MT404 **Examen du 29 Janvier 2001**

durée : 3 heures

Le poly est le seul document autorisé.

Exercice I

1. Dans les deux parties de l'exercice, K est un compact non vide de $\mathbb{C}$; on désigne par C(K) l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur K, muni de la norme uniforme ; on désigne par E l'adhérence dans C(K) du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $z \in \mathrm{K} \to z^n$, où n prend les valeurs entières $0, 1, 2, \ldots$; on munit E de la norme uniforme. On note i_{K} la fonction définie sur K par $i_{\mathrm{K}}(z) = z$ pour tout $z \in \mathrm{K}$.

1.a. Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in \mathrm{E}$, la fonction produit fg est dans E. Vérifier que l'application $f \in \mathrm{E} \to i_{\mathrm{K}} f$ est linéaire et continue de E dans E.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 \notin \mathrm{K}$, et on désigne par T l'élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $\mathrm{T}(f) = i_{\mathrm{K}} f$, pour toute $f \in \mathrm{E}$.

1.b. Montrer que T est injectif à image fermée. Montrer que T est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ si et seulement si la fonction constante égale à 1 est dans l'image T(E).

1.c. Dans cette question (seulement) on suppose que K contient le cercle de rayon $r > 0$ centré au point 0. Montrer que $\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta = 0$ pour toute fonction $g \in \mathrm{T(E)}$. En déduire dans ce cas que T n'est pas surjectif, et que la fonction $z \in \mathrm{K} \to 1/z$ n'est pas dans E.

2. Dans cette deuxième partie de l'exercice on suppose que $|z - t| \geq 1$ pour tout $z \in \mathrm{K}$ et pour tout t réel ≥ 0.

2.a. Montrer que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ pour $t > 0$ assez grand. Montrer que lorsque $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ est inversible et t réel ≥ 0, on a $\|(\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E})^{-1}\| \leq 1$.

2.b. Si $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, si U est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ et si $|s| < \|\mathrm{U}^{-1}\|^{-1}$, montrer que l'endomorphisme $\mathrm{U} + s\,\mathrm{Id_E}$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

2.c. Montrer que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ pour tout réel $t \geq 0$. Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{P}_n) \subset \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de polynômes telle que $\mathrm{P}_n(z) \to 1/z$ uniformément pour $z \in \mathrm{K}$.

Exercice II

1. On désigne par F l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$, à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. Pour chaque $f \in \mathrm{F}$ on définit une fonction $\mathrm{T}f$ sur $[0, 2\pi]$ par la formule

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad (\mathrm{T}f)(x) = i\ \mathrm{e}^{ix/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-it/2} f(t)\,dt.$$

1.a. Justifier (en quelques phrases) le fait que $\mathrm{T}f \in \mathrm{F}$ pour toute $f \in \mathrm{F}$ et que l'application $f \in \mathrm{F} \to \mathrm{T}f$ est linéaire. Montrer que T est continue de F dans F en donnant une majoration de sa norme (ou si possible la valeur exacte de $\|\mathrm{T}\|$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{F})$).

TOURNEZ S.V.P.

1.b. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue ℓ sur F telle que pour toute $f \in \mathrm{F}$, la fonction $\mathrm{S}f$ définie sur $[0, 2\pi]$ par $(\mathrm{S}f)(x) = (\mathrm{T}f)(x) + \ell(f)\, \mathrm{e}^{ix/2}$ prenne la même valeur en $x = 0$ et en $x = 2\pi$.

1.c. Montrer que $\mathrm{S}f$ est l'unique fonction y de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$, qui est solution de l'équation différentielle $y' - iy/2 = i\, f$ et qui vérifie $y(0) = y(2\pi)$.

1.d. Montrer qu'il existe une fonction mesurable bornée K sur $[0, 2\pi]^2$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{F},\ \forall x \in [0, 2\pi], \quad (\mathrm{S}f)(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{K}(x,t) f(t)\, dt.$$

2. On désigne par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], dt)$, et on considère l'opérateur linéaire A défini par

$$\forall f \in \mathrm{H},\ \forall x \in [0, 2\pi], \quad (\mathrm{A}f)(x) = \int_0^{2\pi} \frac{i}{2}\, \mathrm{sign}(x - t)\, \mathrm{e}^{i(x-t)/2} f(t)\, dt,$$

où pour u réel, on a posé $\mathrm{sign}(u) = 1$ si $u > 0$, $\mathrm{sign}(u) = -1$ si $u < 0$ et $\mathrm{sign}(0) = 0$.

2.a. Montrer que A est un élément hermitien et compact de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

2.b. Comparer $\mathrm{A}f$ et $\mathrm{S}f$ lorsque $f \in \mathrm{F}$. Déterminer les valeurs propres non nulles de A et les vecteurs propres correspondants. Donner le spectre de A. Calculer la norme de A.

2.c. Montrer que l'image de A contient toutes les fonctions de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$, nulles en 0 et en 2π. Montrer que A est injectif.

2.d. Expliquer pourquoi l'expression

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{in(x-t)}$$

définit une fonction $(x,t) \to \mathrm{K}_2(x,t)$ de $\mathrm{L}_2([0, 2\pi]^2)$. Comparer $\mathrm{K}(x,t)$ et $\mathrm{K}_2(x,t)$.