Université Denis Diderot (Paris VII) *Lundi 26 janvier 1998.*

Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Examen.

Les trois parties sont indépendantes.

I (*$\simeq$ 2 points*).

Soient E un espace de Banach, F_1 et F_2 des sous-espaces fermés tels que $E = F_1 + F_2$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$ vérifiant $\|y_1\| + \|y_2\| \leq k\|x\|$ et $x = y_1 + y_2$.

II (*$\simeq$ 13 points*).

On note $L^2([0,1])$ l'espace hilbertien des classes de fonctions mesurables de carré intégrable de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ pour la mesure de Lebesgue. On note $\| \ \|_2$ sa norme. On note aussi $C([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions continues de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ muni de la norme de convergence uniforme.

1. Pour $s \in [0,1]$, notons χ_s la classe dans $L^2([0,1])$ de la fonction définie par $\chi_s(t) = 1$ si $s \leq t \leq 1$ et $\chi_s(t) = 0$ sinon.
a) Pour $s, t \in [0,1]$, calculer $\|\chi_s - \chi_t\|_2$.
b) Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T_0 : L^2([0,1]) \to C([0,1])$ telle que, pour $\xi \in L^2([0,1])$ et $s \in [0,1]$, on ait $(T_0(\xi))(s) = \int_{1-s}^1 \xi(t)\, dt$.

On note $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$ l'application qui à $\xi \in L^2([0,1])$ associe la classe dans $L^2([0,1])$ de $T_0(\xi)$.

2. a) Montrer que T est autoadjoint.
b) Montrer que T est injectif et que son image est dense.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, notons $e_n \in L^2([0,1])$ la (classe de la) fonction $t \mapsto e^{2ni\pi t}$. Rappelons que $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.

3. Calculer $\|T(e_n)\|_2$. Montrer que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

4. Soient $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $\xi \in L^2([0,1])$, $\xi \neq 0$ tel que $T(\xi) = \lambda\xi$.
a) Montrer que $\lambda \in \mathbf{R}$.
b) Montrer que ξ est la classe dans L^2 d'une fonction continue, notée f. Montrer que $f(0) = 0$.
c) Montrer que f est de classe C^1 et que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lambda f'(t) = f(1-t)$.
d) Montrer que f est de classe C^2 et que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lambda^2 f''(t) = -f(t)$. En déduire que f est proportionnelle à la fonction $t \mapsto \sin(t/\lambda)$.
e) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\cos(t/\lambda) = \sin((1-t)/\lambda)$. En déduire qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $1/\lambda = \pi/2 + 2n\pi$.

5. Quel est le spectre de T ?

III $\quad$ *($\simeq$ 5 points).*

Soient H un espace hilbertien $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) Il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $\|T - k\mathrm{id}_H\| \leq k$.
(ii) T est positif.
Pour montrer (ii)⇒(i), on pourra poser $k = \|T\|$.

2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
(i) Il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $\|T - k\mathrm{id}_H\| < k$.
(ii) T est positif et inversible.

3. Notons φ l'application de $\mathcal{L}(H)$ dans $\mathcal{L}(H)$ définie par $\varphi(S) = ST + TS$.
a) On suppose que T est positif et inversible. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que $\|\varphi - 2k\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)}\| < 2k$. En déduire que φ est bijective.
b) On suppose que T n'est pas inversible. Montrer que φ n'est pas bijective.