Université Denis Diderot (Paris VII) *Vendredi 4 septembre 1998.*
Analyse fonctionnelle et théorie spectrale. MT 404

Examen.

Les deux parties sont indépendantes.

I (≃ *4 points*).

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Soit $\ell \in E^*$ une forme linéaire sur E. Montrer que l'application $p_\ell : x \mapsto |\ell(x)|$ est une semi-norme sur E.

2. Montrer que pour toute semi-norme p sur E, il existe une partie B de E^* telle que $p = \sup_{\ell \in B} p_\ell$.

II (≃ *16 points*).

Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ une partie ouverte et bornée. On note μ (la restriction à Ω de la) mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}$. Notons E l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes de carré intégrable de Ω dans $\mathbf{C}$.

1. a) Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, d\mu(\lambda)$ est un produit scalaire sur E.
b) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda)\right)^{1/2}$ est une norme sur E.

2. On munit E du produit scalaire et de la norme décrits en 1.
a) Soit $y \in \Omega$; montrer que $f \mapsto f(y)$ est une forme linéaire continue φ_y sur E *(on pourra utiliser - sans la démontrer - l'égalité $f(y) = \mu(D)^{-1} \int_D f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ où $D \subset \Omega$ est un disque centré en y).*
b) Montrer que $f \mapsto f'(y)$ est une forme linéaire continue ψ_y sur E *(on pourra utiliser - sans la démontrer - l'égalité $f'(y) = \mu(C)^{-1} \int_C f(\lambda)(y - \lambda)^{-1}\, d\mu(\lambda)$ où $C = \{\lambda \in \mathbf{C},\ r < |\lambda - y| \leq 2r\}$ est une couronne avec $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\{\lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda - y| \leq 2r\} \subset \Omega$).*
c) Montrer que l'application $y \mapsto \varphi_y$ est dérivable de Ω dans E'.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans E.
d) Soit $y \in \Omega$. Montrer que la suite $(f_n(y))_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
On note $f(y)$ la limite de $f_n(y)$.
e) Montrer que $f \in E$.
f) Montrer que E est un espace hilbertien.

3. Montrer que pour tout $y \in \Omega$ il existe $g_y \in E$ telle que, pour toute $f \in E$ on ait $f(y) = \int_\Omega f(\lambda)\overline{g_y(\lambda)}\, d\mu(\lambda)$.

4. Soit $h : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et bornée.
a) Montrer que la fonction $f \mapsto fh$ est une application linéaire continue T_h de E dans E.

b) On suppose que 0 n'est pas adhérent à $h(\Omega)$. Montrer que T_h est inversible et calculer son inverse.

5. On note $z : \Omega \to \mathbf{C}$ la fonction $\lambda \mapsto \lambda$.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}_p\, T_z$ est vide.
b) Soit $\lambda \in \Omega$. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{im}\,(T_z - \lambda \mathrm{id}_E)$ on a $f(\lambda) = 0$. Calculer l'image de $T_z - \lambda \mathrm{id}_E$. Déterminer une base du noyau de $(T_z - \lambda \mathrm{id}_E)^*$.
c) Déterminer le spectre de T_z.