Université Denis Diderot (Paris VII) *22 novembre 1997.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Examen Partiel.

Les deux parties sont indépendantes.

I

Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire continue. On note $p : E \to E/\ker f$ l'application quotient. Notons F_1 l'adhérence de $\operatorname{im} f$ dans F. Notons $f_1 : E \to F_1$ l'application déduite de f (pour $x \in E$, on a $f_1(x) = f(x)$).

1. a) Montrer que $\ker {}^t f = \{\ell \in F',\ \forall y \in F_1,\ \ell(y) = 0\}$.
b) Montrer que ${}^t f_1$ est injective et $\operatorname{im} {}^t f_1 = \operatorname{im} {}^t f$.

2. On suppose que l'image de f est fermée dans F (*i.e.* $\operatorname{im} f = F_1$).
a) Montrer qu'il existe un homéomorphisme linéaire $g : E/\ker f \to F_1$ tel que $f_1 = g \circ p$.
b) Soit $\ell \in E'$ nulle sur $\ker f$. Montrer qu'il existe $h \in F_1'$ telle que, pour tout $x \in E$ on ait $\ell(x) = h(f(x))$.
c) Montrer que $\operatorname{im} {}^t f = \{\ell \in E',\ \ker \ell \supset \ker f\}$.

3. On suppose que $\operatorname{im} {}^t f = \{\ell \in E',\ \ker \ell \supset \ker f\}$.
a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $\ell \in \operatorname{im} {}^t f$, il existe $h \in F'$ tel que ${}^t f(h) = \ell$ et $\|h\| \leq k\|\ell\|$.
b) Montrer que pour tout $x \in E$ on a $\|p(x)\| \leq k\|f(x)\|$.
c) En déduire que $\operatorname{im} f$ est fermée.

II

Soit H un espace hilbertien complexe. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace de Banach formé des applications linéaires continues de H dans H.

1. Fixons un vecteur $e \in H$ de norme 1.
a) Soit $x \in H$, montrer qu'il existe un unique élément $T_x \in \mathcal{L}(H)$ tel que $T_x(e) = x$ et $T_x(y) = 0$ pour y orthogonal à e.
b) Montrer que T_e est le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}e$.
c) Montrer que, pour tout $x \in H$ et tout $S \in \mathcal{L}(H)$, on a $S \circ T_x = T_{S(x)}$. Montrer que, pour tout $x, y \in H$, on a $T_x^* \circ T_y = \langle y, x\rangle T_e$.

2. Soit $D : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ une application linéaire telle que, pour tout $S, T \in \mathcal{L}(H)$ on ait $D(S \circ T) = D(S) \circ T + S \circ D(T)$.

a) Soit $P \in \mathcal{L}(H)$ un projecteur ; montrer que $P \circ D(P) + D(P) \circ P = D(P)$. Montrer que $D(\mathrm{id}_H) = 0$.

Avec les notations ci-dessus, notons $V : H \to H$ l'application définie par $V(x) = D(T_x)(e)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in H$ et tout $S \in \mathcal{L}(H)$ on a $V(S(x)) = S(V(x)) + D(S)(x)$. En déduire que $D(S) = V \circ S - S \circ V$.

c) Notons $W : H \to H$ l'application définie par $W(x) = -D(T_x^*)^* e$. Soient $x, y \in H$. Montrer que $\langle W(y), x \rangle = \langle y, V(x) \rangle$.

d) Montrer que le graphe de V est $\{\, (x, y)\,,\ \forall z \in H\,,\ \langle W(z), x \rangle = \langle z, y \rangle \,\}$. En déduire que V est continue, puis que D est continue.