Exercice I

Soit $a = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ; on suppose que pour toute suite $b = (b_n)_{n\geq 0}$ de l'espace c_0, la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$ converge. En déduire que $a \in \ell_1$.

Cet exercice est similaire à un des exercices du partiel. Exposons d'abord la solution "à la main". Si a n'est pas sommable, on a $\sum |a_k| = +\infty$. On peut donc trouver des intervalles successifs d'entiers $\mathrm{I}_j \subset \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots$ tels que $\sum_{k\in \mathrm{I}_j} |a_k| \geq 2^j$ pour tout $j \geq 0$. Si $(b_n)_{n\geq 0}$ désigne la suite telle que $b_k = 2^{-j} \operatorname{sign}(a_k)$ lorsque $k \in \mathrm{I}_j$, alors $(b_n) \in c_0$ mais la série numérique $\sum a_k b_k$ ne converge pas puisque $\sum_{k\in \mathrm{I}_j} a_k b_k \geq 1$ pour tout $j \geq 0$.

L'autre méthode consiste à appliquer Banach-Steinhaus à la suite de formes linéaires (T_n) définies sur l'espace de Banach c_0 par

$$\mathrm{T}_n(b) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j.$$

Cette suite converge simplement sur c_0 vers une limite, donc $\mathrm{M} = \sup_n \|\mathrm{T}_n\|$ est fini d'après Banach-Steinhaus. En prenant $b_j = \operatorname{sign} a_j$ pour $j \leq n$ et $b_j = 0$ pour $j > n$, on définit un élément $b^{(n)}$ de c_0, de norme un, donc $\|\mathrm{T}_n\| \geq \mathrm{T}_n(b^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$ (en fait c'est exactement la valeur de la norme de T_n). On a donc $\sum_{j=0}^{n} |a_j| \leq \mathrm{M}$ pour tout n, ce qui donne le résultat voulu.

Exercice II

On désigne par H un espace de Hilbert complexe. On suppose que u est une isométrie de H dans H telle que $u(\mathrm{H}) \neq \mathrm{H}$. Soit e_0 un vecteur de norme 1 orthogonal à $u(\mathrm{H})$; on pose $e_n = u^n(e_0)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Vérifier que e_0 est orthogonal aux vecteurs $(e_n)_{n\geq 1}$. Montrer que la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormée dans H.

Puisque tous les vecteurs $e_1, e_2, \ldots$ sont dans l'image $u(\mathrm{H})$, on sait que e_0 est orthogonal à tous ces vecteurs. Puisque u est une isométrie, elle conserve le produit scalaire, donc

$$\langle e_n, e_{n+p}\rangle = \langle u^n(e_0), u^n(e_p)\rangle = \langle e_0, e_p\rangle = 0$$

si $n \geq 0$ et $p > 0$. Tous les vecteurs sont de norme un puisque u est isométrique : pour tout entier $n \geq 1$

$$\|e_n\| = \|u(e_{n-1})\| = \|e_{n-1}\| = \cdots = \|e_0\| = 1.$$

Finalement, on a bien une suite orthonormée.

2. Montrer que $u^*(e_0) = 0_{\mathrm{H}}$, $u^*(e_1) = e_0$; calculer $u^*(e_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Pour tout vecteur $y \in \mathrm{H}$,

$$\langle u^*(e_0), y\rangle = \langle e_0, u(y)\rangle = 0 = \langle 0_{\mathrm{H}}, y\rangle$$

donc $u^*(e_0) = 0_{\mathrm{H}}$. Ensuite,

$$\langle u^*(e_1), y\rangle = \langle e_1, u(y)\rangle = \langle u(e_0), u(y)\rangle = \langle e_0, y\rangle$$

donc $u^*(e_1) = e_0$. De façon analogue, pour tout $n > 0$

$$\langle u^*(e_n), y\rangle = \langle e_n, u(y)\rangle = \langle u(e_{n-1}), u(y)\rangle = \langle e_{n-1}, y\rangle$$

pour tout $y \in \mathrm{H}$, ce qui signifie que $u^*(e_n) = e_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Une autre façon de dire la même chose est de rappeler que les isométries sont caractérisées par l'équation $u^* \circ u = \mathrm{Id}$. On a donc $u^*(e_n) = u^* u(e_{n-1}) = e_{n-1}$ pour tout $n > 0$.

3. Montrer que pour tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| < 1$, il existe un vecteur $x \in \mathrm{H}$ non nul tel que $u^*(x) = \lambda x$. En déduire que le spectre de u est égal au disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

Il suffit de poser

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e_k,$$

qui est la somme d'une série absolument convergente de vecteurs de H. On vérifie facilement que $u^*(x) = \lambda x$ et on a $x \neq 0_{\mathrm{H}}$ (par exemple parce que $\langle x, e_0\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k \langle e_k, e_0\rangle = \lambda^0 = 1$), donc le spectre de u^*, qui est égal à celui de u, contient le disque unité ouvert. Puisque le spectre est compact, il contient le disque unité fermé. D'autre part, on sait que le rayon spectral de u est $\leq \|u\|$ et $\|u\| = 1$ puisque u est une isométrie. Finalement, le spectre de u est égal au disque unité fermé.

4. Montrer que le spectre d'une isométrie $v \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est, ou bien égal au disque unité fermé, ou bien contenu dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Si $v(\mathrm{H}) \neq \mathrm{H}$, on applique ce qui précède. Sinon, $v(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$, v est une isométrie bijective, c'est à dire un opérateur unitaire dont le spectre est contenu dans le cercle unité (d'après le cours).

Exercice III

On désigne par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2([0, \pi/2], \mu)$, où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, \pi/2]$. Pour toute $f \in \mathrm{H}$, on définit une fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad (\mathrm{T}f)(t) = \cos(t) \int_0^t \sin(s) f(s)\, ds.$$

1.

1a. Montrer que pour toute $f \in \mathrm{H}$, la fonction $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0, \pi/2]$. Calculer les valeurs de $\mathrm{T}f$ aux points $t = 0$ et $t = \pi/2$.

Posons $g(t) = \int_0^t \sin(s) f(s)\, ds$. D'après le cours d'intégration, on sait que g est continue parce que $s \to \sin(s) f(s)$ est intégrable, ce qui provient de

$$\int_0^{\pi/2} |\sin(s)|\, |f(s)|\, ds \leq (\pi/2)^{1/2} \|f\|_{\mathrm{H}}$$

en utilisant $|\sin(s)| \leq 1$ et Cauchy-Schwarz. Ensuite, $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0, \pi/2]$ comme produit de g par la fonction continue cos. On vérifie facilement que $(\mathrm{T}f)(0) = (\mathrm{T}f)(\pi/2) = 0$.

1b. Montrer que l'application $f \in \mathrm{H} \to \mathrm{T}f \in \mathrm{H}$ définit une application linéaire continue T de H dans H.

Puisque $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0, \pi/2]$, on a $\mathrm{T}f \in \mathrm{H}$ et de plus on a vu que pour $t \in [0, \pi/2]$

$$|g(t)| \leq \int_0^t |\sin(s)|\, |f(s)|\, ds \leq (\pi/2)^{1/2} \|f\|_{\mathrm{H}}.$$

On a $|(\mathrm{T}f)(t)| \leq |g(t)| \leq (\pi/2)^{1/2} \|f\|_{\mathrm{H}}$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui entraîne que $\|\mathrm{T}f\|_{\mathrm{H}} \leq (\pi/2) \|f\|_{\mathrm{H}}$. Enfin il est clair que T est linéaire d'après les propriétés de l'intégrale, ce qui donne que T est linéaire et bornée de H dans H.

On aurait pu être un peu plus délicat avec les majorations, en commençant par

$$|g(t)| \leq \int_0^t |\sin(s)|\, |f(s)|\, ds \leq \Bigl(\int_0^{\pi/2} \sin^2(s)\, ds\Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_0^{\pi/2} |f(s)|^2\, ds\Bigr)^{1/2} = (\pi/4)^{1/2} \|f\|_{\mathrm{H}}$$

mais ceci n'a pas grande importance. On peut dire aussi (sans passer par la continuité de la fonction $\mathrm{T}f$) que T est un opérateur défini par le noyau $\mathrm{K}(s, t) = \sin(s) \cos(t) \mathbf{1}_{0<s<t}$ et utiliser la majoration vue en cours de $\|\mathrm{T}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})}$ par la norme L_2 du noyau (sur $[0, \pi/2]^2$).

2.

2a. Déterminer l'adjoint $\mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *de l'opérateur borné* T.

Soient $f, g \in \mathrm{H}$. On a avec Fubini

$$\langle \mathrm{T}^* g, f\rangle = \langle g, \mathrm{T}f\rangle = \int_0^{\pi/2} g(t)\,\overline{(\mathrm{T}f)(t)}\,dt = \int g(t)\cos(t)\mathbf{1}_{0<s<t<\pi/2}\sin(s)\overline{f(s)}\,ds dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \Bigl(\sin(s)\int_s^{\pi/2} \cos(t) g(t)\,dt\Bigr)\overline{f(s)}\,ds = \langle \mathrm{G}, f\rangle$$

pour toute $f \in \mathrm{H}$, ce qui montre que $\mathrm{T}^* g = \mathrm{G}$, c'est à dire

$$\forall s \in [0, \pi/2], \quad (\mathrm{T}^* g)(s) = \sin(s)\int_s^{\pi/2} \cos(t) g(t)\,dt.$$

2b. Montrer que T *et* T^* *sont des opérateurs compacts de* H *dans* H.

Il suffit de le faire pour T. On peut dire que T est Hilbert-Schmidt, ou bien appliquer le théorème d'Ascoli en exploitant l'équicontinuité des fonctions $\mathrm{T}f$. Voici une autre méthode : pour montrer la compacité d'un opérateur défini sur un Hilbert, il suffit de montrer que pour toute suite (f_n) de la boule unité qui converge faiblement vers 0_{H}, les images convergent vers 0_{H} en norme.

Si (f_n) tend faiblement vers 0, alors $(\mathrm{T}f_n)(t) = \cos(t)\langle f_n, \mathbf{1}_{0<s<t}\sin\rangle$ tend vers 0, pour tout t. De plus $|(\mathrm{T}f_n)(t)|^2 \le (\pi/2)\|f_n\|^2 \le \pi/2$ comme on l'a vu ; le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique alors que $\int_0^{\pi/2} |(\mathrm{T}f_n)(t)|^2\,dt \to 0$.

3. Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{T}f$ *et* $\mathrm{T}^* f$ *sont de classe* C^1 *sur* $[0, \pi/2]$*. Calculer les dérivées des fonctions* $\mathrm{T}f$ *et* $\mathrm{T}^* f$ *dans ce cas.*

On a vu en DEUG que la fonction F définie par $\mathrm{F}(t) = \int_0^t \sin(s) f(s)\,ds$ est dérivable, de dérivée $t \to \sin(t) f(t)$ lorsque f est continue. Le même argument s'applique à T^*, avec le petit piège que l'intégrale dépend de la borne inférieure d'intégration. On trouve les dérivées en dérivant les produits et en faisant attention aux signes,

$$(\mathrm{T}f)'(t) = -\sin(t)\int_0^t \sin(s) f(s)\,ds + \cos(t)\sin(t) f(t).$$

$$(\mathrm{T}^* f)'(t) = \cos(t)\int_t^{\pi/2} \cos(s) f(s)\,ds - \sin(t)\cos(t) f(t).$$

4. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{T} + \mathrm{T}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$.

4a. Vérifier que l'opérateur A *est hermitien et compact.*

On a vu en cours que la somme de deux compacts est compacte, donc A est compact. De plus,

$$\mathrm{A}^* = (\mathrm{T} + \mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}^* + \mathrm{T}^{**} = \mathrm{T}^* + \mathrm{T} = \mathrm{A}$$

donc A est hermitien.

4b. Montrer que si $f \in \mathrm{H}$ *et* $\mathrm{A}f = \lambda f$ *avec* $\lambda \ne 0$*, alors* f *est de classe* C^2 *sur* $[0, \pi/2]$ *et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme* $f'' + a(\lambda) f = 0$*, avec* $a(\lambda) \in \mathbb{R}$*. Déterminer* $f(0)$ *et* $f(\pi/2)$.

On sait que $\mathrm{T}f$ est continue si $f \in \mathrm{H}$, et la même démonstration vaut pour $\mathrm{T}^* f$, ce qui implique que $\mathrm{A}f$ est une fonction continue pour toute $f \in \mathrm{H}$. Si $\mathrm{A}f = \lambda f$ avec $\lambda \ne 0$, alors $f = \lambda^{-1}\mathrm{A}f$ est continue, donc $\mathrm{T}f$ et $\mathrm{T}^* f$ sont de classe C^1, et d'après les calculs précédents,

$$(\mathrm{A}f)' = -\sin(t)\int_0^t \sin(s) f(s)\,ds + \cos(t)\int_t^{\pi/2} \cos(s) f(s)\,ds.$$

Le même argument que précédemment montre que $(\mathrm{A}f)'$ est de classe C^1, donc $\mathrm{A}f$ de classe C^2, et le même calcul de dérivée que précédemment nous mène à

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}f)'' &= -\cos(t)\int_0^t \sin(s)f(s)\,ds - \sin^2(t)f(t) - \sin(t)\int_t^{\pi/2}\cos(s)f(s)\,ds - \cos^2(t)f(t)\\ &= -(\mathrm{A}f)(t) - f(t).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{A}f = \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$, f est de classe C^2 et on a donc $\lambda f'' = -\lambda f - f$, c'est à dire $f'' = -\mu f$ avec $\mu = 1 + \lambda^{-1}$.

Si $f \neq 0$, c'est un vecteur propre de l'opérateur hermitien A pour la valeur propre λ, donc λ est réel et μ aussi (si f est nulle, elle vérifie toutes les équations qu'on veut !). On vérifie que $(\mathrm{T}^*f)(0) = (\mathrm{T}^*f)(\pi/2) = 0$, donc $(\mathrm{A}f)(0) = (\mathrm{A}f)(\pi/2) = 0$, ce qui donne $f(0) = f(\pi/2) = 0$ puisque $\lambda \neq 0$.

4c. En déduire les valeurs propres $\lambda \neq 0$ de A*. Calculer la norme de* A*.*

Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de A, on sait que λ est réel, et il existe d'après la question précédente une fonction f non nulle de classe C^2 qui vérifie $f'' = -(1+\lambda^{-1})f$ avec les conditions $f(0) = f(\pi/2) = 0$. Posons $\mu = 1 + \lambda^{-1}$. Si $\mu > 0$, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$ où $\omega = \sqrt{\mu}$. La condition $f(0) = 0$ implique $\mathrm{A} = 0$, donc $f(t) = \mathrm{B}\sin(\sqrt{\mu}\,t)$. La condition $f(\pi/2) = 0$ entraîne que $\sqrt{\mu}\,(\pi/2) = k\pi$ avec k entier > 0, puisque $\mu > 0$. On obtient ainsi $\mu = 4k^2$ et les valeurs $\lambda_k = 1/(4k^2 - 1)$, $k = 1, 2, \ldots$

Réciproquement pour tout entier $k \geq 1$ on peut vérifier que la fonction f_k correspondante, définie par $f_k(t) = \sin(2kt)$, est bien vecteur propre de A (c'est un exercice pénible de trigonométrie). Si $\mu = 0$ l'équation différentielle est $f'' = 0$ qui donne des solutions de la forme $f(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$, qui ne peuvent pas être nulles en 0 et $\pi/2$ sans être identiquement nulles. Si $\mu < 0$ les solutions sont de la forme $\mathrm{A}\,\mathrm{ch}\,t + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}\,t$ et à nouveau ces fonctions ne peuvent pas être nulles en 0 et $\pi/2$ sans être identiquement nulles. On n'obtient donc aucune nouvelle possibilité de valeur propre.

On sait que la norme d'un hermitien compact non nul est donnée par le maximum des valeurs absolues des valeurs propres. Ici les valeurs propres sont ≥ 0, et la plus grande correspond à $k = 1$, avec

$$\|\mathrm{A}\| = \lambda_1 = \frac{1}{3}\cdot$$

On pourrait se demander (la question n'est pas posée) si 0 est valeur propre de A. On a vu en fait que $\mathrm{A}f$ est de classe C^2 pour toute $f \in \mathrm{H}$, et $(\mathrm{A}f)'' = -(\mathrm{A}f) - f$. Si on a $\mathrm{A}f = 0$ alors $f = 0$ d'après l'équation différentielle précédente, ce qui montre que 0 n'est pas valeur propre de l'opérateur A.