Université Paris 7 — Théorie Spectrale
UFR de mathématiques — MT404
Second cycle — Année 2000-2001

Devoir 1

Semaine du 16 au 20 Octobre
A rendre la semaine suivante

Le corps considéré ici est le corps des réels. Les espaces l_∞, c_0, l_1 sont les espaces définis dans le cours. Dans ce dernier on a démontré que c_0^* est isométrique à l_1 et que ces trois espaces sont des espaces de Banach. Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$ on note e_k la suite numérique $(\delta_n^k, n \in \mathbb{N})$.

Exercice 1

1. Montrer que l'application $\varphi \mapsto (\varphi(e_n),\ n \in \mathbb{N})$ définit une isométrie bijective $l_1^* \to l_\infty$. Expliciter son application inverse $f :\ l_\infty \to l_1^*$.
2. Montrer que la restriction g de f à l_1 définit une isométrie de l'espace l_1 dans l'espace l_∞^*.
3. Montrer qu'il existe $\varphi \in l_\infty^*$ non nulle dont la restriction à c_0 est nulle, et en déduire que l'isométrie précédente n'est pas surjective.

Exercice 2

Plus sur le dual de l_∞

On identifie l_1 avec son image dans l_∞^* par l'application g définie dans l'exercice précédent. Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$ on notera $\chi_A \in l_\infty$ la suite définie par

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \in A \\ 0 & \text{si} \quad n \notin A\,. \end{cases}$$

Si $\Phi \in l_\infty^*$ on définit $\mu_\Phi :\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ en posant $\mu_\Phi(A) = \Phi(\chi_A)$ pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'on a (i): si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$,
$$\mu_\Phi(A) + \mu_\Phi(B) = \mu_\Phi(A \cup B), \qquad \text{et que } \ (ii) :\ \sup_A |\mu_\Phi(A)| < \infty.$$
2. Soit $\mathcal{X}$ le sous-espace de l_∞ engendré par $\{\chi_A :\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$. Montrer
   (a) Que $\mathcal{X}$ est dense dans l_∞.
   (b) Que si $\mu :\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ vérifie les conditions (i) et (ii) de la question 1, elle se prolonge de manière unique en une forme linéaire $\overline{\mu} :\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.
   (c) Finalement que μ se prolonge de manière unique en une forme linéaire $\Phi :\ l_\infty \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\mu = \mu_\Phi$.

On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est un filtre si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- $(A \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{F}) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- $(A \in \mathcal{F} \text{ et } A \subseteq B) \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

On note $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini.

3. Montrer que $\mathcal{F}_0$ est un filtre.

4. Montrer que $\mathcal{F}_0$ est inclus dans un filtre maximal, pour l'inclusion, $\mathcal{F}$ et que ce dernier vérifie les propriétés suivantes :

   - $\forall x \in \mathbb{N},\ \{x\} \notin \mathcal{F}$
   - $\forall A \subseteq \mathbb{N},\ A \notin \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.

   On peut utiliser l'axiome du choix (Zorn) ou admettre le résultat de cette question.

5. Soit $\mathcal{F}$ un filtre maximal contenant $\mathcal{F}_0$, on pose

$$\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1 \text{ si } A \in \mathcal{F}, \quad \mu_{\mathcal{F}}(A) = 0 \text{ sinon.}$$

   Montrer que $\mu_{\mathcal{F}}$ vérifie les conditions de la question (1).

6. Montrer que la forme linéaire $\Phi \in l_\infty^*$ associée n'est pas dans l_1. Montrer que pour toute suite $\mathbf{x} = (x_n) \in l_\infty$ qui est convergente, on a $\Phi(\mathbf{x}) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.