy est dans l'image de $ST - \lambda \mathrm{id}_F$).*

2. On suppose que TS est bijective. Montrer que, si T est injective, S et T sont bijectives. Montrer que si ST n'est pas bijective, elle n'est pas injective.

3. Montrer que le spectre résiduel et le spectre continu de ST sont contenus dans le spectre de TS. Montrer que $\{0\} \cup \mathrm{Sp} ST = \{0\} \cup \mathrm{Sp} TS$.

4. Soient H un espace hilbertien complexe et $S, T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que S est autoadjoint et T est positif.
a) Montrer que $\mathrm{Sp} ST \subset \mathbf{R}$ - *on pourra comparer ce spectre à celui de* $T^{1/2} S T^{1/2}$.
b) Montrer que $(\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST)$ et $(\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^*$ ont même spectre.
c) En déduire que $ST^2S + i(ST - TS)$ est positif si et seulement si $TS^2T + i(ST - TS)$ est positif.