Université Paris 7
UFR de mathématiques
Second cycle

Théorie Spectrale
MT404
Année 2000-2001

Corrigé du devoir 1

Le corps considéré ici est le corps des réels. Les espaces l_∞, c_0, l_1 sont les espaces définis dans le cours. Dans ce dernier on a démontré que c_0^* est isométrique à l_1 et que ces trois espaces sont des espaces de Banach. Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}$ on note e_k la suite numérique $(\delta_n^k, n \in \mathbb{N})$.

Exercice 1

1. *Montrer que l'application $\varphi \mapsto (\varphi(e_n), n \in \mathbb{N})$ définit une isométrie bijective $l_1^* \to l_\infty$. Expliciter son application inverse $f : l_\infty \to l_1^*$.*

Réponse.

Nous ne vérifierons pas en général que les applications définies sont linéaires, pour ne pas encombrer l'argumentation; cette vérification, dans ces cas va de soit.

- Soit E l'espace des suites réelles, et soit $\Phi : \varphi \in l_1^* \mapsto (\varphi(e_n)) \in E$; c'est une application linéaire et, de plus, comme $\|e_n\|_1 = 1$, pour tout n on a $|\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|$ soit
$$\|\Phi(\varphi)\|_\infty = \sup_n |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\| \ .$$
Nous avons montré que $\Phi(l_1^*) \subseteq l_\infty$ et que $\Phi : l_1^* \to l_\infty$ est de norme inférieure ou égale à 1.
- Soit $t \in l_\infty$; définissons $\Psi(t) \in l_1^*$ par
$$\forall s \in l_1, \quad \Psi(t)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} t(n)s(n) \ .$$
Ψ est bien définie, linéaire et de norme ≤ 1 car
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} s(n)t(n)\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |s(n)t(n)| \leq \left(\sup_{n\geq 0} |t(n)|\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |s(n)|\right) = \|t\|_\infty \|s\|_1 \ .$$
On a aussi $\Phi(\Psi(t)) = (\Psi(t)(e_n)) = (t_n) = t$ et $\Psi(\Phi(\varphi))(e_k) = \varphi(e_k)$ pour tout entier $k \geq 0$. Puisque la forme linéaire continue $\Psi(\Phi(\varphi))$ coïncide avec φ sur l'ensemble $\mathrm{Vect}\{e_k : k \geq 0\}$ qui est dense dans l_1, on en déduit que $\Psi\Phi(\varphi) = \varphi$. L'application Ψ est donc l'inverse f cherché.
Comme Φ et son inverse sont de norme ≤ 1, l'application Φ est une isométrie. En effet si $\|f\| \leq 1$ et $\|f^{-1}\| \leq 1$, f est une isométrie car pour tout x on a $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$ et $\|x\| \leq \|f^{-1}\| \|f(x)\| \leq \|f(x)\|$. Mais **en général une application linéaire, même bijective, de norme 1 n'est pas une isométrie.**

2. *Montrer que la restriction g de f à l_1 définit une isométrie de l'espace l_1 dans l'espace l_∞^*.*

Réponse.

Nous avons montré à la question précédente que la correspondance définie par $(s,t) \in l_1 \times l_\infty \mapsto B(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)t(n)$ est une application bilinéaire qui vérifie

$$|B(s,t)| \leq \|s\|_1 \|t\|_\infty .$$

La forme linéaire $f(s)$ de la question précédente est $t \in l_1 \to B(s,t)$; mais si $s \in l_1$, cette forme se prolonge naturellement en $g(s) : \ t \in l_\infty \mapsto B(s,t)$ et on a $\|g(s)\|_{l_\infty^*} \leq \|s\|_1$. Posons $\varphi = g(s)$; on a $\varphi(e_n) = s_n$ pour tout $n \geq 0$. Définissons $t \in l_\infty$ par

$$t(n) = \begin{cases} \varphi(e_n)^{-1}|\varphi(e_n)| & \text{si} \quad \varphi(e_n) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\|t\|_\infty \leq 1$ et

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |s_n| \leq \|\varphi\| = \|g(s)\|_{l_\infty^*}$$

donc $\|s\|_1 \leq \|g(s)\|_{l_\infty^*}$ et on a montré que g est une isométrie.

3. *Montrer qu'il existe $\varphi \in l_\infty^*$ non nulle dont la restriction à c_0 est nulle et en déduire que l'isométrie précédente n'est pas surjective.*

Réponse.

4. Soient $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1, $F = c_0 \oplus \mathbb{R}.\mathbf{1}$, muni de la norme de l_∞ et $\varphi_F : s + \lambda\mathbf{1} \in F \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$ ($s \in c_0$). L'application φ_F est linéaire, $\ker(\varphi_F) = c_0$ car $\varphi_F|c_0 = 0$ et que ce dernier est un hyperplan de F. Comme $\ker\varphi_F$ est fermé φ_F est continue. Par le théorème de Hahn-Banach il existe $\varphi \in l_\infty^*$ qui prolonge φ_F, de même norme et qui répond à la question. En effet, $\Phi(\varphi) = (\varphi(e_n)) = (0_n) = 0$ donc $\varphi \in \ker\Phi$ tout en étant non nul; si φ provenait de $s \in l_1$ on aurait $0 = \Phi(\varphi) = \Phi(g(s)) = s$, donc s devrait être la suite nulle; ceci n'est pas possible puisque φ n'est pas nulle.

Exercice 2

Plus sur le dual de $l_\infty(\mathbb{R})$

On identifie l_1 avec son image dans l_∞^* par l'application g définie dans l'exercice précédent. Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{N}$ on notera $\chi_A \in l_\infty$ la suite définie par

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \in A \\ 0 & \text{si} \quad n \notin A. \end{cases}$$

Soit $\Phi \in l_\infty^*$ on pose $\mu_\Phi :\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \Phi(\chi_A)$.

1. *Montrer que l'on a, si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{N}$,*

$$\mu_\Phi(A) + \mu_\Phi(B) = \mu_\Phi(A \cup B), \quad \sup_A |\mu_\Phi(A)| < \infty.$$

Réponse.

- Si A et B sont disjoints on a $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ et donc

$$\mu_\Phi(A \cup B) = \Phi(\chi_{A\cup B}) = \Phi(\chi_A) + \Phi(\chi_B) = \mu_\Phi(A) + \mu_\Phi(B)\ .$$

- Pour tout A, on a $\|\chi_A\|_\infty \leq 1$ donc $|\Phi(\chi_A)| \leq \|\Phi\| < \infty$.

2. *Soit $\mathcal{X}$ le sous espace de l_∞ engendré par $\{\chi_A;\ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$. Montrer*
   (a) *Que $\mathcal{X}$ est dense dans l_∞.*
   (b) *Que si μ, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ vérifie les deux conditions précédentes elle se prolonge de manière unique en une forme linéaire $\overline{\mu} :\ \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.*
   (c) *Finalement que μ se prolonge en une forme linéaire unique: $\Phi :\ l_\infty \to \mathbb{R}$ telle que $\mu = \mu_\Phi$.*

Réponse.

(a) Soit $s \in l_\infty$, soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{Z}$; posons, pour s et ε fixés

$$A_N = \{n \in \mathbb{N} :\ N\varepsilon \leq s(n) < (N+1)\varepsilon\}\ .$$

L'ensemble $B = \{N \in \mathbb{Z} : A_N \neq \emptyset\}$ est un ensemble fini (parce que s est bornée), non vide et les A_N sont deux à deux disjoints. Soit

$$V = \sum_{N\in B} N\varepsilon\, \chi_{A_N}\ .$$

D'après cette définition

$$V \in \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq s(n) - V(n) < \varepsilon\ .$$

Ceci montre que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $s \in l_\infty$ il existe $V \in \mathcal{X}$ tel que $\|s - V\|_\infty \leq \varepsilon$.

(b) • Tout d'abord si le prolongement $\overline{\mu}$ existe il est unique: en effet, par linéarité, si $v = \sum_i a_i \chi_{A_i}$ est un vecteur de $\mathcal{X}$ on doit avoir

$$\overline{\mu}(v) = \sum_i a_i\, \overline{\mu}(\chi_{A_i}) = \sum_i a_i\, \mu(A_i)\ .$$

Il faut vérifier que ceci est une bonne définition, c'est à dire que

$$V = \sum_i a_i\, \chi_{A_i} = \sum_j b_j\, \chi_{B_j} \ \Rightarrow\ \sum_i a_i\, \mu(A_i) = \sum_j b_j\, \mu(B_j)\ .$$

• Soient $C_1, \dots, C_K$ des parties deux à deux disjointes et non vides de $\mathbb{N}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a au plus un i_0 tel que $n \in C_{i_0}$ et donc $V(n) = \sum_i \lambda_i \chi(C_i)(n) = \lambda_{i_0}$, sinon $V(n) = 0$: donc $V = 0 \Rightarrow \forall\, i, \lambda_i = 0$, et les suites χ_{C_i} sont linéairement indépendantes. Soient maintenant $D_1, \dots, D_M$ des parties de $\mathbb{N}$ non vides et $D = \cup_m D_m$; on définit sur D la relation d'équivalence $n \cong n' \Leftrightarrow \{m:\ n \in D_m\} = \{m:\ n' \in D_m\}$. Posons $C_1, \dots, C_K$ ses classes d'équivalences. Les suites χ_{C_k} forment une base du sous-espace de $\mathcal{X}$ engendré par les χ_{D_m}. En effet ils forment une famille libre et de plus, tous les χ_{D_m} sont chacun une somme de certains des χ_{C_k}.

• Soit donc $V = \sum_i a_i \chi_{A_i} = \sum_j b_j \chi_{B_j}$ et appliquons ce qui précède à la famille $\{A_i\} \cup \{B_i\}$, il vient, par unicité de l'écriture dans une base

$$V = \sum_k c_k\, \chi_{C_k}, \quad c_k = \sum_{i:C_k \subseteq A_i} a_i = \sum_{j:C_k \subseteq B_j} b_i\ .$$

Par ailleurs, par additivité de μ on a $\mu(A_i) = \sum_{k:C_k \subseteq A_i} \mu(C_k)$ et de même pour les B_j, donc

$$\begin{aligned}
\sum_i a_i\, \mu(A_i) &= \sum_i a_i \left(\sum_{k:C_k \subseteq A_i} \mu(C_k) \right) \\
&= \sum_k \mu(C_k) \left(\sum_{i:C_k \subseteq A_i} a_i \right) \\
&= \sum_k c_k\, \mu(C_k) = \sum_j b_j\, \mu(B_j).
\end{aligned}$$

La fonction $\overline{\mu}$ est bien définie, linéaire par construction.

(c) Comme $\overline{\mu}$ est linéaire, pour dire qu'elle admet un prolongement linéaire continu à $l_\infty = \overline{\mathcal{X}}$ il suffit de montrer que $\overline{\mu}$ est continue. Soit $v \in \mathcal{X}$, $v = \sum_i a_i\, \chi_{A_i}$; on a vu précédemment que l'on pouvait supposer les A_i disjoints deux à deux, on le supposera. Alors $\|v\|_\infty = \sup_i |a_i|$. Il vient alors

$$|\overline{\mu}(v)| = \left| \sum_i a_i\, \mu(A_i) \right| \leq \|v\| \sum_i |\mu(A_i)|\ .$$

Soit M la borne des $|\mu(A)|$ pour $A \subseteq \mathbb{N}$; on a en écrivant $B_1 = \cup_{i:\mu(A_i)\geq 0} A_i$ et $B_2 = \cup_{i:\mu(A_i)<0} A_i$

$$\begin{aligned}\sum_i |\mu(A_i)| &= \sum_{i:\mu(A_i)\geq 0} \mu(A_i) - \sum_{i:\mu(A_i)<0} \mu(A_i) \\ &= \mu(B_1) - \mu(B_2) \leq 2M.\end{aligned}$$

On dit que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est un filtre si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées:

- $A \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F}$ et $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{B} \in \mathcal{F}$
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

On note $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini.

3. *Montrer que $\mathcal{F}_0$ est un filtre.*

Réponse.

Il est plus simple de parler des complémentaires:

- La réunion de deux parties finies est finie: $\mathcal{F}_0$ est stable par intersection finie.
- Une sous partie d'une partie finie est finie: $\mathcal{F}_0$ est stable par extension.
- $\mathbb{N}$ est infini: $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$.

4. *Montrer que $\mathcal{F}_0$ est inclus dans un filtre $\mathcal{F}$ maximal pour l'inclusion, et que $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés suivantes:*

- $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \{x\} \notin \mathcal{F}$.
- $\forall\, A \subseteq \mathbb{N},\ A \notin \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$

On peut utiliser l'axiome du choix (Zorn) ou passer la question.

Réponse.

- L'ensemble des filtres contenant $\mathcal{F}_0$ est non vide, puisqu'il contient $\mathcal{F}_0$. Soit $(\mathcal{F}_i, i \in I)$ une famille de filtres contenant $\mathcal{F}_0$, totalement ordonnée par inclusion. Posons $\mathcal{F}$ la réunion de cette famille (attention! réunion dans les parties des parties de $\mathbb{N}$). $\mathcal{F}$ est un filtre contenant $\mathcal{F}_0$. Qu'il contienne $\mathcal{F}_0$ et que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ sont clairs. Si $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ et $C \supset A$, on a $A \in \mathcal{F}_i$ pour un certain i et $C \in \mathcal{F}_i$ donc $C \in \mathcal{F}$; de plus $B \in \mathcal{F}_j$ pour un j et si $k = \max(i,j)$, on aura $A, B \in \mathcal{F}_k$ donc $A \cap B \in \mathcal{F}_k$ et $A \cap B \in \mathcal{F}$. Cet ensemble de filtres est "inductif" et admet donc des éléments maximaux par le théorème de Zorn.

- La première propriété pour $\mathcal{F}$ est impliquée par le fait de contenir $\mathcal{F}_0$.

  Montrons qu'un filtre qui ne vérifie pas la deuxième propriété n'est pas maximal. Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soit $X \subset \mathbb{N}$ tel que $X \notin \mathcal{F}$ et $\mathbb{N} \setminus X \notin \mathcal{F}$; notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des $Y \subset \mathbb{N}$ tels qu'il existe $Y_1 \in \mathcal{F}$ tel que $Y \supseteq Y_1 \cap X$. $\mathcal{G}$ est un filtre. En effet

  - Soit $Y \in \mathcal{G}$ et $Y_1 \in \mathcal{F}$ tel que $Y_1 \cap X \subseteq Y$. Si $Y \subseteq Z$, $Y_1 \cap X \subseteq Z$ ce qui montre la stabilité par extension.
  - Si Y et Y' sont tels que l'on trouve $Y_1,\ Y_1'$ dans $\mathcal{F}$ tels que $Y_1 \cap X$ et $Y_1' \cap X$ soient contenus respectivement dans Y et Y', on aura $Y_1 \cap Y_1' \cap X \subseteq Y \cap Y'$ et comme $\mathcal{F}$ est un filtre, $Y_1 \cap Y_1' \in \mathcal{F}$ donc $Y \cap Y' \in \mathcal{G}$.
  - Si $Y_1 \in \mathcal{F}$, $Y_1 \cap X \neq \emptyset$ en effet $Y_1 \cap X = \emptyset \Rightarrow Y_1 \subseteq \mathbb{N} \setminus X \Rightarrow \mathbb{N} \setminus X \in \mathcal{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\mathcal{G}$ est bien un filtre.

  L'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ est stricte car $X \in \mathcal{G}$, ceci montre que les filtres maximaux vérifient la propriété demandée.

Remarque. Cette construction permettrait de remplacer le théorème de Zorn dans la première partie par une récurrence transfinie.

5. *Soit $\mathcal{F}$ un filtre maximal contenant $\mathcal{F}_0$, on pose*
$$\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}, \quad \mu_{\mathcal{F}}(A) = 0 \ \text{ sinon.}$$
Montrer que $\mu_{\mathcal{F}}$ vérifie les conditions de (1).

Réponse.

Comme $\mathrm{Im}(\mu) \subseteq \{0, 1\}$ la deuxième condition est vérifiée. Pour la première, donnons nous deux parties disjointes A et B de $\mathbb{N}$. Si $A \notin \mathcal{F}$ et $B \notin \mathcal{F}$, on a $A \cup B \notin \mathcal{F}$ car les complémentaires de A et B sont dans $\mathcal{F}$ et on applique le premier axiome. Alors $\mu(A) + \mu(B) = 0 = \mu(A \cup B)$. Si l'une des parties, disons A, est dans $\mathcal{F}$ l'autre (B) n'y est pas (sinon $\emptyset \in \mathcal{F}$), et $A \cup B \in \mathcal{F}$ donc $1 = \mu(A \cup B) = 1 + 0 = \mu(A) + \mu(B)$.

6. *Montrer que la forme linéaire Φ associée n'est pas dans l_1. Montrer que pour toute suite $\mathbf{x} = (x_n) \in l_\infty$ qui est convergente, on a $\Phi(\mathbf{x}) = \lim_{n\to+\infty} x_n$.*

Réponse.

On a vu qu'un singleton n'est pas dans $\mathcal{F}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Phi(\chi_{\{n\}}) = 0$ soit $\Phi(e_n) = 0$. Autrement dit $\Phi|c_0 = 0$ et on a trouvé par une autre méthode un élément de $l_\infty^* \setminus l_1$.

Soit $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1. On a $\Phi(\mathbf{1}) = 1$ par construction, puisque $\mathbf{1}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{N}$ et que $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$. Si $\mathbf{x}$ converge vers ℓ, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre fini de coefficients c_k, $k \le k_0$ tels que $\mathbf{x} - \ell\mathbf{1} - \sum_{k=0}^{k_0} c_k e_k$ ait une norme $< \varepsilon$ dans l_∞. Puisque $\Phi(e_k) = 0$ pour tout k, on en déduit que $|\Phi(\mathbf{x}) - \ell| \le \|\Phi\|\,\varepsilon$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne le résultat.