MT404 **Examen du 12 Septembre 2001**

durée : 3 heures

Le poly est le seul document autorisé.

Exercice I

1. On considère l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum |x_n|^2 < +\infty$. On suppose donnée une suite bornée $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de scalaires et on pose pour tout $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})$

$$\mathrm{T}(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \ldots)$$

c'est à dire que la suite $y = \mathrm{T}(x)$ admet les coordonnées $y_n = \alpha_{n+1} x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1.a. Montrer que T définit une application linéaire continue de $\ell_2(\mathbb{N})$ dans $\ell_2(\mathbb{N})$ si et seulement si la suite (α_n) est bornée.

On suppose (α_n) bornée dans la suite de l'exercice.

1.b. Exprimer la norme de T. Déterminer l'adjoint T^*.

1.c. Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2. Dans cette partie de l'exercice on suppose que $\alpha_n = 1$ si n est pair et $\alpha_n = 2$ si n est impair.

2.a. Calculer T^2, puis calculer T^k pour tout entier $k \geq 1$. Déterminer le rayon spectral de T.

2.b. Montrer que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \sqrt{2}$ est valeur propre de T. Quel est le spectre de l'opérateur T ? Déterminer le spectre continu $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$.

3. Dans cette partie on suppose que $\alpha_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$.

3.a. Déterminer le spectre de T.

Exercice II

1. On considère un espace de Hilbert complexe H et un opérateur hermitien positif $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, tel que $\|\mathrm{B}\| = 1$. On pourra répondre à certaines questions en citant des résultats précis du cours.

1.a. Montrer que le spectre de B est contenu dans $[0, 1]$. Donner un exemple où $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = [0, 1]$.

1.b. Montrer que l'opérateur B est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [\varepsilon, 1]$. Montrer que si B est inversible, alors $\|\mathrm{Id}_\mathrm{H} - \mathrm{B}\| < 1$.

2. On désigne par A une algèbre de Banach unitaire complexe dont l'unité est notée 1_A ; on rappelle que $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ pour tous $x, y \in \mathrm{A}$, et $\|1_\mathrm{A}\| = 1$. A tout élément $a \in \mathrm{A}$ on associe deux applications linéaires D_a et G_a de A dans A, définies par

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{D}_a(x) = x\,a, \quad \mathrm{G}_a(x) = a\,x.$$

2.a. Vérifier que D_a et G_a sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{A})$, et calculer leurs normes.

2.b. Pour tout $a \in \mathrm{A}$ on pose $\mathrm{L}_a = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_a + \mathrm{G}_a)$. Déterminer L_a lorsque $a = 1_\mathrm{A}$, puis comparer L_a et L_b quand $a + b = 1_\mathrm{A}$. Montrer que L_b est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{A})$ lorsque $b = 1_\mathrm{A} - a$ et $\|a\| < 1$.

2.c. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ un opérateur hermitien positif de norme 1, inversible. Montrer que pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ il existe $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ unique tel que $\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{BS} + \mathrm{SB})$.

2.d. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels positifs telle que $\inf_{n\geq 0} \lambda_n > 0$; montrer que pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ il existe $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ unique tel que $\langle \mathrm{S}(e_m), e_n\rangle = (\lambda_m + \lambda_n)^{-1} \langle \mathrm{T}(e_m), e_n\rangle$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

2.e. Vérifier que D_a et G_a commutent pour tout $a \in \mathrm{A}$. Montrer que L_b est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{A})$ lorsque $b = 1_\mathrm{A} - a$ et $\mathrm{Sp}(a) = \{0\}$.