Exercice I

1. Dans les deux parties de l'exercice, K *est un compact non vide de* $\mathbb{C}$ *; on désigne par* C(K) *l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur* K*, muni de la norme uniforme ; on désigne par* E *l'adhérence dans* C(K) *du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions* $z \in \mathrm{K} \to z^n$*, où* n *prend les valeurs entières* $0, 1, 2, \ldots$ *; on munit* E *de la norme uniforme. On note* i_K *la fonction définie sur* K *par* $i_\mathrm{K}(z) = z$ *pour tout* $z \in \mathrm{K}$.

1.a. Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in \mathrm{E}$*, la fonction produit* fg *est dans* E*. Vérifier que l'application* $f \in \mathrm{E} \to i_\mathrm{K} f$ *est linéaire et continue de* E *dans* E.

Solution. L'espace vectoriel E_0 engendré par les fonctions $z \to z^n$ est l'espace des fonctions polynomiales sur K. Si $f(z) = \mathrm{P}(z)$ et $g(z) = \mathrm{Q}(z)$ avec $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, alors fg est la fonction polynomiale provenant du polynôme PQ, donc $fg \in \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}$. Pour le cas général il faut passer à la limite uniforme sur K : supposons que $f = \lim_n f_n$ et $g = \lim_n g_n$ avec $(f_n), (g_n) \subset \mathrm{E}_0$; alors $f_n g_n \in \mathrm{E}_0$ d'après la remarque précédente, et $f_n g_n$ tend uniformément sur K vers fg, donc $fg \in \mathrm{E}$. Pour justifier la convergence uniforme, on écrit

$$\|f_n g_n - fg\| = \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\| \le \mathrm{C}\,\|f_n - f\| + \|f\|\,\|g_n - g\| \to 0,$$

où on a utilisé le fait que la suite uniformément convergente (g_n) doit être bornée en norme par un certain C.

Il est clair que $i_\mathrm{K}(\lambda f + \mu g) = \lambda(i_\mathrm{K} f) + \mu(i_\mathrm{K} g)$ pour toutes $f, g \in \mathrm{E}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, donc l'application $f \to i_\mathrm{K} f$ est linéaire. La fonction i_K est la fonction $z \to z^n$ pour $n = 1$, donc elle est dans E par définition ; on sait d'après ce qui précède que $i_\mathrm{K} f \in \mathrm{E}$ pour toute $f \in \mathrm{E}$. De plus, si $\mathrm{M} = \max\{|z| : z \in \mathrm{K}\}$ (qui existe parce que K est compact), on aura

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad |(i_\mathrm{K} f)(z)| \le |z|\,|f(z)| \le \mathrm{M}\,\|f\|_\infty,$$

ce qui montre que l'application linéaire $f \in \mathrm{E} \to i_\mathrm{K} f$ est continue pour la norme uniforme.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 \notin \mathrm{K}$*, et on désigne par* T *l'élément de* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *défini par* $\mathrm{T}(f) = i_\mathrm{K} f$*, pour toute* $f \in \mathrm{E}$.

1.b. Montrer que T *est injectif à image fermée. Montrer que* T *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *si et seulement si la fonction constante égale à* 1 *est dans l'image* T(E).

Solution. Puisque $0 \notin \mathrm{K}$ il existe $\delta > 0$ tel que $|z| \ge \delta$ pour tout $z \in \mathrm{K}$. Soit $f \in \mathrm{E}$ quelconque ; choisissons $z_0 \in \mathrm{K}$ tel que $\|f\| = |f(z_0)|$; on a

$$\|\mathrm{T}f\| \ge |(\mathrm{T}f)(z_0)| = |z_0|\,|f(z_0)| \ge \delta\,|f(z_0)| = \delta\,\|f\|.$$

Si $\mathrm{T}f = 0_\mathrm{E}$, alors $\|f\| \le \delta^{-1}\|\mathrm{T}f\|$ montre que $f = 0_\mathrm{E}$, donc T est injectif.

Montrons que T(E) est fermé ; si $(\mathrm{T}f_n)$ converge vers $y \in \mathrm{E}$, nous devons montrer que y est dans T(E) ; la suite $(\mathrm{T}f_n)$ est de Cauchy ; la relation $\|f_n - f_m\| \le \delta^{-1}\|\mathrm{T}f_m - \mathrm{T}f_n\|$ montre que (f_n) est de Cauchy aussi ; puisque E est complet, la suite (f_n) converge vers un vecteur $f \in \mathrm{E}$. Puisque T est continue, $\mathrm{T}f_n$ converge vers $\mathrm{T}f$, donc $y = \mathrm{T}f$ et on a montré que T(E) est fermé.

Désignons par **1** la fonction constante sur K, égale à 1 en tout point. S'il existe $g \in \mathrm{E}$ telle que $\mathbf{1} = \mathrm{T}(g) = i_\mathrm{K} g$, alors pour toute $f \in \mathrm{E}$ on aura $\mathrm{T}(gf) = i_\mathrm{K}(gf) = (i_\mathrm{K} g)f = f$, et aussi $g\mathrm{T}(f) = g(i_{\mathrm{K}} f) = f$ ce qui montre que l'application linéaire continue $f \in \mathrm{E} \to gf$ est l'inverse de T dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Inversement, si T est inversible on a $\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ et la fonction $\mathbf{1}$, qui est dans E (c'est la fonction $z \to z^0$), doit être dans l'image T(E).

1.c. Dans cette question (seulement) on suppose que K *contient le cercle de rayon* $r > 0$ *centré au point* 0. *Montrer que* $\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta = 0$ *pour toute fonction* $g \in \mathrm{T}(\mathrm{E})$. *En déduire dans ce cas que* T *n'est pas surjectif, et que la fonction* $z \in \mathrm{K} \to 1/z$ *n'est pas dans* E.

Solution. Supposons d'abord que $f(z) = z^n$, avec $n \geq 0$ et posons $g = \mathrm{T}(f)$; on a $g(z) = z^{n+1}$ pour tout $z \in \mathrm{K}$, en particulier quand $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, donc

$$\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} r^{n+1}\,\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\,d\theta = r^{n+1}\Big[\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\Big]_{\theta=0}^{2\pi} = 0.$$

Par linéarité, le même résultat est valable pour $f \in \mathrm{E}_0$, puis par continuité, pour toute fonction $f \in \mathrm{E}$: en effet, la forme linéaire $f \in \mathrm{E} \to \int_0^{2\pi} (\mathrm{T}f)(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta$ est continue sur E, de norme $\leq 2\pi\,\|\mathrm{T}\|$; puisqu'elle est nulle sur le sous-espace dense E_0, elle est nulle aussi sur E. On a bien montré que $\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta = 0$ pour toute $g \in \mathrm{T}(\mathrm{E})$.

Si on prend $g = \mathbf{1}$, on a $\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$, donc $\mathbf{1}$ n'est pas dans l'image T(E), donc T n'est pas surjectif ; si la fonction $h(z) = 1/z$ était dans E, son image $\mathrm{T}(h)$ serait la fonction $\mathbf{1}$, ce qui n'est pas possible d'après ce qu'on vient de dire.

2. Dans cette deuxième partie de l'exercice on suppose que $|z - t| \geq 1$ *pour tout* $z \in \mathrm{K}$ *et pour tout* t *réel* ≥ 0.

2.a. Montrer que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *pour* $t > 0$ *assez grand. Montrer que lorsque* $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *est inversible et* t *réel* ≥ 0, *on a* $\|(\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{-1}\| \leq 1$.

Solution. On sait que le spectre de T est compact, donc borné, donc $t \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ lorsque t est assez grand ; si on veut être un peu plus précis, on peut dire que $t \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ dès que $t > t_0 = \|\mathrm{T}\|$ (voir poly, après la définition 6.1.6).

L'opérateur $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $z \to z - t$, puisque

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad (\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(f)(z) = (\mathrm{T}f)(z) - (tf)(z) = zf(z) - tf(z) = (z - t)f(z).$$

Puisqu'on a $|z - t| \geq 1$ sur K par hypothèse, pour tout t réel ≥ 0, on a $|(\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(f)| \geq |f|$ en tout point z de K, ce qui entraîne en particulier que $\|(\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(f)\| \geq \|f\|$ pour toute $f \in \mathrm{E}$. Supposons que l'inverse $\mathrm{V} = (\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, et soit $y \in \mathrm{E}$ quelconque ; il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $(\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(x) = y$ (puisque $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est inversible, il est surjectif) et l'inégalité précédente se lit “en changeant de variable”, puisque $x = \mathrm{V}(y)$,

$$\forall y \in \mathrm{E}, \quad \|\mathrm{V}(y)\| \leq \|y\|$$

c'est à dire que $\|(\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^{-1}\| = \|\mathrm{V}\| \leq 1$.

2.b. Si $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, *si* U *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et si* $|s| < \|\mathrm{U}^{-1}\|^{-1}$, *montrer que l'endomorphisme* $\mathrm{U} + s\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Solution. C'est pratiquement une question de cours ; on écrit $\mathrm{U} + s\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = \mathrm{U}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + s\mathrm{U}^{-1})$; l'opérateur $\mathrm{A} = -s\mathrm{U}^{-1}$ a une norme $\|\mathrm{A}\| = |s|\,\|\mathrm{U}^{-1}\| < 1$ d'après l'hypothèse, donc $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \mathrm{A}$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'après le cours (voir poly, lemme 6.1.1). Pour finir l'opérateur $\mathrm{U} + s\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est produit de deux inversibles, donc il est inversible.

2.c. Montrer que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ *pour tout réel* $t \geq 0$. *Montrer qu'il existe une suite* $(\mathrm{P}_n) \subset \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *de polynômes telle que* $\mathrm{P}_n(z) \to 1/z$ *uniformément pour* $z \in \mathrm{K}$.

Solution. Pour tout $t \geq 0$, il résulte des deux questions précédentes que si $\mathrm{U} = \mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ est inversible, alors la même propriété est vraie pour tout t' tel que $|t' - t| < 1$; en effet, on applique le résultat de la question *2.b* à $\mathrm{T} - t'\,\mathrm{Id_E} = \mathrm{U} + (t - t')\,\mathrm{Id_E}$, avec $|t - t'| < 1 \leq \|\mathrm{U}^{-1}\|^{-1}$ (on a $\|\mathrm{U}^{-1}\| \leq 1$ d'après la deuxième partie de la question *2.a*). Par ailleurs, d'après la première partie de la question *2.a*, on sait qu'il existe t_0 tel que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ soit inversible pour tout $t > t_0$. On voit maintenant que si $t_0 \geq 0$ et si $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ est inversible pour tout $t > t_0$, alors $\mathrm{T} - t'\,\mathrm{Id_E}$ est inversible pour tout $t' > t_0 - 1$: en effet, si on considère $t' > t_0 - 1$, on peut trouver $t > t_0$ tel que $|t' - t| < 1$, et il en résulte que $\mathrm{T} - t'\,\mathrm{Id_E}$ est inversible. On montre alors de proche en proche que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ est inversible pour tout $t > t_0 - k - 1$, tant que k entier ≥ 0 est tel que $t_0 - k \geq 0$. On arrive ainsi à trouver $t_1 = t_0 - k_1 < 0$ tel que $\mathrm{T} - t\,\mathrm{Id_E}$ soit inversible pour tout $t > t_1$.

On peut donc prendre $t = 0 > t_1$, c'est à dire que T lui-même est inversible, donc surjectif ; il en résulte que la fonction $\mathbf{1}$ est dans $\mathrm{T}(\mathrm{E})$, donc il existe une fonction $g \in \mathrm{E}$ telle que $zg(z) = 1$ pour tout $z \in \mathrm{K}$, c'est à dire que $g(z) = 1/z$ pour tout $z \in \mathrm{K}$. Par définition de E, il existe une suite de polynômes $(\mathrm{P}_n) \subset \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ telle que $\mathrm{P}_n(z)$ tende uniformément sur K vers $g(z) = 1/z$.

Exercice II

1. On désigne par F *l'espace de Banach des fonctions continues sur* $[0, 2\pi]$, *à valeurs complexes, muni de la norme uniforme. Pour chaque* $f \in \mathrm{F}$ *on définit une fonction* $\mathrm{T}f$ *sur* $[0, 2\pi]$ *par la formule*

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad (\mathrm{T}f)(x) = i\ \mathrm{e}^{ix/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt.$$

1.a. Justifier (en quelques phrases) le fait que $\mathrm{T}f \in \mathrm{F}$ *pour toute* $f \in \mathrm{F}$ *et que l'application* $f \in \mathrm{F} \to \mathrm{T}f$ *est linéaire. Montrer que* T *est continue de* F *dans* F *en donnant une majoration de sa norme (ou si possible la valeur exacte de* $\|\mathrm{T}\|$ *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{F})$*).*

Solution. Si $f \in \mathrm{F}$, la fonction $x \to \int_0^x \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt$ est continue, et $x \to \mathrm{e}^{ix/2}$ est continue aussi, donc la fonction $\mathrm{T}f$ est continue sur $[0, 2\pi]$. La linéarité de T par rapport à f est évidente par la linéarité de l'intégrale.

Passons à la norme de T dans $\mathcal{L}(\mathrm{F})$. Supposons que $\|f\|_\infty \leq 1$. On aura alors pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$|(\mathrm{T}f)(x)| \leq |i\ \mathrm{e}^{ix/2}\,| \int_0^x |\,\mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)|\, dt \leq \int_0^x dt = x \leq 2\pi.$$

On a donc $\|\mathrm{T}f\|_\infty \leq 2\pi$ pour toute f telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, par conséquent $\|\mathrm{T}\| \leq 2\pi$. Si on choisit $f(x) = \mathrm{e}^{ix/2}$, on aura $(\mathrm{T}f)(2\pi) = i\,\mathrm{e}^{i\pi} \int_0^{2\pi} dt$, donc $|(\mathrm{T}f)(2\pi)| = 2\pi$ et $\|\mathrm{T}\| = 2\pi$.

1.b. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue ℓ *sur* F *telle que pour toute* $f \in \mathrm{F}$, *la fonction* $\mathrm{S}f$ *définie sur* $[0, 2\pi]$ *par* $(\mathrm{S}f)(x) = (\mathrm{T}f)(x) + \ell(f)\,\mathrm{e}^{ix/2}$ *prenne la même valeur en* $x = 0$ *et en* $x = 2\pi$.

Solution. On doit avoir $(\mathrm{S}f)(0) = (\mathrm{T}f)(0) + \ell(f) = \ell(f)$ égal à $(\mathrm{S}f)(2\pi) = (\mathrm{T}f)(2\pi) + \ell(f)\,\mathrm{e}^{i\pi} = (\mathrm{T}f)(2\pi) - \ell(f)$. On a donc

$$\ell(f) = \frac{1}{2}(\mathrm{T}f)(2\pi) = \frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt = -\,\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt.$$

La linéarité de ℓ est claire, comme celle de T, et on vérifie que $\|\ell\| \le \pi$.

1.c. Montrer que $\mathrm{S}f$ *est l'unique fonction* y *de classe* C^1 *sur* $[0, 2\pi]$, *qui est solution de l'équation différentielle* $y' - iy/2 = i\,f$ *et qui vérifie* $y(0) = y(2\pi)$.

Solution. Si $f \in \mathrm{F}$, la fonction $t \to \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)$ est continue, donc $x \to \int_0^x \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt$ est C^1, donc $\mathrm{T}f$ est de classe C^1 et

$$(\mathrm{T}f)'(x) = \frac{i}{2}(\mathrm{T}f)(x) + i\ \mathrm{e}^{ix/2}\big(\mathrm{e}^{-ix/2}\, f(x)\big) = \frac{i}{2}(\mathrm{T}f)(x) + i\, f(x),$$

et la fonction $z(x) = \ell(f)\,\mathrm{e}^{ix/2}$ vérifie l'équation homogène $z' = \frac{i}{2}z$, donc par linéarité on a bien $(\mathrm{S}f)' - \frac{i}{2}(\mathrm{S}f) = if$; par construction on a $(\mathrm{S}f)(0) = (\mathrm{S}f)(2\pi)$.

Montrons l'unicité. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de notre problème, alors $z = y_1 - y_2$ vérifie l'équation homogène $z' = \frac{i}{2}z$ et de plus $z(0) = z(2\pi)$. Mais toutes les solutions de l'équation homogène sont de la forme $z(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{ix/2}$, donc $\lambda = z(0) = z(2\pi) = -\lambda$ entraîne $\lambda = 0$ et $z = 0$: on a montré l'unicité de y vérifiant les conditions annoncées.

1.d. Montrer qu'il existe une fonction mesurable bornée K *sur* $[0, 2\pi]^2$ *telle que*

$$\forall f \in \mathrm{F},\ \forall x \in [0, 2\pi], \quad (\mathrm{S}f)(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{K}(x,t) f(t)\, dt.$$

Solution. En utilisant l'expression de $\ell(f)$ on obtient

$$(\mathrm{S}f)(x) = i\,\mathrm{e}^{ix/2} \int_0^{x} \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt - \frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{ix/2} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt =$$

$$= i \int_0^{x} \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{e}^{i(x-t)/2}\, f(t)\, dt - i \int_x^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i(x-t)/2}\, f(t)\, dt$$

qui s'écrit bien sous la forme $\int_0^{2\pi} \mathrm{K}(x,t) f(t)\, dt$ si on pose

$$\mathrm{K}(x,t) = \frac{i}{2}\ \mathrm{sign}(x-t)\,\mathrm{e}^{i(x-t)/2}\,.$$

Le noyau K n'est pas continu sur $[0, 2\pi]^2$, mais il est tout de même mesurable, et il est borné (par 1/2).

2. On désigne par H *l'espace de Hilbert complexe* $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], dt)$, *et on considère l'opérateur linéaire* A *défini par*

$$\forall f \in \mathrm{H},\ \forall x \in [0, 2\pi], \quad (\mathrm{A}f)(x) = \int_0^{2\pi} \frac{i}{2}\ \mathrm{sign}(x-t)\,\mathrm{e}^{i(x-t)/2}\, f(t)\, dt,$$

où pour u *réel, on a posé* $\mathrm{sign}(u) = 1$ *si* $u > 0$, $\mathrm{sign}(u) = -1$ *si* $u < 0$ *et* $\mathrm{sign}(0) = 0$.

2.a. Montrer que A *est un élément hermitien et compact de* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Solution. On voit que A est l'opérateur qui est défini sur $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ par le noyau K de la question *1.d.* Ce noyau K est mesurable et borné, en particulier ce noyau appartient à $\mathrm{L}_2([0, 2\pi]^2, dx\,dt)$. D'après le cours (exemples 7.3.2), l'opérateur A est de Hilbert-Schmidt, donc compact. De plus, le noyau K a la symétrie hermitienne,

$$\mathrm{K}(t,x) = \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(t-x)\,\mathrm{e}^{i(t-x)/2} = -\frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(x-t)\,\mathrm{e}^{-i(x-t)/2} = \overline{\mathrm{K}(x,t)},$$

donc A est hermitien.

2.b. Comparer $\mathrm{A}f$ *et* $\mathrm{S}f$ *lorsque* $f \in \mathrm{F}$. *Déterminer les valeurs propres non nulles de* A *et les vecteurs propres correspondants. Donner le spectre de* A. *Calculer la norme de* A.

Solution. On a remarqué que S et A sont définis par le même noyau K, donc $\mathrm{A}f = \mathrm{S}f$ lorsque $f \in \mathrm{F}$. On note que pour $f \in \mathrm{H}$,

$$\text{(E)} \qquad (\mathrm{A}f)(x) = \frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{ix/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt - \frac{i}{2}\,\mathrm{e}^{ix/2} \int_x^{2\pi} \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt\,;$$

la fonction $x \to \int_0^x \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt$ est continue, donc $\mathrm{A}f$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Si $f \in \mathrm{H}$ et $\mathrm{A}f = \lambda f$ avec $f \neq 0_{\mathrm{H}}$ et $\lambda \neq 0$, alors $f = \lambda^{-1}\mathrm{A}f$ est continue, donc $f = \lambda^{-1}\mathrm{S}f$. D'après la première partie, on a $(\mathrm{S}f)' = \frac{i}{2}(\mathrm{S}f) + if$, ce qui donne $f' = i\big(\frac{1}{2} + \lambda^{-1}\big)f$, et $f(0) = f(2\pi)$. Si on pose $\mu = \frac{1}{2} + \lambda^{-1}$, on voit que $f(x) = c\ \mathrm{e}^{i\mu x}$ avec $c \neq 0$, et la condition $f(0) = f(2\pi)$ impose que $1 = \mathrm{e}^{2i\pi\mu}$, c'est à dire $\mu \in \mathbb{Z}$. On doit donc avoir, pour un $n \in \mathbb{Z}$ quelconque, $f(x) = c\ \mathrm{e}^{inx}$ et $\mu = n$ qui donne $\lambda = (n - \frac{1}{2})^{-1}$.

Inversement, on a $\mathrm{A}e_n = \mathrm{S}e_n = (n - \frac{1}{2})^{-1}e_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où e_n désigne la fonction définie par $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$; en effet, $y = (n - \frac{1}{2})^{-1}e_n$ vérifie $y' - \frac{i}{2}y = ie_n$. On a ainsi déterminé toutes les valeurs propres non nulles de A et les vecteurs propres qui correspondent.

Comme A est compact, les valeurs spectrales non nulles de A sont des valeurs propres. Le spectre de A est donc formé de toutes les valeurs $(n - \frac{1}{2})^{-1}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, et de leur limite 0. Puisque A est hermitien, il est normal et sa norme est égale au maximum des modules des éléments du spectre (proposition 6.2.3) ; le maximum des modules des éléments du spectre correspond donc au minimum du module de $n - \frac{1}{2}$ quand n varie dans $\mathbb{Z}$. Ce minimum est atteint pour $n = 0, 1$ et dans ce cas $|(n - \frac{1}{2})^{-1}| = 2$. On a donc $\|\mathrm{A}\| = 2$.

2.c. Montrer que l'image de A *contient toutes les fonctions de classe* C^1 *sur* $[0, 2\pi]$, *nulles en* 0 *et en* 2π. *Montrer que* A *est injectif.*

Solution. Soit y une fonction de classe C^1 nulle en 0 et en 2π, et définissons une fonction $f \in \mathrm{F}$ par la relation $y' - iy/2 = if$. D'après la question *1.c* on a $\mathrm{S}f = y$, donc $y = \mathrm{S}f = \mathrm{A}f$ est dans l'image de A.

Pour montrer que A est injectif, il y a au moins deux méthodes. On sait que $\ker \mathrm{A}$ est l'orthogonal de l'image de A, mais imA est dense dans L_2 d'après la première partie de la question, donc $\ker \mathrm{A} = \{0\}$. On peut dire aussi que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des vecteurs propres trouvés à la question précédente est une base de $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ (c'est la base de Fourier) ; si $f \in \mathrm{H}$, elle s'écrit $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e_n$, avec $c_n = \langle f, e_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; si f n'est pas nulle, il y a au moins un coefficient c_{n_0} non nul, et

$$\mathrm{A}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{n - \frac{1}{2}}\, e_n \neq 0_{\mathrm{H}}, \quad \text{car} \quad \langle \mathrm{A}f, e_{n_0}\rangle = \frac{c_{n_0}}{n_0 - \frac{1}{2}} \neq 0.$$

Quelques étudiants ont donné une méthode rapide, mais qui n'est totalement justifiée que si $\mathrm{A}f = 0$ avec f continue ; dans ce cas, on sait que $y = \mathrm{A}f = \mathrm{S}f = 0$ vérifie $y' - \frac{i}{2}y = 0 = if$, donc $f = 0$ est l'unique élément du noyau de S. Pour traiter de la même façon le cas où $f \in \mathrm{H}$, il faudrait parler de dérivée généralisée.

Il y a aussi une méthode directe : si $f \in \mathrm{H}$ vérifie $\mathrm{A}f = 0$, on obtient d'après l'équation (E), pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt - \int_x^{2\pi} \mathrm{e}^{-it/2}\, f(t)\, dt = 0$$

ce qui entraîne $\int_0^x \mathrm{e}^{-it/2} f(t)\,dt = 0$ pour tout x, d'où $\mathrm{e}^{-it/2} f(t)\,dt = 0$ pour presque tout t et donc $f = 0_{\mathrm{H}}$.

2.d. Expliquer pourquoi l'expression

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \,\mathrm{e}^{in(x-t)}$$

définit une fonction $(x,t) \to \mathrm{K}_2(x,t)$ de $\mathrm{L}_2([0,2\pi]^2)$. Comparer $\mathrm{K}(x,t)$ et $\mathrm{K}_2(x,t)$.

Solution. Les fonctions $(x,t) \to \mathrm{e}^{in(x-t)}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux orthogonales dans $\mathrm{L}_2([0,2\pi]^2, dx\,dt)$ et de norme 2π, et les coefficients $c_n = (n - \frac{1}{2})^{-1}$ sont de carré sommable, ce qui implique la convergence de la série en norme L_2 (voir poly, lemme 2.2.4 ou lemme 5.4.5). Soit B l'opérateur sur $\mathrm{L}_2([0,2\pi]^2, dx\,dt)$ dont le noyau est K_2. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on aura

$$(\mathrm{B}e_m)(x) = \int_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \,\mathrm{e}^{in(x-t)}\Bigr) \,\mathrm{e}^{imt} \,dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{inx} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \,\mathrm{e}^{i(m-n)t} \,dt =$$

$$= 2\pi \,\frac{1}{m - \frac{1}{2}} \,\mathrm{e}^{imx} = 2\pi \,(\mathrm{A}e_m)(x).$$

Comme $(e_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H, il en résulte que $\mathrm{B} = 2\pi\mathrm{A}$. Par ailleurs, l'application qui associe un opérateur à un noyau est injective, donc $\mathrm{K}_2 = 2\pi\,\mathrm{K}$ (pour l'injectivité de l'application $\mathrm{L} \to \mathrm{T}_{\mathrm{L}}$, voir le poly, exemples 7.3.2, deuxième exemple, relation $\|\mathrm{L}\|_2^2 = \sum_p \|\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(g_p)\|^2$, qui montre que le noyau L est nul quand l'opérateur associé T_{L} est nul).

En analysant cette relation $\mathrm{K}_2 = 2\pi\,\mathrm{K}$ (prendre la partie réelle), on obtient l'égalité

$$\pi\,|\sin(x/2)| = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \cos(nx)$$

pour tout x réel.