On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0,1]$. On dit que deux fonctions mesurables g_1 et g_2 sur $[0,1]$ sont équivalentes si $\lambda\big(\{x : g_1(x) \neq g_2(x)\}\big) = 0$. On dit qu'une classe d'équivalence f pour cette relation est *bornée* s'il existe un représentant borné $\widetilde{f}$ dans la classe f. On désigne par $\mathrm{L}_\infty([0,1])$ l'espace vectoriel des classes bornées, normé par

$$\|f\|_\infty = \inf\{\mathrm{C} : \lambda\big(\{x : |f(x)| > \mathrm{C}\}\big) = 0\}.$$

1. Vérifier que $\|f\|_\infty \le 1$ si et seulement si on peut trouver un représentant $\widetilde{f}$ de la classe f tel que $|\widetilde{f}(x)| \le 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

2. Montrer que la boule unité (fermée) de $\mathrm{L}_\infty([0,1])$ est un sous-ensemble fermé de l'espace $\mathrm{L}_2([0,1])$.

3. Soit S un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{L}_2([0,1])$, formé de (classes de) fonctions bornées ; déduire du théorème de Baire et de la question précédente qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $\|f\|_\infty \le \mathrm{C}\,\|f\|_2$ pour toute f dans S.

Soit $(\phi_i)_{1\le i\le n}$ une famille orthonormée de S ayant n éléments ; soit $a = (a_i)_{1\le i\le n}$ un élément de la boule unité de $\mathbb{R}^n$; on considère la fonction $f_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i\,\phi_i(x)$.

4. Montrer que pour chaque a de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on a $|f_a(x)| \le \mathrm{C}$ sauf sur une partie Ω_a de mesure nulle dans $[0,1]$.

5. En utilisant le fait que la boule unité de $\mathbb{R}^n$ admet une partie dénombrable dense, montrer qu'il existe une partie Ω de mesure nulle dans $[0,1]$, telle que pour tout $x \notin \Omega$, l'inégalité $|f_a(x)| \le \mathrm{C}$ ait lieu quel que soit a dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

6. En déduire que pour presque tout $x \in [0,1]$,
$$\sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2 \le \mathrm{C}^2.$$

7. Montrer que le cardinal n de la famille (ϕ_i) est majoré par C^2. Montrer que l'espace S est de dimension finie, majorée par C^2.

8. Montrer que pour toute suite orthonormée *infinie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{L}_2([0,1])$, il existe des coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 = 1$ et que la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,f_n$ ne soit pas bornée sur $[0,1]$.