MT404, 2000-2001. Théorème de décomposition de Hahn

Mesures réelles

Définition. Une *mesure réelle* sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (pas de valeur infinie ici !) qui est σ-additive, c'est à dire que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$ pour toute suite (A_n) d'éléments deux à deux disjoints de la tribu $\mathcal{A}$.

Par des manipulations simples on voit que la définition implique la propriété suivante : *si* (B_n) *est une suite décroissante d'éléments de la tribu* $\mathcal{A}$*, alors* $\mu(\mathrm{B}_n)$ *converge vers* $\mu(\bigcap_n \mathrm{B}_n)$ *; si* (B_n) *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\mu(\mathrm{B}_n)$ *converge vers* $\mu(\bigcup_n \mathrm{B}_n)$.

Dans le cas décroissant, on considère les ensembles deux à deux disjoints $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_{n-1} \setminus \mathrm{B}_n$ pour tout $n \geq 1$. D'après la σ-additivité, la série $\mathrm{S} = \sum_n \mu(\mathrm{A}_n)$ converge. On constate que l'ensemble B_n est la réunion disjointe de $\mathrm{B} = \bigcap_m \mathrm{B}_m$ et des ensembles deux à deux disjoints $\mathrm{A}_{n+1}, \mathrm{A}_{n+2}, \ldots$ de sorte que

$$\mu(\mathrm{B}_n) = \mu(\mathrm{B}) + \sum_{m>n} \mu(\mathrm{A}_m) = \mu(\mathrm{B}) + r_n$$

ce qui montre que $\mu(\mathrm{B}_n) \to \mu(\mathrm{B})$ puisque le reste r_n de la série convergente S tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Dans le cas des (B_n) croissants, il suffit de passer au complémentaire et d'utiliser la relation $\mu(\mathrm{B}_n^c) = \mu(\Omega) - \mu(\mathrm{B}_n)$. Par ailleurs, on vérifie facilement que l'additivité finie et le passage à la limite monotone pour une fonction réelle μ sur $\mathcal{A}$ impliquent la σ-additivité de μ.

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures ≥ 0 finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, il est clair que la formule $\mu(\mathrm{A}) = \mu_1(\mathrm{A}) - \mu_2(\mathrm{A})$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, définit une mesure réelle μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Le *théorème de décomposition de Hahn* donne la réciproque : toute mesure réelle est la différence de deux mesures positives finies.

Théorème : décomposition de Hahn. *Soit* μ *une mesure réelle sur un espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *; il existe un ensemble* $\mathrm{B}^+ \in \mathcal{A}$ *tel qu'en posant* $\mathrm{B}^- = \Omega \setminus \mathrm{B}^+$ *on ait :*

pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+) \geq 0$ *et* $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^-) \leq 0$.

On déduit immédiatement de l'énoncé une décomposition de μ comme différence $\mu^+ - \mu^-$ de deux mesures positives finies μ^+ et μ^-, qui sont définies par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu^+(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+), \quad \mu^-(\mathrm{A}) = -\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^-).$$

Il en résulte facilement que μ^+ et μ^- peuvent être définies par des formules qui ne mentionnent pas l'ensemble B^+,

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu^+(\mathrm{A}) = \sup\{\mu(\mathrm{A}') : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A},\, \mathrm{A}' \in \mathcal{A}\}$$

et de même $\mu^-(\mathrm{A}) = \sup\{-\mu(\mathrm{A}') : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A},\, \mathrm{A}' \in \mathcal{A}\}$.

Démonstration. Posons pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$m(\mathrm{A}) = \sup\{|\mu(\mathrm{A}')| : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A},\, \mathrm{A}' \in \mathcal{A}\}.$$

Dans une première étape, on va montrer que $m(\Omega) < +\infty$, ce qui signifie que la fonction $\mathrm{A} \to \mu(\mathrm{A})$ est bornée sur $\mathcal{A}$.

Supposons qu'au contraire on ait $m(\Omega) = +\infty$. On va aboutir à une contradiction en construisant une suite décroissante (B_n) d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, telle que $|\mu(\mathrm{B}_n)| \geq 2^n$ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui contredit le fait que la suite $(\mu(\mathrm{B}_n))$ doit être bornée, car elle doit converger vers le nombre réel $\mu(\bigcap_n \mathrm{B}_n)$ d'après les propriétés des mesures réelles.

On remarque que $m(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}') \leq m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{A}')$, de sorte que si $m(\mathrm{A} \cup \mathrm{A}')$ était infini, $m(\mathrm{A})$ ou bien $m(\mathrm{A}')$ devrait aussi être infini. Si on suppose que $m(\Omega) = +\infty$, on peut certainement trouver un ensemble $\mathrm{A}_0 \in \mathcal{A}$ tel que $|\mu(\mathrm{A}_0)| \geq 1 + |\mu(\Omega)|$. Posons $\mathrm{A}'_0 = \Omega \setminus \mathrm{A}_0$. Par l'additivité de la mesure et l'inégalité triangulaire, on aura aussi $|\mu(\mathrm{A}'_0)| \geq 1$. Puisque $m(\mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}'_0) = m(\Omega) = +\infty$, l'un au moins des deux ensembles $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0$ ou $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}'_0$ vérifie que $m(\mathrm{B}_0) = +\infty$ et pour les deux choix possibles, on aura $|\mu(\mathrm{B}_0)| \geq 1$. On choisit donc $\mathrm{B}_0 \in \mathcal{A}$, égal à A_0 ou à A'_0, de façon que $m(\mathrm{B}_0) = +\infty$ et $|\mu(\mathrm{B}_0)| \geq 1 = 2^0$.

Puisque $m(\mathrm{B}_0) = +\infty$, on peut trouver $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{B}_0$, $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}$ de façon que $|\mu(\mathrm{A}_1)| \geq 2 + |\mu(\mathrm{B}_0)|$. Si on pose $\mathrm{A}'_1 = \mathrm{B}_0 \setminus \mathrm{A}_1$, on obtient $|\mu(\mathrm{A}'_1)| \geq 2$, et l'un des deux ensembles $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1$ ou $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}'_1$ vérifie $m(\mathrm{B}_1) = +\infty$. On peut ainsi choisir $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}_0$, $\mathrm{B}_1 \in \mathcal{A}$, $|\mu(\mathrm{B}_1)| \geq 2$ et $m(\mathrm{B}_1) = +\infty$. Le lecteur continuera la récurrence tout seul… L'existence de cette suite (B_n) est impossible, comme on l'a dit plus haut.

A ce moment de l'histoire, on sait que $m(\Omega) < +\infty$. Si on pose

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu^+(\mathrm{A}) = \sup\{\mu(\mathrm{A}') : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A},\, \mathrm{A}' \in \mathcal{A}\}$$

on ne sait pas encore que $\mathrm{A} \to \mu^+(\mathrm{A})$ est une mesure, mais on sait au moins que $\mu^+(\Omega) < +\infty$. On va montrer que $\mu^+(\Omega)$, qui est défini comme un sup, est en fait un max, c'est à dire qu'il existe un ensemble $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{B}) = \mu^+(\Omega)$. Il sera alors facile de vérifier que $\mathrm{B}^+ = \mathrm{B}$ est l'ensemble cherché.

On peut trouver une suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mu(\mathrm{A}_n) \geq \mu^+(\Omega) - 2^{-n}$ pour tout entier $n \geq 0$. Il en résulte que pour tout ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}_n$, on a $\mu(\mathrm{A}) \geq -2^{-n}$ (en effet

$$\mu^+(\Omega) \geq \mu(\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}_n) - \mu(\mathrm{A}) \geq \mu^+(\Omega) - 2^{-n} - \mu(\mathrm{A})$$

d'où le résultat annoncé). Posons $\mathrm{B}_n = \bigcup_{m \geq n} \mathrm{A}_m$. L'ensemble B_n est la réunion disjointe de A_n et des ensembles $\mathrm{C}_{n,m} = \mathrm{A}_m \setminus \big(\bigcup_{k=n}^{m-1} \mathrm{A}_k\big)$ pour $m = n+1, n+2, \ldots$; chaque ensemble $\mathrm{C}_{n,m}$ est un sous-ensemble de A_m, donc $\mu(\mathrm{C}_m) \geq -2^{-m}$ d'après ce qui précède et

$$\mu(\mathrm{B}_n) = \mu(\mathrm{A}_n) + \sum_{m>n} \mu(\mathrm{C}_{n,m}) \geq \mu(\mathrm{A}_n) - \sum_{m>n} 2^{-m} \geq \mu^+(\Omega) - 2\,2^{-n}.$$

La suite (B_n) est décroissante. Si on pose $\mathrm{B} = \bigcap_n \mathrm{B}_n$, on obtiendra

$$\mu(\mathrm{B}) = \lim_n \mu(\mathrm{B}_n) = \mu^+(\Omega).$$

Maintenant que B maximise les valeurs de μ sur $\mathcal{A}$, il est clair que si A est disjoint de B, alors $\mu(\mathrm{A}) \leq 0$ (car $\mu(\mathrm{B} \cup \mathrm{A}) = \mu(\mathrm{B}) + \mu(\mathrm{A}) \leq \mu(\mathrm{B})$) et si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, on a $\mu(\mathrm{A}) \geq 0$ (parce que $\mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \leq \mu(\mathrm{B})$).

Pour terminer, on vérifie que $\mu^+(\mathrm{A})$, défini comme $\sup\{\mu(\mathrm{A}') : \mathrm{A}' \subset \mathrm{A}\}$, est égal à $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+)$. En effet, pour tout ensemble $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ on écrit

$$\mu(\mathrm{A}') = \mu(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}^+) + \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^-) \leq \mu(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}^+) \leq \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+)$$

ce qui montre que le sup est atteint pour $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$ et qu'il vaut $\mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^+)$.

Avec cette décomposition de Hahn, on définit la valeur absolue de μ, qui est la mesure positive $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. On peut définir $|\mu|$ directement par

$$|\mu|(\mathrm{A}) = \sup\{\mu(\mathrm{A}_1) - \mu(\mathrm{A}_2)\}$$

où le sup porte sur toutes les partitions de $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ en deux ensembles $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}$. On posera

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \sup\{\mu(\mathrm{A}_1) - \mu(\mathrm{A}_2) : \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \emptyset,\ \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}\}.$$

Cette expression définit une norme sur l'espace vectoriel des mesures réelles sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Intégrale par rapport à une mesure réelle

Si μ est une mesure réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on peut l'écrire $\mu = \mu_1 - \mu_2$ avec μ_1, μ_2 positives finies, et on peut considérer pour toute fonction mesurable bornée f la quantité

$$\mathrm{I} = \int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2;$$

on montre facilement que I ne dépend que de f et de μ : si $\mu = \mu_1' - \mu_2'$ est une autre représentation, on aura $\mu_1 + \mu_2' = \mu_1' + \mu_2$ d'où on tire $\int f\, d\mu_1 + \int f\, d\mu_2' = \int f\, d\mu_1' + \int f\, d\mu_2$ qui donne l'indépendance souhaitée. On est donc en droit de poser

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_2.$$

On a aussi

$$\Big|\int f\, d\mu\Big| \le \Big|\int f\, d\mu^+\Big| + \Big|\int f\, d\mu^-\Big| \le \int |f|\, d\mu^+ + \int |f|\, d\mu^- = \int |f|\, d|\mu|.$$

Le théorème de Radon-Nikodym

Soient μ et ν deux mesures σ-finies positives sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$; on dit que ν est *absolument continue* par rapport à μ si pour tout ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}) = 0$, on a aussi $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

Théorème : théorème de Radon-Nikodym. *Soient μ et ν deux mesures σ-finies positives sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$; la mesure ν est absolument continue par rapport à μ si et seulement si elle admet une densité par rapport à μ, c'est à dire qu'il existe une fonction mesurable f telle que*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\, d\mu.$$

Démonstration. Si $\mu(\mathrm{A}) = 0$ et $\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\, d\mu$, alors $\nu(\mathrm{A}) = 0$ d'après la théorie de l'intégration, ce qui montre que cette direction du théorème est évidente. Dans l'autre sens, on commence par se ramener au cas où les mesures sont finies en utilisant l'hypothèse σ-finie. Considérons pour tout $n \ge 0$ la mesure réelle $\mu_n = 2^n \mu - \nu$ et appliquons lui le théorème de décomposition de Hahn. Il existe un ensemble B_n sur lequel $\mu_n \ge 0$, ce qui signifie que $\nu \le 2^n \mu$ quand on se restreint à cet ensemble. On peut supposer que la suite (B_n) est croissante (remplacer B_n par $\bigcup_{j \le n} \mathrm{B}_j$). Le petit théorème de Radon-Nikodym permet de régler ce cas : il existe une fonction mesurable f_n, telle que $0 \le f_n \le 2^n$ et que $\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f_n\, d\mu$ pour tout sous-ensemble mesurable A de B_n. D'un autre côté, $\mu_n(\Omega \setminus \mathrm{B}_n) \le 0$ signifie que $2^n \mu(\mathrm{B}_n^c) \le \nu(\mathrm{B}_n) \le \nu(\Omega)$ (supposé fini), ce qui montre que $\mu(\mathrm{B}_n^c) \leq 2^{-n}\,\nu(\Omega)$, donc le complémentaire A_∞ de $\bigcup_n \mathrm{B}_n$ vérifie $\mu(\mathrm{A}_\infty) = 0$. Puisque ν est absolument continue, on a aussi $\nu(\mathrm{A}_\infty) = 0$. On définit la fonction f en recollant les morceaux : f est égale à f_n sur $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n \setminus \mathrm{B}_{n-1}$, et à 0 (si on veut) sur A_∞ (on a posé $\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0$). Alors

$$\nu(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{A}_\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{A} \cap \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathrm{A}\cap\mathrm{A}_n} f\,d\mu = \int_{\mathrm{A}} f\,d\mu.$$

Dual de $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *lorsque* $p < +\infty$

Supposons donnée une mesure finie μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Si $p < +\infty$ et si on a une forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on pourra définir une mesure ν en posant pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) = \ell(\mathbf{1}_{\mathrm{A}}).$$

On obtient ainsi une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, qui est absolument continue par rapport à μ. Le théorème de Radon Nikodym fournit une fonction f et on montre pour finir que $f \in \mathrm{L}_q$ et

$$\forall g \in \mathrm{L}_p, \quad \ell(g) = \int gf\,d\mu.$$

Dans le cas où μ est σ-finie le résultat est vrai aussi : il faut découper l'espace Ω en morceaux de mesure finie et appliquer ce qui précède sur chaque morceau.