MT404 **Corrigé de l'examen du 12 Septembre 2001**

Exercice I

1. On considère l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum |x_n|^2 < +\infty$. On suppose donnée une suite bornée $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de scalaires et on pose pour tout $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})$

$$\mathrm{T}(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \ldots)$$

c'est à dire que la suite $y = \mathrm{T}(x)$ admet les coordonnées $y_n = \alpha_{n+1} x_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1.a. Montrer que T définit une application linéaire continue de $\ell_2(\mathbb{N})$ dans $\ell_2(\mathbb{N})$ si et seulement si la suite (α_n) est bornée.

Solution. Supposons d'abord que T soit bornée de $\ell_2(\mathbb{N})$ dans $\ell_2(\mathbb{N})$, de norme $\|\mathrm{T}\|$. Désignons par $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base hilbertienne canonique de $\ell_2(\mathbb{N})$. On vérifie que $\mathrm{T}(\mathbf{e}_{n+1}) = \alpha_{n+1}\,\mathbf{e}_n$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$|\alpha_{n+1}| = \|\alpha_{n+1}\,\mathbf{e}_n\| = \|\mathrm{T}(\mathbf{e}_{n+1})\| \leq \|\mathrm{T}\|\,\|\mathbf{e}_{n+1}\| = \|\mathrm{T}\|$$

ce qui montre que $\mathrm{S} = \sup_{m\geq 1} |\alpha_m| \leq \|\mathrm{T}\|$ est fini. Inversement si S est fini on écrit

$$\forall x \in \ell_2(\mathbb{N}), \quad \|\mathrm{T}(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{n+1} x_{n+1}|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{S}^2 |x_{n+1}|^2 \leq \mathrm{S}^2\,\|x\|^2$$

donc $\|\mathrm{T}\| \leq \mathrm{S}$. On voit en fait qu'on a déjà répondu à la question suivante sur le calcul de la norme de T : on a trouvé que $\|\mathrm{T}\| = \sup_{m\geq 1} |\alpha_m|$.

On suppose (α_n) bornée dans la suite de l'exercice.

1.b. Exprimer la norme de T. Déterminer l'adjoint T^*.

Solution. On a déjà calculé la norme de T. Pour le calcul de l'adjoint on écrit, pour y fixé

$$\forall x \in \ell_2(\mathbb{N}), \quad \langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \sum_{n\geq 0} \alpha_{n+1} x_{n+1} \overline{y_n} = 0 + \sum_{n\geq 1} x_n \overline{\overline{\alpha}_n y_{n-1}} = \langle x, z\rangle$$

si on a posé $z = (0, \overline{\alpha}_1 y_0, \overline{\alpha}_2 y_1, \ldots)$. Donc, si $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$ on a

$$\mathrm{T}^*(y) = (0, \overline{\alpha}_1 y_0, \overline{\alpha}_2 y_1, \ldots).$$

1.c. Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Solution. Si (α_n) tend vers 0 on montre que T est limite en norme d'opérateurs de rang fini (voir poly, exemples 7.1.2) : pour tout $n \geq 0$ on définit un opérateur borné T_n par

$$\forall x \in \ell_2(\mathbb{N}), \quad \mathrm{T}_n(x) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, 0, 0, \ldots)\,;$$

cet opérateur est de rang fini $\leq n$, et on montre en imitant la solution de la question *1.a.* que $\|\mathrm{T} - \mathrm{T}_n\| \leq \sup_{k>n} |\alpha_k|$, quantité qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, puisque $\lim_n \alpha_n = 0$.

Si (α_n) ne tend pas vers 0 il existe un nombre $\delta > 0$ et un sous-ensemble infini $\mathrm{M} \subset \mathbb{N}$ tels que $|\alpha_{m+1}| \geq \delta$ pour tout $m \in \mathrm{M}$. Les images $\mathrm{T}(\mathbf{e}_{m+1})$, $m \in \mathrm{M}$, forment un ensemble infini de points à distances mutuelles $\geq \delta$, ce qui interdit la compacité de l'image par T de la boule unité ; en effet, puisque $\mathrm{T}(\mathbf{e}_{m+1}) = \alpha_{m+1}\mathbf{e}_m$, on a pour $m_1, m_2 \in \mathrm{M}$ et $m_1 \neq m_2$

$$\|\mathrm{T}(\mathbf{e}_{m_1+1}) - \mathrm{T}(\mathbf{e}_{m_2+1})\|^2 = |\alpha_{m_1+1}|^2 + |\alpha_{m_2+1}|^2 \geq 2\delta^2.$$

2. Dans cette partie de l'exercice on suppose que $\alpha_n = 1$ si n est pair et $\alpha_n = 2$ si n est impair.

2.a. Calculer T^2*, puis calculer* T^k *pour tout entier* $k \geq 1$*. Déterminer le rayon spectral de* T.

Solution. On a ici quand $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$

$$\mathrm{T}(x) = (2x_1, x_2, 2x_3, x_4, \ldots)$$

donc

$$\mathrm{T}^2(x) = (2x_2, 2x_3, 2x_4, 2x_5, \ldots).$$

On voit que $\mathrm{T}^2 = 2(\mathrm{S}^*)^2$ où S^* est le shift à gauche. On aura donc $\mathrm{T}^{2\ell} = 2^\ell (\mathrm{S}^*)^{2\ell}$, et $\mathrm{T}^{2\ell+1} = 2^\ell (\mathrm{S}^*)^{2\ell}\mathrm{T}$; comme toutes les puissances du shift à gauche sont de norme 1, on en déduit que $\|\mathrm{T}^{2\ell}\| = 2^\ell$ et $\rho(\mathrm{T}) = \lim_k \|\mathrm{T}^k\|^{1/k} = \sqrt{2}$.

2.b. Montrer que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $|\lambda| < \sqrt{2}$ *est valeur propre de* T*. Quel est le spectre de l'opérateur* T *? Déterminer le spectre continu* $\mathrm{Sp}_c(\mathrm{T})$*.*

Solution. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et si une suite numérique x vérifie la relation $\mathrm{T}(x) = \lambda x$, on voit que nécessairement

$$x = (x_0, \lambda x_0/2, \lambda^2 x_0/2, \lambda^3 x_0/4, \lambda^4 x_0/4, \ldots)$$

c'est à dire que les coordonnées de x sont données par $x_{2p} = \lambda^{2p} x_0/2^p$ et $x_{2p+1} = \lambda^{2p+1} x_0/2^{p+1}$ pour tout $p \geq 0$; pour avoir un vecteur propre de T, considéré comme opérateur borné sur $\ell_2(\mathbb{N})$, il faut que $x_0 \neq 0$ (sinon $x = 0$ n'est pas vecteur propre), et ensuite que $x \in \ell_2(\mathbb{N})$. Si $|\lambda| \geq \sqrt{2}$, la suite des coordonnées du candidat x ne tend pas vers 0, donc il n'y a pas de vecteur propre de T pour ces valeurs. Si $|\lambda| < \sqrt{2}$, on trouve un vecteur propre

$$x_\lambda = (1, \lambda/2, \lambda^2/2, \lambda^3/4, \lambda^4/4, \ldots)$$

qui est bien dans ℓ_2. Le spectre est fermé, contenu dans le disque fermé de rayon $\rho(\mathrm{T}) = \sqrt{2}$, et contient le disque ouvert du même rayon : on en déduit que le spectre est égal au disque fermé de rayon $\sqrt{2}$ (centré à l'origine, bien entendu). Puisque le spectre ponctuel de T est égal au disque ouvert de même rayon, le spectre continu est contenu dans le cercle de rayon $\sqrt{2}$; mais on voit qu'aucun point du cercle de rayon $\sqrt{2}$ ne donne de valeur propre pour T^* (ou pour T), et on conclut que le spectre continu est égal au cercle de rayon $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{C}$.

Vérifions que T^* n'a pas de vecteur propre : si $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{T}^*(x) = \lambda x$, l'égalité

$$(0, \overline{\alpha}_1 x_0, \overline{\alpha}_2 x_1, \ldots) = (\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$$

donne $x_0 = 0$, puis $x_n = 0$ pour tout n par récurrence, donc $x = 0$, qui n'est pas un vecteur propre ; si $\lambda = 0$, on aura $\mathrm{T}^*(x) = 0$, ce qui entraîne à nouveau $x = 0$ dans le cas présent, car tous les coefficients α_n sont $\neq 0$.

3. Dans cette partie on suppose que $\alpha_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$.

3.a. Déterminer le spectre de T*.*

Solution. On trouve ici pour tout $k \geq 1$ et $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})$

$$\mathrm{T}^k(x) = \Bigl(\frac{x_k}{1.2.\ldots.k}, \frac{x_{k+1}}{2.3.\ldots.(k+1)}, \ldots, \frac{x_{k+n}}{(1+n).(2+n).\ldots.(k+n)}, \ldots\Bigr).$$

On en déduit en imitant la solution de la question *1.a.* que la norme de T^k est égale au sup pour $n \geq 1$ des coefficients $\beta_n = \bigl(n(1+n)\ldots(k-1+n)\bigr)^{-1}$; on voit que ce sup est égal à β_1, donc $\|\mathrm{T}^k\| = (k!)^{-1}$ et $\rho(\mathrm{T}) = \lim (k!)^{-1/k} = 0$, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{0\}$.

Exercice II

1. On considère un espace de Hilbert complexe H *et un opérateur hermitien positif* $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$*, tel que* $\|\mathrm{B}\| = 1$*. On pourra répondre à certaines questions en citant des résultats précis du cours.*

1.a. Montrer que le spectre de B *est contenu dans* $[0, 1]$*. Donner un exemple où* $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = [0, 1]$*.*

Solution. D'après le cours, on a $\rho(\mathrm{B}) = \|\mathrm{B}\| = 1$ parce que B est normal (poly, proposition 6.2.3), $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [0, +\infty[$ parce que B est hermitien positif (poly, proposition 6.3.10). Il en résulte que $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [0, 1]$.

La multiplication par $t \to t$ dans $\mathrm{L}_2(0, 1)$ est un exemple d'opérateur B hermitien, positif et de norme 1 pour lequel $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) = [0, 1]$.

1.b. Montrer que l'opérateur B *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *si et seulement s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [\varepsilon, 1]$*. Montrer que si* B *est inversible, alors* $\| \mathrm{Id_H} - \mathrm{B}\| < 1$*.*

Solution. Si B est inversible, la valeur $\lambda = 0$ n'est pas dans le spectre ; comme le complémentaire du spectre est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $] -\varepsilon, \varepsilon[$ soit contenu dans le complémentaire du spectre, ce qui revient à dire que le spectre est contenu dans $[\varepsilon, 1]$ (compte tenu de la première information $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [0, 1]$). Si $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [\varepsilon, 1]$ pour un $\varepsilon > 0$, on voit que 0 n'est pas dans le spectre, ce qui signifie que B est inversible.

Si B est inversible, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset [\varepsilon, 1]$ pour un $\varepsilon > 0$, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{Id_H} - \mathrm{B}) \subset [0, 1-\varepsilon]$ et puisque $\mathrm{Id_H} - \mathrm{B}$ est normal, $\| \mathrm{Id_H} - \mathrm{B}\| = \rho(\mathrm{Id_H} - \mathrm{B}) \le 1 - \varepsilon < 1$.

2. On désigne par A *une algèbre de Banach unitaire complexe dont l'unité est notée* 1_A *; on rappelle que* $\|xy\| \le \|x\| \, \|y\|$ *pour tous* $x, y \in \mathrm{A}$*, et* $\|1_\mathrm{A}\| = 1$*. A tout élément* $a \in \mathrm{A}$ *on associe deux applications linéaires* D_a *et* G_a *de* A *dans* A*, définies par*

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{D}_a(x) = x\, a, \quad \mathrm{G}_a(x) = a\, x.$$

2.a. Vérifier que D_a *et* G_a *sont des éléments de* $\mathcal{L}(\mathrm{A})$*, et calculer leurs normes.*

Solution. On a $\|ax\| \le \|a\| \, \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, donc $\|\mathrm{G}_a\| \le 1$. Si $x = 1_\mathrm{A}$, on a $\|a\| = \|\mathrm{G}_a(1_\mathrm{A})\| \le \|\mathrm{G}_a\| \, \|1_\mathrm{A}\| = \|\mathrm{G}_a\|$ qui permet de conclure que $\|\mathrm{G}_a\| = \|a\|$. Des calculs analogues marchent aussi pour montrer que $\|\mathrm{D}_a\| = \|a\|$.

2.b. Pour tout $a \in \mathrm{A}$ *on pose* $\mathrm{L}_a = \frac{1}{2}(\mathrm{D}_a + \mathrm{G}_a)$*. Déterminer* L_a *lorsque* $a = 1_\mathrm{A}$*, puis comparer* L_a *et* L_b *quand* $a + b = 1_\mathrm{A}$*. Montrer que* L_b *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{A})$ *lorsque* $b = 1_\mathrm{A} - a$ *et* $\|a\| < 1$*.*

Solution. Lorsque $a = 1_\mathrm{A}$ on a $\mathrm{L}_a(x) = \frac{1}{2}\,(1_\mathrm{A} x + x 1_\mathrm{A}) = x$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, donc $\mathrm{L}_{1_\mathrm{A}} = \mathrm{Id_A}$. Par ailleurs, $\mathrm{L}_a + \mathrm{L}_b = \mathrm{L}_{a+b}$, puisque

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad 2\,(\mathrm{L}_a + \mathrm{L}_b)(x) = (xa + ax) + (xb + bx) = x(a + b) + (a + b)x.$$

On en déduit que $\mathrm{L}_a + \mathrm{L}_b = \mathrm{Id_A}$ lorsque $a + b = 1_\mathrm{A}$.

Si $\|a\| < 1$, on aura $\|\mathrm{L}_a\| \le \frac{1}{2}(\|\mathrm{G}_a\| + \|\mathrm{D}_a\|) = \|a\| < 1$, donc $\mathrm{L}_b = \mathrm{Id_A} - \mathrm{L}_a$ est inversible dans ce cas (poly, lemme 6.1.1).

2.c. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur hermitien positif de norme* 1*, inversible. Montrer que pour tout* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *il existe* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *unique tel que* $\mathrm{T} = \frac{1}{2}(\mathrm{BS} + \mathrm{SB})$*.*

Solution. On applique le résultat de la question précédente à l'algèbre $\mathrm{A} = \mathcal{L}(\mathrm{H})$. On a ici $1_\mathrm{A} = \mathrm{Id_H}$, et on a vu à la question *1.b.* que $b = \mathrm{B}$ vérifie $\| \mathrm{Id_H} - \mathrm{B}\| = \|1_\mathrm{A} - b\| < 1$. D'après la question précédente, l'opérateur $\mathrm{L_B} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathrm{H}))$ est une bijection de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$; pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ il existe donc $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ unique tel que $\mathrm{L_B}(\mathrm{S}) = \mathrm{T}$, c'est à dire $\frac{1}{2}(\mathrm{BS} + \mathrm{SB}) = \mathrm{T}$.

2.d. Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels positifs telle que $\inf_{n\geq 0}\lambda_n > 0$; montrer que pour tout $\mathrm{T}\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ il existe $\mathrm{S}\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ unique tel que $\langle \mathrm{S}(e_m), e_n\rangle = (\lambda_m+\lambda_n)^{-1}\,\langle \mathrm{T}(e_m), e_n\rangle$ pour tous $m,n\in\mathbb{N}$.

Solution. Posons $\mu = \sup_n \lambda_n > 0$, puis $\mu_n = \lambda_n/\mu$ pour tout $n\geq 0$. La suite (μ_n) est réelle positive bornée, $\inf_n \mu_n > 0$ et $\sup_n \mu_n = 1$. Alors l'opérateur (diagonal dans la base (e_n) donnée) $\mathrm{B}\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\mathrm{B}(e_n) = \mu_n\, e_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ est hermitien positif, de norme 1 et inversible. Il suffit de voir que l'opérateur S cherché est un multiple de l'unique S_1 fourni par la question précédente, tel que $\frac{1}{2}(\mathrm{BS}_1+\mathrm{S}_1\mathrm{B}) = \mathrm{T}$. On a en effet pour tous $m,n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}2\,\langle \mathrm{T}(e_m), e_n\rangle &= \langle (\mathrm{BS}_1+\mathrm{S}_1\mathrm{B})(e_m), e_n\rangle\\ &= \langle \mathrm{S}_1(e_m), \mathrm{B}(e_n)\rangle + \langle (\mathrm{S}_1(\mathrm{B}(e_m)), e_n\rangle\\ &= (\mu_n+\mu_m)\langle \mathrm{S}_1(e_m), e_n\rangle\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathrm{S} = \frac{1}{2\mu}\,\mathrm{S}_1$ est solution pour cette question. La solution est unique, parce qu'un opérateur $\mathrm{V}\in\mathcal{L}(\mathrm{H})$ tel que $\langle \mathrm{V}(e_m), e_n\rangle = 0$ pour tous $m,n\in\mathbb{N}$ vérifie d'abord $\mathrm{V}(e_m) = 0$ pour tout m, puis $\mathrm{V} = 0$.

2.e. Vérifier que D_a et G_a commutent pour tout $a\in\mathrm{A}$. Montrer que L_b est inversible dans $\mathcal{L}(\mathrm{A})$ lorsque $b = 1_{\mathrm{A}} - a$ et $\mathrm{Sp}(a) = \{0\}$.

Solution.

$$\forall x\in\mathrm{A},\quad \mathrm{D}_a\circ\mathrm{G}_a(x) = \mathrm{D}_a(ax) = axa = \mathrm{G}_a\circ\mathrm{D}_a(x).$$

Il en résulte en appliquant la formule du binôme que

$$\mathrm{L}_a^k = 2^{-k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\mathrm{D}_a^{k-p}\mathrm{G}_a^p.$$

Puisque $\mathrm{Sp}(a) = \{0\}$, on a $0 = \rho(a) = \lim_k \|a^k\|^{1/k}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on aura $\|a^p\|\leq\varepsilon^p$ pour $p\geq p_0 = p_0(\varepsilon)$. De plus $\mathrm{D}_a^p = \mathrm{D}_{a^p}$ donc $\|\mathrm{D}_a^p\| = \|a^p\|$; on a par conséquent

$$\|\mathrm{L}_a^k\|\leq 2^{-k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\|a^{k-p}\|\,\|a^p\|.$$

Supposons $k > 2p_0$; si p est tel que $k-p\geq p_0$ et $p\geq p_0$, alors $\|a^{k-p}\|\,\|a^p\|\leq\varepsilon^{k-p}\varepsilon^p = \varepsilon^k$; sinon, si $0\leq p < p_0$, on a $k-p\geq p_0$ et on peut écrire

$$\|a^{k-p}\|\,\|a^p\|\leq\varepsilon^{k-p}\|a\|^p = \big(\|a\|/\varepsilon\big)^p\,\varepsilon^k\leq\mathrm{M}^{p_0}\,\varepsilon^k$$

où $\mathrm{M} = \max(1, \|a\|/\varepsilon)$. On procède de même pour $k-p < p_0$, et on voit que $\|a^{k-p}\|\,\|a^p\|\leq\mathrm{M}^{p_0}\,\varepsilon^k$ pour toutes les valeurs de p entre 0 et k, donc

$$\|\mathrm{L}_a^k\|\leq\Big(2^{-k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\Big)\,\mathrm{M}^{p_0}\,\varepsilon^k = \mathrm{M}^{p_0}\,\varepsilon^k$$

ce qui donne une limite $\leq\varepsilon$ pour les puissances $1/k$. Il en résulte que $\rho(\mathrm{L}_a) = 0$, ce qui entraîne que $\mathrm{L}_b = \mathrm{Id}-\mathrm{L}_a$ est inversible.