MT404 **Examen partiel du 13 Novembre 1999**

durée : 3 heures

Les documents sont autorisés.

Exercice I

Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique ; si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge pour toute suite $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \ell_2$, montrer que $a \in \ell_2$.

Exercice II

Soit E un espace de Banach non nul ; on désigne par $c_0(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de E telles que $\lim_n x_n = 0$; on munit $c_0(\mathrm{E})$ de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} \|x_n\|_{\mathrm{E}}.$$

Montrer que $c_0(\mathrm{E})$ est complet. On désigne par $\ell_1(\mathrm{E}^*)$ l'espace des suites $x^* = (x_n^*)_{n\geq 0}$ d'éléments de E^* telles que $\sum_n \|x_n^*\| < +\infty$, muni de la norme $\|x^*\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n^*\|$. Montrer que le dual de $c_0(\mathrm{E})$ s'identifie isométriquement à l'espace $\ell_1(\mathrm{E}^*)$. Montrer que $c_0(\mathrm{E})$ n'est pas réflexif.

Exercice III

a. Soient X un espace normé, F un espace de Banach et j une application linéaire continue et injective de X dans F ; on désigne par $\mathrm{B_X}$ la boule unité fermée de X ; montrer que si $j(\mathrm{B_X})$ est fermée dans F, alors X est complet (on utilisera les ensembles fermés $j(\varepsilon \mathrm{B_X})$, pour divers $\varepsilon > 0$).

b. Pour chaque sous-ensemble fini non vide $\mathrm{J} = \{j_0 < j_1 < \ldots < j_\mathrm{N}\}$ de $\mathbb{N}$ on pose

$$\forall x = (x_n)_{n\geq 0} \in c_0, \quad \varphi_\mathrm{J}(x) = \left(|x_{j_0}|^2 + |x_{j_1} - x_{j_0}|^2 + \cdots + |x_{j_\mathrm{N}} - x_{j_{\mathrm{N}-1}}|^2\right)^{1/2}.$$

On pose $\varphi(x) = \sup_{\mathrm{J}\subset\mathbb{N}} \varphi_\mathrm{J}(x)$ (valeur $+\infty$ admise) et on désigne par X le sous-ensemble de c_0 formé des x tels que $\varphi(x) < +\infty$. Vérifier que X est un sous-espace vectoriel de c_0, et que $\|x\|_\mathrm{X} = \varphi(x)$ est une norme sur X, plus grande que la norme de c_0. Montrer que X est un espace de Banach. Pour tout $n \geq 0$, on désigne par $x^{(n)}$ l'élément de c_0 dont les coordonnées $x_j^{(n)}$ sont égales à 1 si $j \leq n$ et à 0 si $j > n$; montrer que la suite $(x^{(n)})$ est bornée dans X, et qu'elle n'admet pas de sous-suite faiblement convergente dans X.

Exercice IV

Soit X un espace normé réel ; à chaque système fini $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de X on associe l'application linéaire $u_\mathbf{x}$ de X^* dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x^* \in \mathrm{X}^*, \ \ u_\mathbf{x}(x^*) = (x^*(x_1), \ldots, x^*(x_n)) \in \mathbb{R}^n.$$

a. Vérifier que $u_\mathbf{x}$ est continue de $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$ dans $\mathbb{R}^n$ (penser aux voisinages élémentaires de $x^* \in \mathrm{X}^*$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$) ; soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}^*$ un sous-ensemble $\sigma(\mathrm{X}^*, \mathrm{X})$-fermé ($*$-faiblement fermé dans X^*) ; si $x_0^* \notin \mathrm{A}$, montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$, un ouvert convexe ω de $\mathbb{R}^n$, un système fini $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de X tels que $u_\mathbf{x}(x_0^*) \in \omega$ et $\omega \cap u_\mathbf{x}(\mathrm{A}) = \emptyset$. Si de plus A est convexe et non vide, en déduire qu'il existe des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que le vecteur $x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \in \mathrm{X}$ vérifie $x_0^*(x) > \sup\{y^*(x) : y^* \in \mathrm{A}\}$ (séparer dans $\mathbb{R}^n$).

b. Soit C un sous-ensemble convexe de la boule unité fermée $\mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}$; montrer que si pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a $\|x\| = \sup_{y^*\in\mathrm{C}} y^*(x)$, alors l'ensemble C est w^*-dense dans la boule unité de X^*.

c. Montrer que la boule unité $\mathrm{B_X}$ de X est dense dans celle de X^{**} pour la topologie $\sigma(\mathrm{X}^{**}, \mathrm{X}^*)$. Soit x^{**} dans X^{**}, de norme ≤ 1 ; montrer que pour tout ensemble fini F dans X^*, de cardinal $|\mathrm{F}|$, l'ensemble $\mathrm{C_F}$ des $x \in \mathrm{X}$ tels que $\|x\| \leq 1$ et

$$\forall y^* \in \mathrm{F}, \ \ |x^{**}(y^*) - y^*(x)| \leq 2^{-|\mathrm{F}|}$$

est un convexe fermé non vide. En déduire que si dans X toute famille de convexes fermés bornés non vides ayant la propriété d'intersection finie a une intersection non vide, alors X est réflexif.