Devoir n° 2

Les exercices ne sont pas indépendants.

Exercice 1

1. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact contenant 0 et $A = \{f \in C(K),\ f(0) = 0\}$. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, nuls en 0, est dense dans A pour la norme uniforme.

   En déduire que $B = \{tf(t),\ f \in C(K)\}$ est dense dans A.

2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur borné. Montrer que si T est compact alors $|T| = (T^*T)^{1/2}$ l'est aussi.

3. Soit T un opérateur compact dans $\mathcal{H}$. Montrer qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ et une suite décroissante de nombres positifs ou nuls $(\mu_n(T))_{n\geq 0}$ tels que $|T|\,.\,e_n = \mu_n(T)\,e_n$.

Exercice 2

On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Vérifier que $||\,|T|\,.\,x|| = ||Tx||$. Montrer que $\mu_0(T) = ||T||$.

2. Soit P la projection (orthogonale) sur l'orthogonal de e_0. Montrer que $\sup_{||x||=1} < |T|Px, Px >= \mu_1(T)$.

3. Soit $y \in \mathcal{H}$, y non nul, montrer qu'il existe $x \in \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1$, de norme 1 et orthogonal à y. Vérifier que $\mu_1(T) \leq < |T|x, x >$.

   En déduire que

$$\mu_1(T) = \min_{y\in\mathcal{H}} \sup_{\substack{x\perp y \\ ||x||=1}} < |T|x, x >$$

4. Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ n formes linéaires. Montrer que $\cap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, \varphi_i$ est de dimension non nulle.

5. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des projections orthogonales de $\mathcal{H}$ de codimension n (telle que $1-P$ soit de rang n). Montrer en s'inspirant de la question 3 que

$$\mu_n(T) = \min_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_{||x||=1} < |T|Px, Px >$$

6. En déduire que
$$\mu_n(T) = \min_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_{||x||=1} ||TPx||$$

7. On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des opérateurs de rang n. Montrer que $\mu_n(T)$ réalise la distance de T à $\mathcal{K}_n$.

8. Vérifier que $\mu_{n+m}(T_1 + T_2) \leq \mu_n(T_1) + \mu_m(T_2)$ et $\mu_{n+m}(T_1T_2) \leq \mu_n(T_1)\mu_m(T_2)$.

   Montrer que $|\mu_n(T_1 - T_2)| \leq ||T_1 - T_2||$.

Exercice 3

1. Pour $p > 1$, on définit $L^p(\mathcal{H})$, l'ensemble des opérateurs compacts T tel que la série $\sum_n \mu_n(T)^p$ soit convergente. Vérifier que $L^p(\mathcal{H})$ est un idéal.

   On pose aussi $||T||_p = (\sum_n \mu_n(T)^p)^{1/p}$. On va admettre que c'est une norme sur $L^p(\mathcal{H})$.

2. Soit T_n une suite d'opérateurs compacts de Cauchy pour la norme précédemment définie. Montrer qu'il existe un opérateur compact T tel que T_n converge vers T pour cette norme.

3. Soit l'ensemble $\mathcal{F}$ des opérateurs de rang fini. En utilisant par exemple 2.7, vérifier que $\mathcal{F}$ est dense dans les opérateurs compacts.

4. Montrer que si T est de rang fini alors T^* aussi. En déduire que $\mathcal{F}$ est contenu dans tous les $L^p(\mathcal{H})$. Montrer que $\mathcal{F}$ est dense dans $L^p(\mathcal{H})$.