Exercice I

Soient H *un espace de Hilbert complexe et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur unitaire ; on suppose que le spectre* $\mathrm{Sp}(u)$ *contient exactement trois points distincts* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathrm{H} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3$ *telle que pour chaque* $j = 1, 2, 3$*, on ait* $\mathrm{E}_j \neq \{0\}$ *et* $u(x) = \lambda_j x$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}_j$.

Désignons par $\mathrm{K} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ le spectre de T. Puisque u est unitaire sur un espace de Hilbert *complexe*, il existe un homomorphisme d'algèbres de Banach de C(K) dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, donné par le calcul fonctionnel continu. Bien sûr, nous sommes dans un cas très dégénéré, puisque C(K) est ici un espace vectoriel de dimension 3 ; ceci semble avoir dérouté un bon nombre d'étudiants.

Pour $j = 1, 2, 3$ la fonction f_j définie sur l'ensemble $\mathrm{K} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbb{C}$ par $f_j(\lambda_i) = \delta_{i,j}$ (avec $i = 1, 2, 3$) est une fonction continue sur K. De plus, chaque f_j est une fonction réelle et $f_j^2 = f_j$; on a $f_i f_j = 0$ si $i \neq j$ et $1_{\mathrm{K}} = f_1 + f_2 + f_3$. Si on pose $\mathrm{P}_j = f_j(u)$, il résulte des propriétés précédentes que P_j est hermitien, $\mathrm{P}_j^2 = \mathrm{P}_j$, $\mathrm{P}_i \mathrm{P}_j = 0$ si $i \neq j$ et $\mathrm{Id}_{\mathrm{H}} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3$. Les $(\mathrm{P}_j)_{j=1}^3$ sont donc des projecteurs, mais projecteurs orthogonaux parce qu'hermitiens, avec des images E_j deux à deux orthogonales telles que $\mathrm{H} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \mathrm{E}_3$. De plus $\|\mathrm{P}_j\| = \|f_j\|_{\mathrm{C(K)}} = 1$ implique $\mathrm{P}_j \neq 0$ donc $\mathrm{E}_j \neq \{0\}$.

Pour finir si z_{K} désigne la fonction $t \in \mathrm{K} \to t$ on voit que $f_j(z_{\mathrm{K}} - \lambda_j) = 0$ (fonctions sur K), donc $(u - \lambda_j \, \mathrm{Id}_{\mathrm{H}})\mathrm{P}_j = 0$, ce qui montre que $u(x) = \lambda_j x$ pour tout $x \in \mathrm{E}_j$.

Exercice II

On désigne par H *un espace de Hilbert complexe.*

1. Montrer que si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *sont hermitiens et si* $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, *alors* AB *est hermitien.*

Ça marche tout seul : $(\mathrm{AB})^* = \mathrm{B}^*\mathrm{A}^* = \mathrm{BA} = \mathrm{AB}$.

2. Dans cette question, $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *et* $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *sont hermitiens positifs.*

2a. Montrer que $\sqrt{\mathrm{A}}\ \mathrm{B}\ \sqrt{\mathrm{A}}$ *est hermitien positif.*

Notons $\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{A}}$. On sait que C est hermitien, donc $(\mathrm{CBC})^* = \mathrm{C}^*\mathrm{B}^*\mathrm{C}^* = \mathrm{CBC}$ est hermitien, et

$$\langle \mathrm{CBC}x, x \rangle = \langle \mathrm{BC}x, \mathrm{C}x \rangle = \langle \mathrm{B}y, y \rangle \geq 0$$

(avec $y = \mathrm{C}x$) puisque B est positif.

Remarque. On pouvait dire que, puisque l'espace H est complexe, le fait que $\langle \mathrm{T}x, x \rangle$ soit réel positif pour tout $x \in \mathrm{H}$ suffit à montrer qu'un opérateur borné $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est hermitien et positif. Dans ce cas, on économisait d'écrire que $(\mathrm{CBC})^* = \mathrm{C}^*\mathrm{B}^*\mathrm{C}^* = \mathrm{CBC}$ (mais après tout la phrase ci-dessus, qui justifie cette économie, est plus longue que la phrase économisée).

2b. Montrer que si de plus $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$, *alors* AB *est hermitien positif.*

On sait que $\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{A}}$ est une fonction de A, donc d'après le cours l'opérateur C commute avec tout opérateur borné qui commute avec A. Puisque $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ dans cette question, il en résulte que $\mathrm{CB} = \mathrm{BC}$, donc $\mathrm{AB} = \mathrm{C}^2\mathrm{B} = \mathrm{CBC}$ qui est positif d'après la question précédente.

3. On considère la fonction continue φ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi(t) = \max\{t, 0\}$, *et on désigne par* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hermitien.*

3a. Montrer que les opérateurs $\mathrm{T}_+ = \varphi(\mathrm{T})$ *et* $\mathrm{T}_- = \mathrm{T}_+ - \mathrm{T}$ *sont hermitiens positifs, et que* $\mathrm{T}_+\,\mathrm{T}_- = \mathrm{T}_-\,\mathrm{T}_+ = 0$.

Le spectre K de T est contenu dans $\mathbb{R}$ puisque T est hermitien. La fonction φ qui est réelle et positive sur $\mathbb{R}$ est en particulier réelle et positive sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. D'après le cours, $\varphi(\mathrm{T})$ est hermitien et positif.

De plus $\mathrm{T}_- = \varphi(\mathrm{T}) - \mathrm{T} = (\varphi - z_{\mathrm{K}})(\mathrm{T})$, et la fonction $\psi(t) = \varphi(t) - z_{\mathrm{K}}(t) = \varphi(t) - t = \max(-t, 0)$ est elle aussi réelle et positive sur K, donc T_- est hermitien positif. Par ailleurs, $\varphi\psi = 0$, donc $\mathrm{T}_+\,\mathrm{T}_- = \mathrm{T}_-\,\mathrm{T}_+ = 0$.

3b. Vérifier que H *est la somme directe orthogonale de* $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)}$ *et* $\mathrm{F} = \ker(\mathrm{T}_+)$.

Il s'agit d'un résultat général énoncé dans le poly : pour tout opérateur borné S sur H, le noyau de S^* est l'orthogonal de $\mathrm{im}(\mathrm{S})$, et donc $\overline{\mathrm{im}(\mathrm{S})}$ est l'orthogonal de $\ker(\mathrm{S}^*)$. Quand S est hermitien, $\mathrm{S}^* = \mathrm{S}$ et H est la somme directe orthogonale de $\ker(\mathrm{S})$ et $\overline{\mathrm{im}(\mathrm{S})}$.

3c. Montrer que les sous-espaces E *et* F *sont stables par* T.

Puisque T_+ est une fonction de T, cet opérateur T_+ commute avec T, donc son noyau $\mathrm{F} = \ker(\mathrm{T}_+)$ et son image $\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)$ sont stables par T. On a par conséquent $\mathrm{T}(\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)) \subset \mathrm{im}(\mathrm{T}_+) \subset \mathrm{E}$. Puisque E est fermé et $\mathrm{T}(\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)) \subset \mathrm{E}$, il en résulte par continuité de T que $\mathrm{T}(\overline{\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)}) \subset \mathrm{E}$, c'est à dire $\mathrm{T}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$.

3d. Montrer que $\mathrm{T}_+ = \mathrm{T}\,\mathrm{P}_{\mathrm{E}} = \mathrm{P}_{\mathrm{E}}\,\mathrm{T}$.

On va montrer que $\mathrm{P}_{\mathrm{E}}\,\mathrm{T}_- = \mathrm{T}_-\,\mathrm{P}_{\mathrm{E}} = \mathrm{P}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{T}_+ = \mathrm{T}_+\,\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = 0$. Puisque $\mathrm{T}_+\,\mathrm{T}_- = 0$, on a que $\mathrm{im}(\mathrm{T}_-) \subset \ker(\mathrm{T}_+) \subset \ker(\mathrm{P}_{\mathrm{E}})$ (parce que $\mathrm{E} \perp \mathrm{F}$), donc $\mathrm{P}_{\mathrm{E}}\,\mathrm{T}_- = 0$; puisque $\mathrm{T}_-\,\mathrm{T}_+ = 0$, on a que $\mathrm{im}(\mathrm{T}_+) \subset \ker(\mathrm{T}_-)$, donc $\mathrm{E} = \overline{\mathrm{im}(\mathrm{T}_+)} \subset \ker(\mathrm{T}_-)$ et $\mathrm{T}_-\,\mathrm{P}_{\mathrm{E}} = 0$. On a aussi $\mathrm{T}_+\,\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = 0$ (évident) et $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}\,\mathrm{T}_+ = 0$ (parce que $\mathrm{im}(\mathrm{T}_+) \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{E} \perp \mathrm{F}$) ; par ailleurs, $\mathrm{Id}_{\mathrm{H}} = \mathrm{P}_{\mathrm{E}} + \mathrm{P}_{\mathrm{F}}$ montre que $\mathrm{T}_+ = \mathrm{T}_+\,(\mathrm{P}_{\mathrm{E}} + \mathrm{P}_{\mathrm{F}}) = \mathrm{T}_+\,\mathrm{P}_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{E}}\,\mathrm{T}_+ = (\mathrm{P}_{\mathrm{E}} + \mathrm{P}_{\mathrm{F}})\mathrm{T}_+ = \mathrm{T}_+$.

On écrit $\mathrm{T} = \mathrm{T}_+ - \mathrm{T}_-$. Il en résulte que $\mathrm{T}\,\mathrm{P}_{\mathrm{E}} = (\mathrm{T}_+ - \mathrm{T}_-)\mathrm{P}_{\mathrm{E}} = \mathrm{T}_+\,\mathrm{P}_{\mathrm{E}} = \mathrm{T}_+$ et de même $\mathrm{P}_{\mathrm{E}}\,\mathrm{T} = \mathrm{T}_+$.

Exercice III

On désigne par H *l'espace de Hilbert complexe* $\mathrm{L}_2([0, \pi/2], \mu)$, *où* μ *est la mesure de Lebesgue sur* $[0, \pi/2]$. *Pour toute* $f \in \mathrm{H}$, *on définit une fonction* $\mathrm{T}f$ *sur* $[0, \pi/2]$ *par*

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t) f(t)\, dt + \cos(x) \int_x^{\pi/2} \sin(t) f(t)\, dt.$$

1.

1a. Vérifier que $\mathrm{T}f \in \mathrm{H}$. *Montrer que l'application* $f \in \mathrm{H} \to \mathrm{T}f \in \mathrm{H}$ *définit une application linéaire continue* T *de* H *dans* H.

En utilisant $|\sin| \le 1$ et $|\cos| \le 1$ on obtient facilement $|(\mathrm{T}f)(x)| \le \int_0^{\pi/2} |f(t)|\, dt \le \sqrt{\pi/2}\, \|f\|_2$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$, donc $\mathrm{T}f$ est bornée sur un intervalle borné, donc de carré intégrable. On vérifie facilement que T est linéaire. De plus

$$\int_0^{\pi/2} |\mathrm{T}f(x)|^2\, dx \le (\pi/2)^2 \|f\|_2^2$$

donc $\|\mathrm{T}\| \le \pi/2$.

1b. Montrer que T *est hermitien.*

On écrit $\mathrm{T}f$ sous la forme

$$(\mathrm{T}f)(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{K}(x,t)f(t)\,dt$$

qui est plus commode et on constate que le noyau K est réel et symétrique, donc T est hermitien. En effet, $\mathrm{K}(x,t) = \sin(x)\cos(t)$ si $0 \le t \le x \le \pi/2$ et $\mathrm{K}(x,t) = \cos(x)\sin(t)$ si $0 \le x \le t \le \pi/2$, donc $\mathrm{K}(x,t) = \mathrm{K}(t,x)$.

On peut voir aussi que l'opérateur T_1 défini par la première moitié de la formule de T, c'est à dire $(\mathrm{T}_1 f)(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,dt$, admet pour adjoint T_1^* l'opérateur défini par la deuxième partie de la formule de T, donc $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_1^*$ est hermitien.

2.

2a. Montrer que pour toute $f \in \mathrm{H}$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0,\pi/2]$.

Facile. On a rappelé en cours que $x \to \int_0^x h(t)\,dt$ est continue quand h est intégrable ; on l'applique à $h(t) = \cos(t)f(t)$ et $h(t) = \sin(t)f(t)$.

2b. Montrer que T *est un opérateur compact de* H *dans* H.

La rédaction de l'énoncé suggère d'utiliser Ascoli. On vérifie que $|\mathrm{K}(x,t) - \mathrm{K}(y,t)| \le |x-y|$ pour tous x, y, t dans $[0,\pi/2]$. En effet, pour t fixé dans $[0,\pi/2]$, la fonction $k_t : x \to \mathrm{K}(x,t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$, dérivable sur $]0,t[$ et sur $]t,\pi/2[$, avec $|k_t'| \le 1$. Il en résulte que $|\mathrm{K}(x,t) - \mathrm{K}(y,t)| = \left|\int_x^y k_t'(s)\,ds\right| \le |x-y|$.

On en déduit que $|(\mathrm{T}f)(x) - (\mathrm{T}f)(y)| \le \sqrt{\pi/2}\,|x-y|\,\|f\|_{\mathrm{H}}$; l'image T(B) de la boule unité B de H est formée de fonctions uniformément bornées sur $[0,\pi/2]$ par $\sqrt{\pi/2}$ (solution de la question *1a*) et uniformément lipschitziennes, donc T(B) est relativement compact dans $\mathrm{C}([0,\pi/2])$ par Ascoli, et *a fortiori* relativement compact dans H (puisque $\mathrm{C}([0,\pi/2])$ s'injecte continument dans H).

3. Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{T}f$ est de classe C^2 sur $[0,\pi/2]$, et la fonction $\mathrm{G} = \mathrm{T}f$ vérifie l'équation différentielle $\mathrm{G}'' + \mathrm{G} = f$, avec les conditions aux limites $\mathrm{G}'(0) = \mathrm{G}'(\pi/2) = 0$.

Quand f est continue, l'intégrale fonction de la borne supérieure est dérivable au sens usuel (théorème vu en DEUG), et

$$\mathrm{G}'(x) = (\mathrm{T}f)'(x) = \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,dt +$$

$$+\sin(x)\cos(x)f(x) - \sin(x)\int_x^{\pi/2} \sin(t)f(t)\,dt - \cos(x)\sin(x)f(x) =$$

$$\cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,dt - \sin(x)\int_x^{\pi/2} \sin(t)f(t)\,dt$$

qui est à nouveau, grâce à l'élimination de deux des termes, une expression dérivable,

$$\mathrm{G}''(x) = (\mathrm{T}f)''(x) = -\sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\,dt +$$

$$+\cos^2(x)f(x) - \cos(x)\int_x^{\pi/2} \sin(t)f(t)\,dt + \sin^2(x)f(x).$$

On voit que G'' est continue, donc $\mathrm{T}f$ est de classe C^2. On observe de plus que $\mathrm{G}''(x) = -\mathrm{G}(x) + f(x)$. Sur l'expression de $\mathrm{G}'(x)$ on constate que $\mathrm{G}'(0) = \mathrm{G}'(\pi/2) = 0$.

4.

4a. Montrer que si $f \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{T}f = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, alors f est de classe C^2 sur $[0, \pi/2]$ et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.

Si $\mathrm{T}f = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, alors $f = \lambda^{-1}\,\mathrm{T}(f)$ est une fonction continue, donc $\mathrm{G} = \mathrm{T}f$ est de classe C^2 et vérifie $\mathrm{G}'' + \mathrm{G} = f$. Mais $f = \lambda^{-1}\,\mathrm{G}$, donc

$$f'' = -(1 - \lambda^{-1})f$$

et $f'(0) = f'(\pi/2) = 0$.

4b. En déduire les valeurs propres $\lambda \neq 0$ de T, les vecteurs propres correspondants et déterminer le spectre de T.

Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de T, il doit exister une fonction $f \in \mathrm{H}$ non nulle telle que $\mathrm{T}f = \lambda f$, ce qui entraîne que f est C^2 et doit vérifier $f'' = -(1 - \lambda^{-1})f$ et $f'(0) = f'(\pi/2) = 0$. Par ailleurs, on sait que les valeurs propres de T sont réelles puisque T est hermitien.

Quelques étudiants ont inventé un théorème FAUX, qui dirait que si les valeurs $\mathrm{K}(x, t)$ du noyau sont ≥ 0 (ce qui est le cas ici), alors l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{T}_\mathrm{K}$ serait un opérateur positif. On verra plus loin que ça n'est pas vrai.

Distinguons trois cas. Si $1 - \lambda^{-1} < 0$, les solutions de l'équation différentielle $y'' = -(1 - \lambda^{-1})y$ sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{ch}(\omega x) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}(\omega x)$, avec $\omega^2 = \lambda^{-1} - 1$. Pour que $f'(0) = 0$, on doit avoir $\mathrm{B} = 0$, mais alors $f'(x) = \mathrm{A}\omega\,\mathrm{sh}(\omega x)$ ne peut s'annuler en $\pi/2$ que si $\mathrm{A} = 0$, donc $f = 0$ est la seule solution vérifiant les conditions aux limites. Dans ce cas, λ ne peut pas être valeur propre de T.

Si $1 - \lambda^{-1} = 0$, l'équation différentielle $y'' = 0$ admet les solutions $\mathrm{A}x + \mathrm{B}$; les conditions aux limites imposent $\mathrm{A} = 0$. Le seul candidat possible est $f = \mathrm{C}te$. Ce cas correspond à $\lambda = 1$.

Si $1 - \lambda^{-1} > 0$, les solutions de l'équation précédente sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}\cos\omega x + \mathrm{B}\sin\omega x$, avec $\omega > 0$ tel que $\omega^2 = 1 - \lambda^{-1}$. La condition $f'(0) = 0$ donne $\mathrm{B} = 0$, donc $f(x) = \mathrm{A}\cos(\omega x)$ et $f'(\pi/2) = 0$ donne $\sin(\omega\pi/2) = 0$, donc $\omega > 0$ doit être de la forme $\omega_k = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ et $\lambda_k = (1 - 4k^2)^{-1}$. La fonction f_k correspondante est $f_k(x) = \cos(2kx)$.

On peut remarquer qu'en prenant $k = 0$ dans ce qui précède, on retrouve le candidat solution $f_0 = \cos(0) = 1$. Ce qui précède montre que les seules valeurs propres $\neq 0$ possibles sont les nombres $\lambda_k = (1 - 4k^2)^{-1}$, pour $k = 0, 1, \ldots$ avec pour fonctions propres associées les $f_k(x) = \cos(2kx)$. Inversement, on peut vérifier qu'effectivement, on a $\mathrm{T}(f_k) = \lambda_k f_k$ pour tout $k \geq 0$. On a donc trouvé toutes les valeurs propres $\neq 0$ et les vecteurs propres correspondants.

Pour la vérification de $\mathrm{T}(f_k) = \lambda_k f_k$, on peut se lancer dans le calcul direct, avec un peu de trigonométrie. On peut simplifier un petit peu en disant ceci : la fonction $g_k = \lambda_k f_k$ et la fonction $\mathrm{G}_k = \mathrm{T}(f_k)$ sont deux solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f_k$, avec $y'(0) = 0$, donc la différence $\mathrm{D} = \mathrm{G}_k - g_k$ est solution de $y'' + y = 0$, avec $y'(0) = 0$. Mais

$$\mathrm{G}_k(0) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(2kt)\,dt = \lambda_k = g_k(0)$$

(utiliser les formules d'addition des sinus) donc $D(0) = 0$, $D'(0) = 0$ et $D'' + D = 0$ entraînent que $D = 0$.

D'après le cours, le spectre de T est formé de la suite $(\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ et de sa limite 0 (on ne sait pas encore si 0 est valeur propre, mais on sait en tout cas que $T = T - 0\,\mathrm{Id}_H$ n'est pas inversible ; c'est toujours le cas quand T est compact et H de dimension infinie). Remarquons qu'on a trouvé des valeurs propres négatives, bien que $K(x, t) \geq 0$.

5. Soient $f \in H$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$ telle que $f_n \to f$ dans H ; on pose $G = Tf$ et $G_n = Tf_n$ pour tout $n \geq 0$.

5a. Montrer que la suite (G'_n) converge uniformément sur $[0, \pi/2]$ vers la fonction K définie par $K(x) = \int_0^x (-G(t) + f(t))\,dt$. En déduire que G est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$.

Puisque f_n est continue, on sait que $G_n = Tf_n$ est de classe C^2, $G''_n = -G_n + f_n$ et $G'_n(0) = 0$. On a donc pour tout $x \in [0, \pi/2]$

$$G'_n(x) = \int_0^x (-G_n(t) + f_n(t))\,dt.$$

Puisque $f_n \to f$ et $G_n = Tf_n \to Tf = G$ dans H, il en résulte que $G'_n(x)$ converge vers $K(x)$. De plus, la convergence est uniforme sur $[0, \pi/2]$,

$$|G'_n(x) - K(x)| \leq \int_0^{\pi/2} \big(|G_n(t) - G(t)| + |f_n(t) - f(t)|\big)\,dt = u_n \to 0.$$

Enfin, $G_n(x)$ converge vers $G(x)$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$. Il en résulte que G est de classe C^1 et $G'(x) = K(x)$ (théorème de DEUG deuxième année !).

5b. Déduire de 5a que T est injectif.

Soit $f \in H$ quelconque ; puisque $C([0, \pi/2])$ est dense dans H, on peut trouver une suite (f_n) de fonctions continues telle que $f_n \to f$ dans H. D'après la question précédente, $G = Tf$ est C^1 et $G'(x) = \int_0^x (-G(t) + f(t))\,dt$. Si $Tf = 0$, on en déduit que $0 = G'(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$. La fonction f est donc orthogonale à toutes les fonctions $1_{[0,x]}$, pour x variant dans $[0, \pi/2]$, donc f est orthogonale à toutes les fonctions en escalier. Comme les fonctions en escalier forment un sous-espace vectoriel dense dans H, il en résulte que $f = 0$. On a montré que $Tf = 0$ implique $f = 0$, donc T est injectif.

5c. Donner une base orthonormée de H formée de vecteurs propres de T.

On sait maintenant que 0 n'est pas valeur propre, donc on avait à la question *4b* *toutes* les valeurs propres de T. D'après le cours, on sait que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est hermitien compact, alors H est la somme orthogonale des sous-espaces propres. Ici, ces sous-espaces propres sont tous de dimension 1. On obtient une base orthonormée de H en choisissant un multiple de norme un de tous les vecteurs propres trouvés à la question *4b*. Pour $k = 0$, posons $f_0 = \sqrt{2/\pi}$, et pour $k \geq 1$, $f_k(x) = (2/\sqrt{\pi})\cos(2kx)$. On a ainsi une base orthonormée $(f_k)_{k=0}^{+\infty}$ de H.