Théorème de représentation de Riesz pour le dual de $\mathrm{C(K)}$

On considère un espace métrique compact (K, d), et l'espace $\mathrm{C(K)}$ des fonctions réelles continues sur K. On dit qu'une forme linéaire ℓ sur $\mathrm{C(K)}$ est *positive* si $\ell(\varphi) \ge 0$ pour toute fonction continue $\varphi \ge 0$ sur K. La tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathrm{K}$ de K est la tribu de parties de K engendrée par les ouverts de K.

Théorème. *Pour toute forme linéaire positive ℓ sur $\mathrm{C(K)}$, il existe une unique mesure positive μ sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathrm{C(K)}, \quad \ell(\varphi) = \int_\mathrm{K} \varphi(t)\, d\mu(t).$$

0. — *Si ℓ est une forme linéaire positive sur $\mathrm{C(K)}$, alors ℓ est continue et $\|\ell\| = \ell(\mathbf{1})$.*

Si $\varphi, \psi \in \mathrm{C(K)}$ et $\varphi \le \psi$, alors $\psi - \varphi \ge 0$ implique $\ell(\psi) - \ell(\varphi) = \ell(\psi - \varphi) \ge 0$, c'est à dire $\ell(\varphi) \le \ell(\psi)$: pour une forme linéaire, la positivité implique la croissance.

Si $\|\varphi\| \le 1$, on a $-\mathbf{1} \le \varphi \le \mathbf{1}$, donc $-\ell(\mathbf{1}) \le \ell(\varphi) \le \ell(\mathbf{1})$, donc $|\ell(\varphi)| \le \ell(\mathbf{1})$. Le maximum est atteint en prenant $\varphi = \mathbf{1}$.

1. — Le point de départ ; la propriété de Fatou pour $\mathrm{C(K)}$: *si une suite $(\varphi_n) \subset \mathrm{C(K)}$ tend en croissant vers $\varphi \in \mathrm{C(K)}$, alors $\ell(\varphi) = \lim_n \ell(\varphi_n)$.*

Dans ce cas la suite $(\varphi - \varphi_n)$ tend simplement vers 0, en décroissant ; d'après le lemme de Dini, la convergence vers 0 est uniforme et $\ell(\varphi - \varphi_n) \to 0$ puisque ℓ est continue sur $\mathrm{C(K)}$.

2. — L'ensemble G et ℓ^*

On désigne par G l'ensemble des fonctions définies sur K, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, qui sont de la forme $g = \lim_n \varphi_n$, où (φ_n) est une suite *croissante* de fonctions continues sur K. On pose

$$\forall g \in \mathrm{G}, \quad \ell^*(g) = \sup\{\ell(\varphi) : \varphi \le g,\ \varphi \in \mathrm{C(K)}\}.$$

La valeur de $\ell^*(g)$ peut être $+\infty$. On se servira des conventions usuelles pour additionner dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ou multiplier par un λ réel > 0.

L'ensemble G est l'ensemble des fonctions *semi-continues inférieurement* sur K, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

2.a — La fonction ℓ^* est croissante et positive. Si $\lambda > 0$ et $g \in \mathrm{G}$, alors λg est dans G et $\ell^*(\lambda g) = \lambda\, \ell^*(g)$.

Si $g \ge 0$, on pose $\varphi = 0$ pour obtenir $\ell^*(g) \ge \ell(0) = 0$. Si $g_1 \le g_2$, il est clair que $\ell^*(g_1) \le \ell^*(g_2)$ puisqu'il y a plus de fonctions minorantes φ pour g_2 que pour g_1. L'affirmation concernant les $\lambda > 0$ est laissée au lecteur.

2.b — C(K) $\subset$ G et ℓ^* prolonge ℓ.

Si φ est continue, on pose $\varphi_n = \varphi$ pour tout n, et on obtient $\varphi = \lim_n \varphi_n \in$ G. Par la croissance de ℓ, il est clair que

$$\ell^*(\varphi) = \sup\{\ell(\psi) : \psi \le \varphi,\ \psi \in \mathrm{C(K)}\} = \ell(\varphi).$$

2.c — $\mathbf{1}_{\mathrm{U}} \in$ G pour tout ouvert U de K.

On pose $\varphi_n(t) = \min(1, n \operatorname{dist}(t, \mathrm{U}^c))$ pour tout $t \in$ K. On vérifie facilement que cette suite (φ_n) de fonctions continues est croissante et tend simplement vers $\mathbf{1}_{\mathrm{U}}$.

2.d — Si $g, h \in$ G, alors $\max(g,h)$, $\min(g,h)$, $g+h$ sont dans G.

On écrit $g = \lim_n \varphi_n$ et $h = \lim_n \psi_n$, pour deux suites croissantes (φ_n), (ψ_n) de fonctions continues ; alors $\max(\varphi_n, \psi_n)$, $\min(\varphi_n, \psi_n)$, $\varphi_n + \psi_n$ sont continues et tendent en croissant vers $\max(g,h)$, $\min(g,h)$, $g+h$ respectivement, qui sont donc dans G.

2.e — Définition de G avec $\sup\{\psi : \psi \in \mathrm{D}\}$, où D $\subset$ C(K) est dénombrable.

On suppose que $g = \sup\{\psi : \psi \in \mathrm{D}\}$. Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une énumération de l'ensemble dénombrable D $\subset$ C(K) ; posons $\varphi_n = \max(\psi_0, \ldots, \psi_n)$; alors la suite (φ_n) est une suite croissante de fonctions continues et

$$\lim_n \varphi_n = \sup_k \psi_k = g.$$

2.f — Propriété de Fatou pour ℓ^* : *si une suite* $(g_n) \subset$ G *tend en croissant vers* g*, alors* $g \in$ G *et* $\ell^*(g) = \lim_n \ell^*(g_n)$.

Pour chaque $n \ge 0$ on écrit $g_n = \sup_k \psi_{n,k}$ pour une certaine famille dénombrable $(\psi_{n,k})_k \subset$ C(K) ; alors $g = \sup_n g_n = \sup_{n,k} \psi_{n,k}$ est dans G comme sup d'une famille dénombrable de fonctions continues.

La suite $(\ell^*(g_n))$ est croissante, donc admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Il est évident que $\ell^*(g) \ge \lim_n \ell^*(g_n)$, parce que $g_n \le g$ pour tout n. Inversement soit $\varphi \le g$, $\varphi \in$ C(K). Posons $\varphi_n = \sup_{0 \le j,k \le n} \psi_{j,k}$; on a $\varphi_n \le g_n$, car pour $0 \le j,k \le n$ on a $\psi_{j,k} \le g_j \le g_n$. La suite (φ_n) est une suite croissante de fonctions continues et $\lim_n \varphi_n = g$.

La suite de fonctions continues $\chi_n = \min(\varphi_n, \varphi)$ tend en croissant vers la fonction $\min(g, \varphi) = \varphi$; d'après la propriété de Fatou dans C(K), on a

$$\ell(\varphi) = \lim_n \ell(\chi_n) \le \lim_n \ell(\varphi_n) \le \lim_n \ell^*(g_n).$$

En prenant le sup en $\varphi \in$ C(K) on obtient $\ell^*(g) \le \lim_n \ell^*(g_n)$.

2.g — Additivité de ℓ^*, séries positives dans G : *si les* (u_k) *sont des éléments positifs de* G*, on a* $\ell^*\big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell^*(u_k)$.

Soient $g, h \in$ G ; on a vu que $g + h$ est limite croissante d'une suite $\varphi_n + \psi_n$, où $g = \lim_n \varphi_n$ et $h = \lim_n \psi_n$; par Fatou,

$$\ell^*(g+h) = \lim_n \ell^*(\varphi_n + \psi_n) = \lim_n \ell(\varphi_n + \psi_n) = \lim_n \ell(\varphi_n) + \lim_n \ell(\psi_n) = \ell^*(g) + \ell^*(h).$$

Soit $(u_k)_k$ une famille de fonctions positives dans G. La suite $g_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est croissante dans G, sa limite est $g = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. D'après Fatou, on a $g \in$ G et

$$\ell^*(g) = \lim_n \ell^*(g_n) = \lim_n \sum_{k=0}^n \ell^*(u_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ell^*(u_k).$$

3. — L'espace $\mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions réelles bornées f sur K qui ont la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $g, h \in$ G telles que $-h \le f \le g$ et telle que les “intégrales” des termes extrêmes, c'est à dire $-\ell^*(h)$ et $\ell^*(g)$, soient finies et proches, $\ell^*(g) - (-\ell^*(h)) = \ell^*(g+h) < \varepsilon$.

Il résulte de l'inégalité $-h \le g$ que $g + h \ge 0$, et $g + h \ge 0$ implique $\ell^*(g+h) \ge 0$, c'est à dire $-\ell^*(h) \le \ell^*(g)$. On pose

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \widetilde{\ell}(f) = \inf\{\ell^*(g) : f \le g,\ g \in \mathrm{G}\} = \sup\{-\ell^*(h) : -h \le f,\ h \in \mathrm{G}\}.$$

3.a — L'ensemble $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et $\widetilde{\ell}$ une forme linéaire sur $\mathcal{E}$, positive.

Il est évident sur la définition que $f \in \mathcal{E}$ implique $-f \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(-f) = -\widetilde{\ell}(f)$; si $\lambda > 0$, il résulte facilement de 2.a que $\lambda f \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(\lambda f) = \lambda \widetilde{\ell}(f)$. Pour finir la preuve du caractère vectoriel de $\mathcal{E}$ et de la linéarité de $\widetilde{\ell}$, il suffit de voir que $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$ implique $f_1 + f_2 \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(f_1 + f_2) = \widetilde{\ell}(f_1) + \widetilde{\ell}(f_2)$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné ; on choisit $-h_j \le f_j \le g_j$, avec $g_j, h_j \in$ G et $j = 1, 2$, telles que $\ell^*(g_j + h_j) < \varepsilon/2$. On encadre $f_1 + f_2$, sous la forme $-(h_1 + h_2) \le f_1 + f_2 \le g_1 + g_2$; on a

$$\ell^*(g_1 + g_2 + h_1 + h_2) = \ell^*(g_1 + h_1) + \ell^*(g_2 + h_2) < \varepsilon$$

ce qui montre que $f_1 + f_2 \in \mathcal{E}$, et

$$\widetilde{\ell}(f_1 + f_2) \le \ell^*(g_1 + g_2) = \ell^*(g_1) + \ell^*(g_2) \le -\ell^*(h_1) - \ell^*(h_2) + \varepsilon \le \widetilde{\ell}(f_1) + \widetilde{\ell}(f_2) + \varepsilon$$

permet de montrer que $\widetilde{\ell}(f_1 + f_2) \le \widetilde{\ell}(f_1) + \widetilde{\ell}(f_2)$; en appliquant aussi à $-f_j$, on démontre l'additivité de $\widetilde{\ell}$.

Si $f \ge 0$, on choisit $h = 0$; alors $0 = -\ell^*(h) \le \widetilde{\ell}(f)$ montre la positivité de $\widetilde{\ell}$.

3.b — On désigne par G_b le sous-ensemble de G formé des fonctions bornées. On a $\mathrm{G}_b \subset \mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(g) = \ell^*(g)$ pour toute fonction $g \in \mathrm{G}_b$.

Si $g_1 \in \mathrm{G}_b$, on écrit $g_1 = \lim_n \varphi_n \le \mathrm{M}$; on prend $h = -\varphi_n \in \mathrm{G}$ et $g = g_1$ pour avoir un encadrement $-h \le g_1 \le g$. On a $\ell^*(g+h) = \ell^*(g) + \ell^*(-\varphi_n) = \ell^*(g) - \ell(\varphi_n)$ qui tend vers 0 car $\ell^*(g) \le \ell^*(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\,\ell(\mathbf{1}) < +\infty$. On en déduit que $g_1 \in \mathcal{E}$.

Evidemment $\widetilde{\ell}(g_1) = \inf\{\ell^*(g) : g_1 \le g\} = \ell^*(g_1)$ par la croissance de ℓ^*.

3.c — $\max(f_1, f_2) \in \mathcal{E}$ pour toutes $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$.

On choisit $-h_j \le f_j \le g_j$, avec $g_j, h_j \in \mathrm{G}$ et $\ell^*(g_j + h_j) < \varepsilon/2$, $j+1, 2$. Alors l'encadrement de $\max(f_1, f_2)$ entre $-h = -\min(h_1, h_2)$ et $g = \max(g_1, g_2)$ (g, h sont deux éléments de G) donnera le résultat, car

$$\max(g_1, g_2) + \min(h_1, h_2) \le (g_1 + h_1) + (g_2 + h_2)$$

et donc $\ell^*\big(\max(g_1, g_2) + \min(h_1, h_2)\big) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

3.d — Propriété de Fatou : *si la suite $(f_n) \subset \mathcal{E}$ tend en croissant vers f bornée, alors $f \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(f) = \lim_n \widetilde{\ell}(f_n)$.*

Préliminaire : *si une suite $(\mathrm{F}_n) \subset \mathcal{E}$ de fonctions positives tend en croissant vers* F *et si $\widetilde{\ell}(\mathrm{F}_n) < \varepsilon$ pour tout n, il existe $g \in \mathrm{G}$ telle que $\mathrm{F} \le g$ et $\widetilde{\ell}(g) < 2\,\varepsilon$.*

Pour tout $n \ge 0$ on peut trouver un encadrement $0 \le -h_n \le \mathrm{F}_n \le g_n$ avec $\ell^*(g_n + h_n) \le 2^{-n-1}\,\varepsilon$ et $\ell^*(g_n) < \varepsilon$. On note que si $\mathrm{G}_n = \max(g_0, \ldots, g_n)$ on a

$$\mathrm{G}_n \le g_n + \sum_{k=0}^{+\infty} (g_k + h_k)\,;$$

en effet en posant $\mathrm{S}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (g_k + h_k)(t)$, on a pour tout $j \le n$ (noter que $h_j(t) \le 0$ est fini ; noter aussi que si $-h \le \mathrm{F}_n$, on a aussi $h \ge \min(h, 0) \ge -\mathrm{F}_n$ parce que $\mathrm{F}_n \ge 0$; c'est ce qui permet de supposer $-h_j \ge 0$)

$$g_j(t) = (g_j + h_j)(t) - h_j(t) \le \sum_{k=0}^{+\infty} (g_k + h_k)(t) + \mathrm{F}_j(t) \le \mathrm{S}(t) + \mathrm{F}_n(t) \le \mathrm{S}(t) + g_n(t)$$

d'où le résultat annoncé en prenant le max en $j \le n$. La suite (G_n) est croissante et $g = \lim_n \mathrm{G}_n$ convient : en effet, on a $\mathrm{F} = \lim_n \mathrm{F}_n \le \lim_n \mathrm{G}_n = g$ et en utilisant 2.g

$$\ell^*(g) = \lim_n \ell^*(\mathrm{G}_n) \le \lim_n \ell^*(g_n) + \sum_{k=0}^{+\infty} \ell^*(g_k + h_k) < 2\,\varepsilon.$$

Considérons ensuite une suite croissante $(f_n) \subset \mathcal{E}$, de limite bornée f. Il en résulte que la suite $(\widetilde{\ell}(f_n))$ est croissante et majorée, donc convergente vers une limite $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$. Choisissons k tel que $\mathrm{L} - \widetilde{\ell}(f_k) < \varepsilon$. Posons $\mathrm{F}_n = f_{k+n} - f_k$ pour $n \ge 0$; cette suite (F_n) de fonctions positives tend en croissant vers $\mathrm{F} = f - f_k$, et

$$\widetilde{\ell}(\mathrm{F}_n) = \widetilde{\ell}(f_{n+k}) - \widetilde{\ell}(f_k) \le \mathrm{L} - \widetilde{\ell}(f_k) < \varepsilon\,;$$

d'après le pas préliminaire, on trouve $g \geq \mathrm{F} = f - f_k$ telle que $\ell^*(g) < 2\,\varepsilon$. On a l'encadrement $f_k \leq f \leq f_k + g$, et en encadrant $-h_k \leq f_k \leq g_k$ de façon que $\ell^*(g_k + h_k) < \varepsilon$, on aura $-h_k \leq f \leq g_k + g$ avec $\ell^*(g_k + g + h_k) < 3\,\varepsilon$. On en déduit $f \in \mathcal{E}$ et

$$\widetilde{\ell}(f) \leq \ell^*(g_k) + \ell^*(g) \leq \widetilde{\ell}(f_k) + \varepsilon + 2\,\varepsilon.$$

Ceci montre que $\widetilde{\ell}(f) \leq \lim_n \widetilde{\ell}(f_n)$; comme dans 2.f, l'autre inégalité est évidente.

4. — L'espace $\mathcal{L}_\infty$ et la mesure μ.

On pose

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}_\mathrm{K} : \mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathcal{E}\}.$$

Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(\mathrm{A}) = \widetilde{\ell}(\mathbf{1}_\mathrm{A})$.

4.a — $\mathbf{1}_\mathrm{U} \in \mathcal{E}$, donc $\mathrm{U} \in \mathcal{A}$, pour tout ouvert U de K.

En effet $\mathbf{1}_\mathrm{U} \in \mathrm{G}$ et elle est bornée ; appliquer 3.b.

4.b — $\mathcal{A}$ est une tribu, donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\mathrm{K}$ et μ est une mesure positive sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$.

On sait que $\mathrm{C}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{G}_b \subset \mathcal{E}$, donc $\mathbf{1} = \mathbf{1}_\mathrm{K} \in \mathcal{E}$ et $\mathrm{K} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et $\mathbf{1} \in \mathcal{E}$, il en résulte que $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ implique $\mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$, puisque $\mathbf{1}_{\mathrm{A}^c} = \mathbf{1} - \mathbf{1}_\mathrm{A}$. Comme $\mathcal{E}$ est stable par sup fini, $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie (écrire $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \max(\mathbf{1}_\mathrm{A}, \mathbf{1}_\mathrm{B})$). Enfin la propriété de Fatou de $\mathcal{E}$ donne la réunion des suites croissantes : si $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{A}$ est croissante, alors $\mathrm{A} = \bigcup_n \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$, car $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est la limite croissante bornée de la suite $(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}) \subset \mathcal{E}$.

La linéarité de $\widetilde{\ell}$ donne $\mu(\emptyset) = 0$ et l'additivité de μ pour deux ensembles disjoints ; Fatou donne la limite croissante,

$$\mu\Bigl(\bigcup_n \mathrm{A}_n\Bigr) = \widetilde{\ell}\bigl(\lim_n \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}\bigr) = \lim_n \widetilde{\ell}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}) = \lim_n \mu(\mathrm{A}_n).$$

4.c — L'espace $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ est contenu dans $\mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(f) = \int_\mathrm{K} f(t)\,d\mu(t)$ pour toute $f \in \mathcal{L}_\infty$. La mesure μ représente la forme linéaire ℓ.

Si $e = \sum_{i=1}^n c_i\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$ est une fonction étagée sur K (où $\mathrm{A}_i \in \mathcal{B}_\mathrm{K}$, $i = 1, \ldots, n$), alors

$$\int_\mathrm{K} e(t)\,d\mu(t) = \sum_{i=1}^n c_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^n c_i\,\widetilde{\ell}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}) = \widetilde{\ell}(e).$$

Toute fonction $f \in \mathcal{L}_\infty$ est limite croissante d'une suite (e_n) de fonctions étagées ; ces fonctions étagées sont dans $\mathcal{E}$ par ce qui précède. On conclut avec la propriété de Fatou de $\mathcal{E}$ que $f \in \mathcal{E}$ et

$$\int_\mathrm{K} f(t)\,d\mu(t) = \lim_n \int_\mathrm{K} e_n(t)\,d\mu(t) = \lim_n \widetilde{\ell}(e_n) = \widetilde{\ell}(f).$$

En particulier, si $\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$, on a $\int_{\mathrm{K}} \varphi(t)\, d\mu(t) = \widetilde{\ell}(\varphi) = \ell(\varphi)$.

5. — Unicité du prolongement $\widetilde{\ell}$ et de la mesure μ

5.a — *Si m est une forme linéaire sur $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$, positive et vérifiant Fatou, qui coïncide avec ℓ sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ alors $m(f) = \widetilde{\ell}(f)$ pour toute $f \in \mathcal{L}_\infty$.*

Considérons une fonction $g \in \mathrm{G}_b \subset \mathcal{L}_\infty$. On a $g = \lim_n \varphi_n$ avec $(\varphi_n) \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$, donc

$$m(g) = \lim_n m(\varphi_n) = \lim_n \ell(\varphi_n) = \widetilde{\ell}(g).$$

Si $f \in \mathcal{L}_\infty$, on a $f \in \mathcal{E}$ et l'encadrement entre $-h$ et g, avec $g, h \in \mathrm{G}_b$ telles que $\ell^*(g+h) < \varepsilon$, donnera le résultat : la chaîne d'inégalités

$$-\widetilde{\ell}(h) = m(-h) \leq m(f) \leq m(g) = \widetilde{\ell}(g)$$

implique $|m(f) - \widetilde{\ell}(f)| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. On a pu choisir g, h bornées parce que f est bornée, $|f| \leq \mathrm{M}$. Si $-h_1 \leq f \leq g_1$ est un premier encadrement, $g = \min(g_1, \mathrm{M})$ et $h = \min(h_1, \mathrm{M})$ sont bornées et donnent un meilleur encadrement de f.

5.b — *Si ν est une mesure positive sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ qui représente ℓ, alors $\nu = \mu$.*

La mesure ν est finie puisque $\nu(\mathrm{K}) = \ell(\mathbf{1})$. Posons $m(f) = \int_{\mathrm{K}} f(t)\, d\nu(t)$ pour toute $f \in \mathcal{L}_\infty$; par hypothèse, m coïncide avec ℓ sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, vérifie Fatou par la théorie de l'intégration, donc $m = \widetilde{\ell}$ sur $\mathcal{L}_\infty$ par 5.a et

$$\nu(\mathrm{A}) = m(\mathbf{1}_\mathrm{A}) = \widetilde{\ell}(\mathbf{1}_\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$$

pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_\mathrm{K}$.