Université Denis Diderot (Paris VII) *22 novembre 1997.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Corrigé du Partiel.

I

1. a) Soit $\ell \in F'$. Si ℓ est nul sur F_1, alors, pour tout $x \in E$, $({}^t f(\ell))(x) = \ell(f(x)) = 0$, vu que $f(x) \in F_1$. Donc $\ell \in \ker {}^t f$. Inversement, supposons que $\ell \in \ker {}^t f$. Alors, pour tout $x \in E$, $\ell(f(x)) = ({}^t f(\ell))(x) = 0$; donc ℓ est nul sur $\operatorname{im} f$; comme $\ker \ell$ est fermé, on en déduit que ℓ est nul sur l'adhérence F_1 de $\operatorname{im} f$.
b) Appliquant a) à f_1, dont l'image est dense, on trouve $\ker {}^t f_1 = \{\ell \in F_1',\ \forall y \in F_1,\ \ell(y) = 0\} = \{0\}$; donc ${}^t f_1$ est injective. Soient $\ell \in F'$; notons $\ell_1 \in F_1'$ sa restriction à F_1. On a ${}^t f(\ell) = \ell \circ f = \ell_1 \circ f_1 = {}^t f_1(\ell_1)$; donc ${}^t f(\ell) \in \operatorname{im}{}^t f_1$. Par ailleurs, pour tout $\ell_1 \in F_1'$, il existe $\ell \in F'$ prolongeant ℓ_1 par le théorème de prolongement de Hahn-Banach, donc ${}^t f_1(\ell_1) = {}^t f(\ell) \in \operatorname{im}{}^t f$.

2. a) Par la proposition 1.18 du polycopié, il existe une application linéaire continue $g : E/\ker f \to F_1$ tel que $f_1 = g \circ p$. Soit $z \in \ker g$; comme p est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = p(x)$; alors, $f(x) = g(p(x)) = g(z) = 0$; donc $x \in \ker f$; comme p est l'application quotient de E sur $E/\ker f$, on trouve $z = p(x) = 0$. Donc g est injective. Comme l'image de g contient celle de f_1, g est surjective ; c'est un homéomorphisme par le théorème de l'application ouverte, puisque $E/\ker f$ et F_1 sont des espaces de Banach.
b) Soit $\ell \in E'$ nulle sur $\ker f$. Par la proposition 1.18 du polycopié, il existe $\ell_1 \in (E/\ker f)'$ telle que $\ell = \ell_1 \circ p$. Posons $h = \ell_1 \circ g^{-1}$; elle est continue car ℓ_1 et g^{-1} le sont ; on a $\ell = \ell_1 \circ p = h \circ g \circ p = h \circ f = {}^t f(h)$.
c) Par 1.a), $\operatorname{im}{}^t f = \operatorname{im}{}^t f_1$; donc par b), $\operatorname{im}{}^t f$ contient $\{\ell \in E',\ \ker \ell \supset \ker f\}$. Inversement, pour tout $h \in F'$ et tout $x \in \ker f$, on a $({}^t f(h))(x) = h(f(x)) = 0$; donc $\operatorname{im}{}^t f \subset \{\ell \in E',\ \ker \ell \supset \ker f\}$.

3. a) Pour $x \in \ker f$, l'application $I_x : \ell \mapsto \ell(x)$ est une forme linéaire continue sur E'. Par hypothèse, l'image de ${}^t f$ est l'intersection des noyaux de I_x $(x \in \ker f)$. C'est donc un sous-espace fermé de F', donc un espace de Banach. Par le théorème de l'application ouverte, l'application $F' \to \operatorname{im}{}^t f$ qui à $\ell \in E'$ associe ${}^t f(\ell)$ est ouverte ; donc, il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $\ell \in \operatorname{im}{}^t f$, il existe $h \in F'$ tel que ${}^t f(h) = \ell$ et $\|h\| \leq k\|\ell\|$ (polycopié, lemme 4.4).
b) Soit $x \in E$; par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\ell \in (E/\ker f)'$ telle que $\|\ell\| \leq 1$ et $|\ell(p(x))| = \|p(x)\|$. Par hypothèse, $\ell \circ p \in \operatorname{im}{}^t f$; par b), il existe $h \in F'$ tel que $\ell \circ p = h \circ f = {}^t f(h)$ et $\|h\| \leq k\|\ell \circ p\| \leq k$. Alors $\|p(x)\| = |\ell \circ p(x)| = |h(f(x))| \leq \|h\|\|f(x)\| \leq k\|f(x)\|$.
c) Par la proposition 1.18 du polycopié, il existe $g \in \mathcal{L}(E/\ker f, F)$ telle que $f = g \circ p$. Soit (x_n) une suite dans E telle que la suite $(f(x_n))$ soit de Cauchy. Par b), la suite $(p(x_n))$ est de Cauchy. Comme $E/\ker f$ est complet, la suite $(p(x_n))$ elle converge vers un $z \in E/\ker f$. Comme g est continue, $f(x_n) = g(p(x_n))$ converge vers $g(z)$. Comme p est surjective, il existe $x \in E$ tel que $p(x) = z$, donc $g(z) = g(p(x)) = f(x) \in \operatorname{im} f$. On a montré que $\operatorname{im} f$ est complet.

1. a) Notons $f_e \in H'$ l'application $y \mapsto \langle y, e\rangle$. Notons aussi $j_x : \mathbf{C} \to H$ l'application $\lambda \mapsto \lambda x$; il est clair que j_x est linéaire et continue. Posons $T_x = j_x \circ f_e \in \mathcal{L}(H)$. Remarquons que f_e est nulle sur $\{e\}^\perp$ et $f_e(e) = 1$; donc $T_x(e) = x$ et $T_x(y) = 0$ pour y orthogonal à e. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie ces conditions, $T - T_x$ est nul sur $\mathbf{C}e + \{e\}^\perp = H$.
b) Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on a $T_e(\lambda e) = \lambda e$ et pour tout $y \in (\mathbf{C}e)^\perp$, $T_e(y) = 0$; donc T_e est le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}e$.
c) Pour tout $x \in H$ et tout $S \in \mathcal{L}(H)$, l'application linéaire continue $S \circ T_x$ est nulle sur $\{e\}^\perp$ et $S \circ T_x(e) = S(x)$, donc $S \circ T_x$ coïncide avec $T_{S(x)}$ (par l'unicité de $T_{S(x)}$). Pour $z \in E$, on a $T_x(z) = \langle z, e\rangle x$, donc $\langle z, T_x^*(y)\rangle = \langle T_x(z), y\rangle = \langle \langle z, e\rangle x, y\rangle = \langle z, e\rangle\langle x, y\rangle = \langle z, \langle y, x\rangle e\rangle$. Comme cela a lieu pour tout z, on trouve $T_x^*(y) = \langle y, x\rangle e$. Donc $T_x^* \circ T_y = T_{T_x^*(y)} = \langle y, x\rangle T_e$.

2. a) Si P est un projecteur, $P \circ P = P$, donc $D(P) = D(P \circ P) = P \circ D(P) + D(P) \circ P$. Prenant $P = \mathrm{id}_H$, on trouve $D(\mathrm{id}_H) = \mathrm{id}_H \circ D(\mathrm{id}_H) + D(\mathrm{id}_H) \circ \mathrm{id}_H = 2D(\mathrm{id}_H)$; donc $D(\mathrm{id}_H) = 0$.
b) Pour tout $x \in H$ et tout $S \in \mathcal{L}(H)$ on a $D(T_{S(x)}) = D(S \circ T_x) = D(S) \circ T_x + S \circ D(T_x)$; donc $V(S(x)) = D(T_{S(x)})(e) = D(S)(T_x(e)) + S(D(T_x)(e)) = D(S)(x) + S(V(x))$. En d'autres termes, $D(S)(x) = (V \circ S - S \circ V)(x)$, c'est à dire $D(S) = V \circ S - S \circ V$.
c) Pour $x, y \in H$, on a $\langle W(y), x\rangle = \langle -D(T_y^*)^*(e), x\rangle = -\langle e, D(T_y^*)(x)\rangle = \langle e, T_y^*(V(x))\rangle - \langle e, V(T_y^*(x))\rangle$. Or $\langle e, T_y^*(V(x))\rangle = \langle T_y(e), V(x)\rangle = \langle y, V(x)\rangle$ et $T_y^*(x) = \langle x, y\rangle e$, donc $\langle e, V(T_y^*(x))\rangle = \langle y, x\rangle\langle e, V(e)\rangle$; or $\langle e, V(e)\rangle = \langle e, D(T_e)(e)\rangle = \langle e, (D(T_e)(T_e(e)) + T_e(D(T_e)(e))\rangle = \langle e, D(T_e)(e)\rangle + \langle T_e^*(e), D(T_e)(e)\rangle$; or $T_e^*(e) = e$, donc $\langle e, D(T_e)(e)\rangle = 2\langle e, D(T_e)(e)\rangle$, donc $\langle e, D(T_e)(e)\rangle = 0$; on en déduit que $\langle W(y), x\rangle = \langle y, V(x)\rangle$.
d) Soient $x, y \in H$ tels que, pour tout $z \in H$ on ait $\langle W(z), x\rangle = \langle z, y\rangle$; alors, pour tout $z \in H$, on a $\langle z, V(x) - y\rangle = \langle W(z), x\rangle - \langle z, y\rangle = 0$, donc $y = V(x)$; on a montré que $\{\, (x, y)\,,\ \forall z \in H\,,\ \langle W(z), x\rangle = \langle z, y\rangle \,\}$ est contenu dans le graphe de V ; par c), on a l'égalité. Or, pour tout $z \in H$, l'application $h_z : (x, y) \mapsto \langle x, W(z)\rangle - \langle y, z\rangle$ est une forme linéaire continue sur $H \times H$; donc le graphe de V qui est l'intersection des noyaux des h_z, ($z \in H$), est un sous-espace fermé de $H \times H$. Par le théorème du graphe fermé, V est continue. Alors, pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$, on a $\|D(S)\| = \|V \circ S - S \circ V\| \le \|V \circ S\| + \|S \circ V\| \le 2\|V\|\|S\|$; donc D est continue et $\|D\| \le 2\|V\|$.