Université Denis Diderot (Paris VII) *Vendredi 12 septembre 1997.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

CORRIGÉ DE L'EXAMEN.

I

1. Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que $y \neq Tx$. Comme $Tx - y \neq 0$, il existe par le théorème de Hahn-Banach, $\ell \in F'$ tel que $\ell(Tx - y) \neq 0$ *i.e.* $\ell(y) \neq \ell \circ T(x)$.

2. Il suffit de montrer que le graphe de T est fermé (théorème du graphe fermé). Posons $G = \{ (x,y) \in E \times F\,,\ \forall \ell \in F'\,,\ \ell(y) = \ell \circ T(x) \}$. Il est clair que, si (x,y) est dans le graphe de T, alors $(x,y) \in G$. Par la question précédente, si (x,y) n'est pas dans le graphe de T, alors $(x,y) \notin G$. Donc le graphe de T est G. Par ailleurs, G est l'intersection des noyaux des formes linéaires continues $(x,y) \mapsto \ell(y) - \ell \circ T(x)$; c'est donc un sous-espace fermé de $E \times F$.

II

Rappel : Si H et K sont des espaces hilbertiens $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_i)_{i\in I}$ sont des bases hilbertiennes respectives de H et K, il existe une unique application linéaire continue $T : H \to K$ telle que $T(e_i) = f_i$; de plus T est unitaire.

1. Comme $(e_{n+1})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de H, U est unitaire par le rappel précédent.

2. Comme U est unitaire, il est normal ; son spectre résiduel est donc vide. De plus son spectre est inclus dans le cercle unité $U(1) = \{\lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| = 1\}$. Soit $\lambda \in U(1)$ et $x \in H$ tel que $Ux = \lambda x$. Pour $n \in \mathbf{Z}$, on a $\langle x, e_n\rangle = \langle x, U^n e_0\rangle = \langle (U^n)^* x, e_0\rangle = \langle U^{-n}x, e_0\rangle = \lambda^{-n}\langle x, e_0\rangle$; donc $|\langle x, e_n\rangle|$ est indépendant de $n \in \mathbf{Z}$; comme $(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbf{Z}}$ est de carré sommable et $\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_n\rangle|^2$ on en déduit que $|\langle x, e_n\rangle| = 0$, puis que $x = 0$. Donc λ n'est pas valeur propre. Il s'ensuit que le spectre ponctuel de U est vide.

3. Soit λ un nombre complexe de module 1.
a) Comme $(\lambda^n e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de H, il existe (par le rappel) un unique opérateur unitaire $V_\lambda \in \mathcal{L}(H)$ tel que $V_\lambda(e_n) = \lambda^n e_n$.

b) Pour $n \in \mathbf{Z}$, on a $V_\lambda U e_n = V_\lambda U e_{n+1} = \lambda^{n+1} e_{n+1} = \lambda U V_\lambda$. Les opérateurs $V_\lambda U$ et $\lambda U V_\lambda$ coïncident sur une base hilbertienne, donc sont égaux. Si $\mu \in \operatorname{Sp} U$, alors $U - \mu\mathrm{id}_H$ n'est pas inversible, donc $U - \lambda\mu\mathrm{id}_H = \lambda V_\lambda^{-1}(U - \mu\mathrm{id}_H)V_\lambda$ n'est pas inversible, donc $\lambda\mu \in \operatorname{Sp} U$.

c) Comme U est unitaire, $\operatorname{Sp} U \subset U(1)$. Par ailleurs, $\operatorname{Sp} U \neq \emptyset$; soit $\mu \in \operatorname{Sp} U$; pour tout $\lambda \in U(1)$, ona $|\lambda\mu^{-1}| = 1$, donc par b), $\lambda = (\lambda\mu^{-1})\mu \in \operatorname{Sp} U$. On a montré que $\operatorname{Sp} U = U(1)$.

d) Notons μ la mesure spectrale de U relativement à e. Notons f_n la fonction $z \mapsto z^n$, (pour $n \in \mathbf{Z}$); on a $f_n(U) = U^n$, donc $\mu(f_n) = \langle f_n(U)e, e\rangle = \langle e_n, e_0\rangle$. Donc $\mu(f_0) = 1$ et $\mu(f_n) = 0$ si $n \neq 0$; on en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $\mu(f_n) = \int_0^1 f_n(e^{2i\pi t})\,dt$. On en déduit que pour toute combinaison linéaire f des f_n, $n \in \mathbf{Z}$ on a $\mu(f) = \int_0^1 f(e^{2i\pi t})\,dt$. Or, par le théorème de Stone-Weierstrass, ces combinaisons linéaires forment un sous-espace dense de l'ensemble des fonctions continues de $U(1)$ dans $\mathbf{C}$; donc μ est la mesure $f \mapsto \int_0^1 f(e^{2i\pi t})\,dt$

1. Soit $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$.

a) Pour $x \in \ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)$, on a $(ST - \lambda \mathrm{id}_F)Sx = S(TSx - \lambda \mathrm{id}_E)x = 0$, donc $S(\ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)) \subset \ker(ST - \lambda \mathrm{id}_F)$. De même, $T(\ker(ST - \lambda \mathrm{id}_F)) \subset \ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)$. Pour $x \in \ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)$, on a $TSx = \lambda x$; pour $y \in \ker(ST - \lambda \mathrm{id}_F)$ on a $STy = \lambda y$. On a montré que S induit une bijection de $\ker(TS - \lambda \mathrm{id}_E)$ sur $\ker(ST - \lambda \mathrm{id}_F)$, la bijection inverse étant induite par $\lambda^{-1}T$. En particulier, si l'un de ces noyaux est nul, il en va de même pour l'autre. Donc $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est injective si et seulement si $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est injective.

b) On sait que l'image de $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est dense si et seulement si ${}^t(ST - \lambda \mathrm{id}_F) = {}^tT{}^tS - \lambda \mathrm{id}_{F'}$ est injective ; par a), cela a lieu si et seulement si ${}^tS{}^tT - \lambda \mathrm{id}_{E'}$ est injective , donc si et seulement si l'image de $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est dense.

c) Supposons que $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjective. Soit $y \in F$; comme $TS - \lambda \mathrm{id}_E$ est surjective, il existe $z \in E$ tel que $(TS - \lambda \mathrm{id}_E)z = Ty$; alors $STy = S(TS - \lambda \mathrm{id}_E)z = (ST - \lambda \mathrm{id}_F)Sz$. Donc $y = \lambda^{-1}(STy - (ST - \lambda \mathrm{id}_F)y) = (ST - \lambda \mathrm{id}_F)(\lambda^{-1}(Sz - y))$. Donc $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est surjective. Echangeant les rôles de S et T on en déduit que si $ST - \lambda \mathrm{id}_F$ est surjective, il en va de même pour $TS - \lambda \mathrm{id}_E$.

2. On suppose que TS est bijective. Alors S est injective et T est surjective. Si de plus T est injective, elle est bijective donc $S = T^{-1}TS$ aussi. Si ST n'est pas bijective, alors S et T ne peuvent être toutes deux bijectives ; par ce qui précède, T n'est pas injective ; comme $\ker T \subset \ker ST$, ST n'est pas injective.

3. Pour $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$, on a vu en 1. que λ est dans le spectre ponctuel (resp. résiduel, continu) de ST, si et seulement si λ est dans le spectre ponctuel (resp. résiduel, continu) de TS. Donc $\{0\} \cup \mathrm{Sp}(ST) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}(TS)$.

Si λ est dans le spectre de ST sans être dans celui de TS, alors $\lambda = 0$ et, par 2., ST n'est pas injective, donc λ est dans le spectre ponctuel de ST. Donc si λ est dans le spectre résiduel ou continu de ST, il est nécessairement dans le spectre de TS.

4. a) Comme $T^{1/2}ST^{1/2}$ est autoadjoint, son spectre est inclus dans $\mathbf{R}$. Par 3., $\mathrm{Sp}(ST) \subset \mathrm{Sp}(T^{1/2}ST^{1/2}) \cup \{0\} \subset \mathbf{R}$.

b) Par a), $(\mathrm{id}_H + iST)$ est inversible ; il en va donc de même pour $(\mathrm{id}_H + iST)^*$, donc pour $(\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST)$ et pour $(\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^*$. Donc 0 n'est pas dans le spectre de ces deux opérateurs. Il en résulte par 3, que $(\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST)$ et $(\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^*$ ont le même spectre

c) Les opérateurs $ST^2S + i(ST - TS)$ et $TS^2T + i(ST - TS)$ sont autoadjoints. Ils sont donc positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $\mathbf{R}_+$. Or $ST^2S + i(ST - TS) = (\mathrm{id}_H + iST)(\mathrm{id}_H + iST)^* - \mathrm{id}_H$ et $TS^2T + i(ST - TS) = (\mathrm{id}_H + iST)^*(\mathrm{id}_H + iST) - \mathrm{id}_H$ ont même spectre par b). Donc $ST^2S + i(ST - TS)$ est positif si et seulement si $TS^2T + i(ST - TS)$ est positif.