MT404 **Corrigé de l'examen partiel du 18 novembre 2000**

Exercice I

Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H *; pour tout $n \geq 0$ on pose*

$$x_n = e_{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt{1-4^{-n}}\, e_{2n} + 2^{-n}\, e_{2n+1}.$$

On désigne par X *le sous-espace vectoriel fermé de* H *engendré par la suite de vecteurs $(x_n)_{n\geq 0}$ et par* Y *le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.*

1. Vérifier que (x_n) et (y_n) sont des bases hilbertiennes de X *et* Y *respectivement. Montrer que $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \{0_\mathrm{H}\}$ et que l'adhérence $\overline{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}$ est égale à* H.

Il est tout à fait clair que les vecteurs (x_n) sont deux à deux orthogonaux et de norme un, puisqu'ils sont une sous-suite de la base orthonormée (e_n). Pour les y_n, on voit d'abord que $\|y_n\|^2 = (1-4^{-n}) + (2^{-n})^2 = 1$, et si $m \neq n$, les deux vecteurs e_{2m}, e_{2m+1} sont orthogonaux aux deux vecteurs e_{2n}, e_{2n+1} parce que les ensembles $\{2m, 2m+1\}$ et $\{2n, 2n+1\}$ sont disjoints, donc $\langle y_m, y_n\rangle = 0$. La suite (y_n) est donc elle aussi orthonormée. Dans un espace de Hilbert, toute suite orthonormée est une base hilbertienne de l'espace vectoriel fermé qu'elle engendre.

D'après la théorie générale et la question précédente, tout vecteur x de X est la somme d'une série (convergente dans H) de la forme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ et tout vecteur y est la somme d'une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n y_n$. Calculons la coordonnée c_{2k+1} d'indice impair $2k+1$ du vecteur $x = y \in \mathrm{X}\cap\mathrm{Y}$ dans la base (e_n). On aura

$$c_{2k+1} = \langle x, e_{2k+1}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \langle x_n, e_{2k+1}\rangle = 0$$

puisque $\langle x_n, e_{2k+1}\rangle = 0$ pour tout $n \geq 0$, et

$$c_{2k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \langle y_n, e_{2k+1}\rangle = b_k \langle y_k, e_{2k+1}\rangle = 2^{-k} b_k$$

ce qui montre que $b_k = 0$ pour tout $k \geq 0$, donc $y = 0_\mathrm{H} = x$.

Pour voir que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ est dense dans H on va simplement vérifier que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ contient tous les vecteurs de la base (e_k) de H. En effet, $e_{2n} = x_n \in \mathrm{X}+\mathrm{Y}$ et $e_{2n+1} = 2^n\big(y_n - \sqrt{1-4^{-n}}\, x_n\big) \in \mathrm{X}+\mathrm{Y}$, pour tout $n \geq 0$, ce qui donne bien que tous les vecteurs $(e_k)_{k\geq 0}$ sont dans $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$.

2. Montrer que la série $\sum_n 2^{-n}\, e_{2n+1}$ converge dans H, *mais que sa somme $v = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\, e_{2n+1}$ n'appartient pas à $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$. En déduire que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ n'est pas fermé dans* H.

La série $\sum 2^{-k}\, e_{2k+1}$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet H. Si le vecteur v était dans $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$, on aurait $v = x + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n y_n$. En identifiant comme précédemment la composante $2k+1$ de ce vecteur dans la base (e_n), on trouve que

$$2^{-k} = \langle v, e_{2k+1}\rangle = b_k \langle y_k, e_{2k+1}\rangle = b_k\, 2^{-k}$$

ce qui impose $b_k = 1$ pour tout k ; ceci est impossible, car la série qui définit y ne pourrait pas converger.

Il en résulte que $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ n'est pas fermé : en effet, on a vu à la question précédente qu'il est dense dans H, et à cette question qu'il est distinct de H.

Exercice II

Dans cet exercice E *désigne l'espace de Banach ℓ_1 des suites réelles $x = (x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.*

1. On considère les deux formes linéaires v_0^* et v_1^* définies par $v_0^*(x) = x_0$ et $v_1^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{E}$. Calculer les normes de v_0^* et v_1^* dans E^*.

On a vu en cours, et dans le problème 1 que la norme d'une forme linéaire x^* dans le dual de ℓ_1 est égale à la norme dans ℓ_∞ de la suite scalaire $(x^*(e_n))_{n\geq 0}$, où (e_n) désigne la suite canonique. Pour v_0^*, on a la suite $(1, 0, \dots)$ et pour v_1^* la suite $(1, 1, \dots)$. Ces deux suites sont de norme 1 dans ℓ_∞, donc les deux formes linéaires sont de norme un sur ℓ_1. C'était aussi rapide de le refaire, par exemple pour v_1^* : on a

$$|v_1^*(x)| = \Bigl|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\Bigr| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| = \|x\|_1$$

pour tout $x \in \mathrm{E}$, ce qui montre que $\|v_1^*\| \leq 1$. En considérant le vecteur de norme 1 dans E égal à $e_0 = (1, 0, \dots)$, on a $v_1^*(e_0) = 1$, d'où $\|v_1^*\| = 1$.

2. On considère

$$\mathrm{F} = \{x \in \mathrm{E} : x_0 = 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 0\}.$$

Vérifier que F *est un sous-espace vectoriel fermé de* E. *Posons* $v_0 = (1, -1, 0, \dots)$ *et* $v_1 = (0, 1, 0, \dots,)$. *Si* $y \in \mathrm{F}$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, *montrer que*

$$\|y\|_1 + |\lambda_0| + |\lambda_1| \leq 6\, \|y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1\|_1$$

(indication : calculer $v_j^*(y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1)$, $j = 0, 1$*).*

On voit que F est l'intersection du noyau $\ker v_0^*$ avec le noyau $\ker v_1^*$; c'est donc un sous-espace vectoriel, et il est fermé parce que les deux formes linéaires sont continues. Considérons $x = y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1$, avec $y \in \mathrm{F}$ et λ_1, λ_2 réels. On a $v_j^*(y) = 0$ pour $j = 0, 1$ puisque F est l'intersection des deux noyaux ; on vérifie que $v_j^*(v_i) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker), donc

$$v_0^*(x) = \lambda_0, \quad v_1^*(x) = \lambda_1.$$

Il en résulte que $|\lambda_j| = |v_j^*(x)| \leq \|v_j^*\|\, \|x\|_1 = \|x\|_1$. On voit que $\|v_0\|_1 = 2$ et $\|v_1\|_1 = 1$, donc $\|\lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1\|_1 \leq 3\, \|x\|_1$ et par l'inégalité triangulaire on en déduit que

$$\|y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|\lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1\|_1 \leq 4\, \|x\|_1.$$

Finalement,

$$\|y\|_1 + |\lambda_0| + |\lambda_1| \leq (4 + 1 + 1)\, \|x\|_1 = 6\, \|y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1\|_1.$$

3. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_1$ *; vérifier que* $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_1 = \ker v_0^*$. *Montrer que l'application linéaire* T *définie par* $\mathrm{T}(y + \lambda\, v_1) = y + \lambda\, v_0$ *(pour tous* $y \in \mathrm{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$*) définit un isomorphisme (d'espaces de Banach) de* $\ker v_0^*$ *sur* $\ker v_1^*$.

Pour montrer qu'on a une somme directe (algébrique) il faut montrer l'unicité de la représentation $x = y + \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1$, ce qui revient à prouver que si $0_{\mathrm{E}} = y + \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1$, on a $y = 0_{\mathrm{E}}$ et $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Mais cela résulte clairement de l'inégalité $\|y\|_1 + |\lambda_0| + |\lambda_1| \leq 6\, \|0_{\mathrm{E}}\| = 0$ de la question précédente.

Il faut ensuite montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathbb{R}v_0 + \mathbb{R}v_1$; si $x = y + \lambda_0\, v_0 + \lambda_1\, v_1$, on a vu que nécessairement $\lambda_0 = v_0^*(x) = x_0$ et $\lambda_1 = v_1^*(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Posons donc, pour ces valeurs particulières de λ_0, λ_1

$$y = x - \lambda_0\, v_0 - \lambda_1\, v_1 = (0, -\sum_{n=2}^{+\infty} x_n, x_2, x_3, \dots).$$

On voit facilement que $y \in \mathrm{F}$, donc $x \in \mathrm{F} + \mathbb{R}v_0 + \mathbb{R}v_1$.

Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ker v_0^*$; cela signifie que $x_0 = 0$. Posons $\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ et écrivons $x = (x - \lambda v_1) + \lambda v_1$. On vérifie que $x - \lambda v_1$ est dans F, donc on a prouvé que $\ker v_0^* \subset \mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_1$. Inversement, on voit que F et $\mathbb{R}v_1$ sont contenus dans $\ker v_0^*$, d'où l'égalité $\ker v_0^* = \mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_1$.

Il est clair que l'image de $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_1$ par l'application T est égale à $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_0$. Il nous faut donc vérifier que $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}v_0 = \ker v_1^*$. Soit $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ker v_1^*$; cela signifie que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = 0$. Ecrivons

$x = (x - x_0\, v_0) + x_0\, v_0$. On vérifie que $x - x_0\, v_0$ est dans F, donc on a prouvé que $\ker v_1^* \subset \mathrm{F} \oplus \mathbb{R} v_0$. Inversement, on voit que F et $\mathbb{R} v_0$ sont contenus dans $\ker v_1^*$, d'où l'égalité.

Il reste à voir que T et son inverse sont bornées. Si $x = y + \lambda v_1$, il résulte de la question précédente que $\|y\|_1 + |\lambda| \le 6\, \|x\|_1$, donc

$$\|\mathrm{T}(x)\| \le \|y\|_1 + |\lambda|\, \|v_0\|_1 \le 2\, \big(\|y\|_1 + |\lambda|\big) \le 12\, \|x\|_1$$

ce qui montre que T est bornée ; le raisonnement est identique pour l'application T^{-1}, définie sur $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R} v_0$.

Exercice III

Dans cet exercice, E *désigne un espace de Banach réel. On dit que* $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$ *est un cône si pour tout* $c \in \mathrm{C}$ *et tout* $\lambda > 0$*, on a* $\lambda c \in \mathrm{C}$*. On suppose que* C *est un cône convexe fermé non vide contenu dans* E*, qui vérifie la condition*

$$(*) \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathrm{C}, \quad \|c_1\| \le \|c_1 + c_2\|.$$

1. Vérifier que $0_\mathrm{E} \in \mathrm{C}$ *et que* $\mathrm{C} + \mathrm{C} \subset \mathrm{C}$*. Montrer que la fonction* q *définie sur* E *par*

$$q(x) = d(x, \mathrm{C}) = \inf\{\|x - c\| : c \in \mathrm{C}\}$$

est une fonction sous-linéaire sur E *; vérifier que* $q(c) = 0$ *pour tout* $c \in \mathrm{C}$*,* $q(x) \le \|x\|$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$*. Montrer en utilisant* $(*)$ *que* $q(-c) = \|c\|$ *pour tout* $c \in \mathrm{C}$*. En déduire que pour tout* $c \in \mathrm{C}$ *et tout* $x \in \mathrm{E}$*, on a* $\|c\| \le q(x - c) + \|x\|$*.*

Puisque C est non vide, on peut trouver $c_0 \in \mathrm{C}$, et alors C contient tous les vecteurs $\lambda\, c_0$, pour $\lambda > 0$ tendant vers 0 ; puisque C est fermé, C contient $0_\mathrm{E} = \lim_{\lambda \to 0} \lambda\, c_0$. Si $c_1, c_2 \in \mathrm{C}$ on aura $c_1 + c_2 = 2(\frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2) \in \mathrm{C}$, en utilisant la convexité (qui implique $\frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2 \in \mathrm{C}$) et la propriété de cône.

Montrons que $q(tx) = tq(x)$ pour tout $t \ge 0$. Si $t = 0$, alors $tx = 0_\mathrm{E} \in \mathrm{C}$, donc $q(0_\mathrm{E}) = 0 = tq(x)$. Supposons $t > 0$; pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $c \in \mathrm{C}$ tel que $\|x - c\| < q(x) + \varepsilon$; puisque $tc \in \mathrm{C}$, il en résulte que $q(tx) \le \|tx - tc\| < t(q(x) + \varepsilon)$ d'où $q(tx) \le t\, q(x)$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. En faisant de même avec $t' = t^{-1}$ et $x' = tx$ on déduit que $q(t^{-1} tx) \le t^{-1} q(tx)$, donc $q(tx) = t\, q(x)$.

Si $q(x_j) \sim \|x_j - c_j\|$, avec $c_j \in \mathrm{C}$ pour $j = 1, 2$, disons $\|x_j - c_j\| \le q(x_j) + \varepsilon/2$, on aura que $c_1 + c_2 \in \mathrm{C}$ donc $q(x_1 + x_2) \le \|(x_1 + x_2) - (c_1 + c_2)\| \le \|x_1 - c_1\| + \|x_2 - c_2\| < q(x_1) + q(x_2) + \varepsilon$. On a vérifié que q est sous-linéaire.

Si $x = c' \in \mathrm{C}$, on a $q(c') \le \|c' - c'\| = 0$ en prenant $c = c'$ dans l'inf ; puisque $0_\mathrm{E} \in \mathrm{C}$, on a $q(x) \le \|x - 0_\mathrm{E}\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Si $-x = c' \in \mathrm{C}$, on a $\|-c' - c\| \ge \|c'\|$ pour tout $c \in \mathrm{C}$ d'après $(*)$, ce qui donne $q(-c') \ge \|c'\|$, donc $q(-c') = \|c'\|$.

On écrit alors pour $c \in \mathrm{C}$ et x quelconque

$$\|c\| = q(-c) = q(x - c + (-x)) \le q(x - c) + q(-x) \le q(x - c) + \|x\|.$$

2. Soit $x^* \in \mathrm{E}^*$ *une forme linéaire continue telle que* $\|x^*\| \le 1$ *; on pose pour tout* $x \in \mathrm{E}$

$$p(x) = \inf\{x^*(c) + q(x - c) : c \in \mathrm{C}\}.$$

Montrer que $-\|x\| \le p(x) \le \|x\|$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *; montrer que* p *est sous-linéaire. Vérifier que* $p(c) \le 0$*,* $p(c) \le x^*(c)$ *pour tout* $c \in \mathrm{C}$*.*

On a $x^*(c) \ge -\|c\|$, donc $x^*(c) + q(x - c) \ge q(x - c) - \|c\| \ge -\|x\|$ d'après la question précédente. Ceci montre en particulier que $p(x) > -\infty$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. En choisissant $c = 0_\mathrm{E}$ on trouve $p(x) \le q(x) \le \|x\|$.

On voit que p est sous-linéaire : si $p(x_j) \sim x^*(c_j) + q(x - c_j)$ pour $j = 1, 2$ on aura $p(x_1 + x_2) \le x^*(c_1 + c_2) + q\big((x_1 + x_2) - (c_1 + c_2)\big) \le \big(x^*(c_1) + q(x_1 - c_1)\big) + \big(x^*(c_2) + q(x_2 - c_2)\big) \le p(x_1) + p(x_2) + \varepsilon$. Le fait que $p(tx) = tp(x)$ pour $t \ge 0$ est facile.

Lorsque $x = c' \in \mathrm{C}$, on peut prendre $c = 0_\mathrm{E}$ dans l'inf pour obtenir $p(c') \le x^*(0_\mathrm{E}) + q(c') = q(c') \le 0$ d'après la question précédente, ou bien prendre $c = c'$ pour obtenir $p(c') \le x^*(c') + q(0) = x^*(c')$.

3. Montrer que toute forme linéaire continue $x^* \in \mathrm{E}^*$ peut s'écrire $x^* = y_1^* - y_2^*$, où y_1^* et y_2^* sont deux formes linéaires continues sur E, *qui prennent des valeurs ≥ 0 en tout point de* C.

On peut supposer $\|x^*\| \leq 1$ sans perdre de généralité, et construire la fonction sous-linéaire p de la question précédente. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire z^* telle que $z^* \leq p$ sur E. On a $z^*(x) \leq p(x) \leq \|x\|$ pour tout x, ce qui implique aussi $|z^*(x)| \leq \|x\|$ pour tout x (appliquer à $-x$) et montre que z^* est continue. D'autre part, $z^*(c) \leq p(c) \leq 0$ pour tout $c \in \mathrm{C}$ montre que z^* est ≤ 0 sur C, et $z^*(c) \leq p(c) \leq x^*(c)$ pour tout $c \in \mathrm{C}$ montre que $x^* - z^*$ est ≥ 0 sur C. Pour finir il suffit de poser $y_2^* = -z^*$ et $y_1^* = x^* - z^*$.