MT404. Théorème de Banach-Alaoglu novembre 2001

On va commencer par rappeler les définitions de base concernant la compacité. Pour montrer qu'un espace topologique séparé S est compact, on doit montrer que toute famille d'ouverts de S dont la réunion est égale à S possède une sous-famille finie qui recouvre encore l'ensemble S, ou bien en passant aux fermés on doit montrer que :

si une famille de fermés de S *est telle que toute sous-famille finie d'entre eux a une intersection non vide, alors l'intersection de toute la famille est non vide.*

On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble a la *propriété d'intersection finie* si $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est non vide, pour toute famille finie $F_1, \ldots, F_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$. Un espace topologique séparé S est donc compact si et seulement si *toute famille de fermés de* S *avec la propriété d'intersection finie a une intersection non vide.*

Si $\mathcal{F}$ a la propriété d'intersection finie, on peut considérer la nouvelle famille $\mathcal{F}_1$ formée de toutes les intersections finies $F_J = F_1 \cap \ldots \cap F_n$, où $J = \{F_1, \ldots, F_n\}$ varie dans l'ensemble des sous-familles finies de $\mathcal{F}$. Chaque ensemble F_J est non vide puisque $\mathcal{F}$ a la propriété d'intersection finie, et la nouvelle famille $\mathcal{F}_1$ est stable par intersection finie, puisque $F_{J_1} \cap F_{J_2} = F_{J_1 \cup J_2}$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ a une intersection non vide équivaut à montrer que $\mathcal{F}_1$ a une intersection non vide. En résumé :

pour montrer que S *est compact, il faut montrer que toute famille* $\mathcal{F}$ *de fermés non vides de* S*, stable par intersection finie, possède une intersection non vide.*

Supposons donnée une famille $(Z_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles *non vides* d'un compact K telle que pour tous $i, j \in I$, l'intersection $Z_i \cap Z_j$ contienne toujours un autre ensemble Z_k de la famille ; il est alors clair que la famille des adhérences $(\overline{Z_i})_{i \in I}$ forme une famille avec la propriété d'intersection finie, puisqu'en raisonnant de proche en proche on voit que

$$\bigcap_{j=1}^{n} \overline{Z_{i_j}} \supset \bigcap_{j=1}^{n} Z_{i_j}$$

contient un ensemble Z_k de la famille, et que chaque Z_k est non vide par hypothèse. Il en résulte par compacité de K que l'intersection de la famille des adhérences est non vide. On dit qu'une famille $(Z_i)_{i \in I}$ avec la propriété précédente (c'est à dire : chaque intersection $Z_i \cap Z_j$ de deux éléments de la famille contient un autre ensemble Z_k de la famille) est une famille *filtrante décroissante.*

Retenons donc : si K est compact et si $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante décroissante de sous-ensembles non vides de K, l'intersection des adhérences $\overline{Z_i}$ est non vide,

$$(f) \qquad \bigcap_{i \in I} \overline{Z_i} \neq \emptyset.$$

Soit X un espace normé ; on rappelle qu'un sous-ensemble V du dual X^* est un voisinage $*$-faible d'un élément $x^* \in X^*$ s'il existe un sous-ensemble fini A de X et un réel $\varepsilon > 0$ tels que le $*$-voisinage élémentaire $W_{A,\varepsilon}$ de x^* défini par

$$W_{A,\varepsilon} = \{y^* \in X^* : \forall y \in A,\ |y^*(y) - x^*(y)| < \varepsilon\}$$

soit contenu dans V : toutes les formes linéaires continues y^* qui sont suffisamment proches de x^* sur l'ensemble fini A restent dans l'ensemble V.

Théorème. *Si* X *est un espace vectoriel normé, la boule unité fermée du dual* X^* *est compacte pour la topologie* $*$*-faible.*

Démonstration. On désigne par $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles non vides, $*$-faiblement fermés de la boule unité B_{X^*}, famille stable par intersection finie. L'objectif est de trouver un point $x_0^* \in X^*$ commun à tous les ensembles $F \in \mathcal{F}$. La stratégie employée ci-dessous est de définir cette forme linéaire x_0^* "petit à petit" comme dans la démonstration du théorème de prolongement de Hahn-Banach.

Si on sait qu'il existe un élément x_0^* dans l'intersection de tous les ensembles $F \in \mathcal{F}$, si Y est un sous-espace vectoriel de X et si ℓ est la restriction de x_0^* au sous-espace Y, la condition suivante est évidemment vérifiée : pour tout sous-ensemble fini A de Y, tout ensemble $F \in \mathcal{F}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in F$ telle que $|\ell(y) - x^*(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in A$; en effet, il suffit de prendre $x^* = x_0^*$, qui est bien dans F puisqu'il est dans tous les ensembles de la famille $\mathcal{F}$, et qui réalise l'approximation voulue puisqu'il y a en fait égalité. Pour montrer l'existence de x_0^* en le construisant pas à pas, nous allons partir de cette condition nécessaire vérifiée par les restrictions ℓ.

On dira qu'un couple (Y, ℓ) d'un sous-espace vectoriel Y de X et d'une forme linéaire ℓ sur Y est *permis* si pour tout sous-ensemble fini A de Y, tout ensemble $F \in \mathcal{F}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in F$ telle que $|\ell(y) - x^*(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in A$. Puisque $F \subset B_{X^*}$, il en résulte pour tout $y \in Y$ (en appliquant à $A = \{y\}$) que $|\ell(y)| \le |x^*(y)| + \varepsilon \le \|y\| + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $|\ell(y)| \le \|y\|$ pour tout $y \in Y$.

On veut s'inspirer de la démonstration du théorème de prolongement de Hahn-Banach pour montrer qu'on peut définir de proche en proche des couples permis, dont l'ensemble de définition Y finira par être égal à X, en utilisant Zorn. Le pas crucial est de gagner une dimension. On commence avec $Y_0 = \{0\}$ et $\ell_0 = 0$.

Si on veut ajouter à Y un vecteur $x \notin Y$ pour trouver un nouveau couple permis (Y_1, ℓ_1) qui prolonge (Y, ℓ), avec $Y_1 = Y + \mathbb{K}x$, il faut définir $\ell_1(x) = \lambda$ de façon que la condition "couple permis" de (Y_1, ℓ_1) soit satisfaite, au moins pour les ensembles finis de Y_1 de la forme $A_1 = A \cup \{x\}$, $A \subset Y$. C'est ce qui guide les lignes qui suivent. De plus, par linéarité, la valeur λ au point x déterminera complètement le prolongement linéaire ℓ_1 sur Y_1, et il restera encore à vérifier la condition "couple permis" sur les ensembles finis A_1 quelconques de Y_1.

Considérons l'ensemble d'indices $I = \mathcal{P}_f(Y) \times \mathcal{F} \times]0, +\infty[$, où $\mathcal{P}_f(Y)$ désigne l'ensemble des parties finies de Y. Pour tout triplet $i = (A, F, \varepsilon)$ où A est un sous-ensemble fini de Y, $F \in \mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$Z_i = Z_{A,F,\varepsilon} = \{\mu \in \mathbb{K} : \mu = x^*(x),\ x^* \in F,\ |x^* - \ell| < \varepsilon \text{ sur } A\} \subset \mathbb{K}$$

est non vide parce que (Y, ℓ) est permis, et la famille des (Z_i) est filtrante décroissante,

$$Z_{A_1 \cup A_2, F_1 \cap F_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \subset Z_{A_1, F_1, \varepsilon_1} \cap Z_{A_2, F_2, \varepsilon_2}.$$

Par compacité de la boule de rayon $\|x\|$ dans $\mathbb{K}$, il existe un point $\lambda \in \mathbb{K}$ commun à toutes les adhérences des Z_i. On pose alors $\ell_1(x) = \lambda$, et on vérifie ensuite que ℓ_1 définie sur $Y_1 = Y + \mathbb{K}x$ par $\ell_1(y + t\,x) = \ell(y) + t\,\lambda$ est permise. En effet, soient $A_1 = \{y_1 + t_1 x, \ldots, y_n + t_n x\}$ un sous-ensemble fini de Y_1, $F \in \mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$; on pose $A = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $T = \max(|t_i| : i = 1, \ldots, n)$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon\,(1 + T)^{-1}$. On a choisi λ de façon qu'il existe $x^* \in F$ tel que $|\lambda - x^*(x)| < \varepsilon_1$ et $|x^*(y_j) - \ell(y_j)| < \varepsilon_1$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. On a alors avec le même $x^* \in F$, pour tout $j = 1, \ldots, n$

$$|\ell_1(y_j + t_j x) - x^*(y_j + t_j x)| \le |\ell_1(y_j) - x^*(y_j)| + T\,|\lambda - x^*(x)| < (1 + T)\,\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Il est totalement banal de montrer que l'ensemble $\mathcal{J}$ des couples permis est inductif, quand il est muni du même ordre que dans la démonstration de Hahn-Banach : on dit que $(\mathrm{Y}, \ell) \le (\mathrm{Y}_1, \ell_1)$ si $\mathrm{Y} \subset \mathrm{Y}_1$ et si ℓ_1 prolonge ℓ ; si $(\mathrm{Y}_\alpha, \ell_\alpha)$ est une famille totalement ordonnée de couples permis, on pose $\mathrm{Y} = \bigcup_\alpha \mathrm{Y}_\alpha$, et on définit ℓ sur le sous-espace vectoriel Y comme d'habitude ; alors (Y, ℓ) est un couple permis, tout simplement parce qu'un ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{Y} = \bigcup_\alpha \mathrm{Y}_\alpha$ sera déjà contenu dans l'un des Y_{α_0}.

D'après le lemme de Zorn appliqué à l'ensemble inductif $\mathcal{J}$, il existe des éléments maximaux dans l'ensemble des couples permis. La remarque ci-dessus sur l'adjonction d'une dimension montre qu'un couple (Y, ℓ) ne peut être maximal que si $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$.

A la fin, on aura un couple permis (X, ℓ) défini sur X entier ; on a dit que $|\ell(x)| \le \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, donc $\|\ell\| \le 1$, et ℓ est bien un point de la boule unité $\mathrm{B}_{\mathrm{X}^*}$; on veut finalement montrer que $\ell \in \mathrm{F}$ pour tout $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$; sinon, si $\ell \in \mathrm{F}^c$, l'ensemble $*$-faiblement ouvert F^c serait un $*$-voisinage de ℓ, c'est à dire qu'il existerait un $*$-voisinage élémentaire $\mathrm{W}_{\mathrm{A},\varepsilon}$ de ℓ contenu dans F^c ; autrement dit, il existerait un ensemble fini $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ et $\varepsilon > 0$ tels que la condition

$$(*) \qquad |x^* - \ell| < \varepsilon \text{ sur A}$$

implique $x^* \in \mathrm{F}^c$; mais ceci est impossible, puisque le fait que (X, ℓ) soit un couple permis signifie qu'il existe x^* dans F qui vérifie cette condition $(*)$.