MT404 **Examen partiel du 18 novembre 2000**

durée : 3 heures

Le poly est le seul document autorisé.

Exercice I

Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H ; pour tout $n \geq 0$ on pose

$$x_n = e_{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt{1-4^{-n}}\, e_{2n} + 2^{-n}\, e_{2n+1}.$$

On désigne par X le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par la suite de vecteurs $(x_n)_{n\geq 0}$ et par Y le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

1. Vérifier que (x_n) et (y_n) sont des bases hilbertiennes de X et Y respectivement. Montrer que $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \{0_\mathrm{H}\}$ et que l'adhérence $\overline{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}$ est égale à H.

2. Montrer que la série $\sum_n 2^{-n}\, e_{2n+1}$ converge dans H, mais que sa somme $v = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, e_{2n+1}$ n'appartient pas à $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$. En déduire que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ n'est pas fermé dans H.

Exercice II

Dans cet exercice E désigne l'espace de Banach ℓ_1 des suites réelles $x = (x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

1. On considère les deux formes linéaires v_0^* et v_1^* définies par $v_0^*(x) = x_0$ et $v_1^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}$. Calculer les normes de v_0^* et v_1^* dans E^*.

2. On considère

$$\mathrm{F} = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E} : x_0 = 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 0\}.$$

Vérifier que F est un sous-espace vectoriel fermé de E. Posons $v_0 = (1,-1,0,\ldots)$ et $v_1 = (0,1,0,\ldots,)$. Si $y \in \mathrm{F}$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\|y\|_1 + |\lambda_0| + |\lambda_1| \leq 6\, \|y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1\|_1$$

(indication : calculer $v_j^*(y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1)$, $j = 0, 1$).

3. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_1$; vérifier que $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_1 = \ker v_0^*$. Montrer que l'application linéaire T définie par $\mathrm{T}(y + \lambda\, v_1) = y + \lambda\, v_0$ (pour tous $y \in \mathrm{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$) définit un isomorphisme (d'espaces de Banach) de $\ker v_0^*$ sur $\ker v_1^*$.

Exercice III

Dans cet exercice, E désigne un espace de Banach réel. On dit que $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$ est un *cône* si pour tout $c \in \mathrm{C}$ et tout $\lambda > 0$, on a $\lambda c \in \mathrm{C}$. On suppose que C est un cône convexe fermé non vide contenu dans E, qui vérifie la condition

$$(*) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathrm{C}, \quad \|c_1\| \leq \|c_1 + c_2\|.$$

1. Vérifier que $0_\mathrm{E} \in \mathrm{C}$ et que $\mathrm{C} + \mathrm{C} \subset \mathrm{C}$. Montrer que la fonction q définie sur E par

$$q(x) = d(x, \mathrm{C}) = \inf\{\|x - c\| : c \in \mathrm{C}\}$$

est une fonction sous-linéaire sur E ; vérifier que $q(c) = 0$ pour tout $c \in \mathrm{C}$, et $q(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Montrer en utilisant $(*)$ que $q(-c) = \|c\|$ pour tout $c \in \mathrm{C}$. En déduire que pour tout $c \in \mathrm{C}$ et tout $x \in \mathrm{E}$, on a $\|c\| \leq q(x-c) + \|x\|$.

2. Soit $x^* \in \mathrm{E}^*$ une forme linéaire continue telle que $\|x^*\| \leq 1$; on pose pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$p(x) = \inf\{x^*(c) + q(x-c) : c \in \mathrm{C}\}.$$

Montrer que $-\|x\| \leq p(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$; montrer que p est sous-linéaire. Vérifier que $p(c) \leq 0$, $p(c) \leq x^*(c)$ pour tout $c \in \mathrm{C}$.

3. Montrer que toute forme linéaire continue $x^* \in \mathrm{E}^*$ peut s'écrire $x^* = y_1^* - y_2^*$, où y_1^* et y_2^* sont deux formes linéaires continues sur E, qui prennent des valeurs ≥ 0 en tout point de C.