MT404, Cours n° 19, lundi 26 novembre 2001.

Résumé de l'épisode précédent. Etant donné un opérateur normal T sur un espace de Hilbert complexe non nul H, on s'est intéressé à une certaine algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions complexes continues définies sur le spectre $\mathrm{K} = \mathrm{Sp(T)}$ de T. Cette algèbre de fonctions est formée de toutes les fonctions polynomiales à coefficients complexes en deux variables réelles x, y, où on a posé $z = x + iy \in \mathrm{K} \subset \mathbb{C}$; pour les besoins présents, il est préférable de la décrire, de façon équivalente, comme l'ensemble de toutes les fonctions f sur K qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\forall z \in \mathrm{K}, \quad f(z) = \sum_{p,q} c_{p,q}\, z^p\, \overline{z}^q$$

pour une certaine famille (finie) de coefficients complexes $(c_{p,q})$.

On a démontré, avec beaucoup de peine, le fait crucial suivant : si on pose, en parallèle avec la représentation précédente de $f \in \mathcal{A}$

$$(p) \qquad \mathrm{W} = \sum_{p,q} c_{p,q}\, \mathrm{T}^p\, (\mathrm{T}^*)^q \in \mathcal{L}(\mathrm{H}),$$

alors $\|\mathrm{W}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} = \|f\|_{\mathrm{C(K)}}$. Ce fait fondamental montre en particulier que l'opérateur W ne dépend que de la *fonction* f, et pas de sa représentation, ce qui autorise à poser

$$\mathrm{W} = f(\mathrm{T}).$$

Exemple. Considérons $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ et l'opérateur normal $\mathrm{T} = \mathrm{M}_g$ de multiplication par une fonction mesurable bornée g. On a vu que l'adjoint $(\mathrm{M}_g)^*$ est l'opérateur de multiplication par la fonction complexe conjuguée $\overline{g}$. Par ailleurs, on peut montrer que

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{M}_g) = \bigl\{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0,\ \mu\bigl(\{t \in [0,1] : |g(t) - \lambda| < \varepsilon\}\bigr) > 0\bigr\} =: \mathrm{K}$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, et on peut montrer qu'il existe un représentant $\widehat{g}$ de la classe de g qui prend toutes ses valeurs dans K.

Si f et W sont comme ci-dessus et si ξ est un élément de $\mathrm{L}_2(0,1)$, on voit que

$$\forall t \in [0,1], \quad \mathrm{W}(\xi)(t) = \Bigl(\sum_{p,q} c_{p,q}\, \widehat{g}(t)^p\, \overline{\widehat{g}(t)}^q\Bigr)\, \xi(t) = f(\widehat{g}(t))\, \xi(t),$$

c'est à dire que $\mathrm{W} = f(\mathrm{M}_g)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction bornée $f \circ \widehat{g}$, dont la classe est la "fonction" presque partout définie $f \circ g$.

On a ensuite énoncé le théorème de calcul fonctionnel, et on a démontré les points suivants.

Soient H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *normal ; posons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp(T)}$ *; il existe un et un seul homomorphisme d'algèbres de Banach unitaires complexes* φ_T : $\mathrm{C(K)} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *tel que* $\varphi_\mathrm{T}(i_\mathrm{K}) = \mathrm{T}$ *et* $\varphi_\mathrm{T}(\overline{i_\mathrm{K}}) = \mathrm{T}^*$.

L'homomorphisme φ_T *est isométrique.*

On posera $f(\mathrm{T}) = \varphi_\mathrm{T}(f)$ pour toute fonction f continue sur le spectre de T, à valeurs complexes.

Démonstration des points manquants.

1.– Si $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *commute avec* T **et** *avec* T^**, alors* S *commute avec tout opérateur de la forme* $f(\mathrm{T})$.

On commence par montrer que SW = WS pour tout W de la forme (p), ce qui est très facile ; on raisonne ensuite comme on l'avait fait dans le cas hermitien, en disant qu'un opérateur $f(\mathrm{T})$ général est limite dans $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ d'une suite (W_n) d'opérateurs de la forme précédente ; en utilisant la continuité du produit dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(\mathrm{H})$, on a

$$\mathrm{S}f(\mathrm{T}) = \lim_n \mathrm{SW}_n = \lim_n \mathrm{W}_n\mathrm{S} = f(\mathrm{T})\mathrm{S}.$$

2.– On a $(f(\mathrm{T}))^* = \overline{f}(\mathrm{T})$*. L'opérateur* $f(\mathrm{T})$ *est normal.*

Pour toute fonction continue f sur K posons $\psi(f) = (\overline{f}(\mathrm{T}))^* = \varphi_\mathrm{T}(\overline{f})^*$, et montrons que ψ est un homomorphisme qui vérifie les propriétés de φ_T ; on a

$$\psi(i_\mathrm{K}) = \varphi_\mathrm{T}(\overline{i_\mathrm{K}})^* = (\mathrm{T}^*)^* = \mathrm{T}\,; \quad \psi(\overline{i_\mathrm{K}}) = \varphi_\mathrm{T}(i_\mathrm{K})^* = \mathrm{T}^*\,;$$

et aussi $\psi(1) = \varphi_\mathrm{T}(1)^* = \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$, $\psi(fg) = \varphi_\mathrm{T}(\overline{g}\,\overline{f})^* = \big(\varphi(\overline{g})\varphi_\mathrm{T}(\overline{f})\big)^* = \psi(f)\psi(g)$. D'après l'unicité, $\psi = \varphi_\mathrm{T}$, c'est à dire $\overline{f}(\mathrm{T}) = (f(\mathrm{T}))^*$. Il en résulte immédiatement que $f(\mathrm{T})$ est normal :

$$f(\mathrm{T})(f(\mathrm{T}))^* = f(\mathrm{T})\overline{f}(\mathrm{T}) = \varphi_\mathrm{T}(f\overline{f}) = \varphi_\mathrm{T}(\overline{f}f) = (f(\mathrm{T}))^* f(\mathrm{T}).$$

3.– On a $\mathrm{Sp}(f(\mathrm{T})) = f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$.

Pour démontrer ce *théorème spectral*, on a besoin d'un lemme.

Lemme 9.2.2. *Soient* K *un compact non vide et* φ *un homomorphisme isométrique de* C(K) *dans une algèbre de Banach unitaire* B *; alors* $f \in \mathrm{C(K)}$ *est inversible dans* C(K) *si et seulement si* $\varphi(f)$ *est inversible dans* B.

Démonstration. On la donnera dans le cas compact *métrique*. On a déjà dit que si f est inversible, alors $\varphi(f)$ est inversible. Supposons maintenant f non inversible dans C(K) ; on a vu qu'il existe $s_0 \in \mathrm{K}$ tel que $f(s_0) = 0$; posons $\mathrm{U}_n = \{s \in \mathrm{K} : |f(s)| < 2^{-n}\}$; c'est un ouvert qui contient s_0 ; soit h_n la fonction continue définie sur K par $h_n(s) = \mathrm{dist}(s, \mathrm{U}_n^c)$; cette fonction est non nulle, mais nulle en dehors de U_n ; si $g_n = \|h_n\|^{-1}h_n$, on a une fonction de norme 1 nulle en dehors de U_n. Alors $\|fg_n\| \le 2^{-n}$; posons $b = \varphi(f)$ et $x_n = \varphi(g_n)$; on a $\|x_n\|_\mathrm{B} = \|g_n\|_{\mathrm{C(K)}} = 1$ puisque φ est isométrique, et $\|b\,x_n\| \le 2^{-n}$; il est impossible que b soit inversible : si b^{-1} existait dans B, la multiplication par b^{-1} serait continue, donc $b^{-1}(b\,x_n) = x_n$ tendrait vers 0, ce qui n'est pas le cas puisque $\|x_n\| = 1$ pour tout n.

Corollaire 9.2.3. *Pour tout homomorphisme isométrique* φ *de* C(K) *(complexe) dans une algèbre de Banach unitaire complexe* B*, on a*

$$\mathrm{Sp}(\varphi(f)) = \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{K})$$

pour toute $f \in \mathrm{C(K)}$.

Démonstration. On sait déjà que $\mathrm{Sp}(\varphi(f)) \subset \mathrm{Sp}(f)$. Inversement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) = f(\mathrm{K})$ la fonction $f - \lambda$ est non inversible dans C(K), donc son image $\varphi(f) - \lambda 1_\mathrm{B}$ est non inversible dans B, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi(f))$.

4.– Pour toute fonction continue g sur $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$, on a $g(f(\mathrm{T})) = (g \circ f)(\mathrm{T})$.

Posons $\psi(g) = (g \circ f)(\mathrm{T})$ pour toute fonction continue g sur $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) = \mathrm{Sp}(f(\mathrm{T}))$. On a $\psi(i_{\mathrm{L}}) = f(\mathrm{T})$; $\psi(\overline{i_{\mathrm{L}}}) = \overline{f}(\mathrm{T}) = (f(\mathrm{T}))^*$, $\psi(1) = \varphi(1) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, et $\psi(g_1 g_2) = \psi(g_1)\psi(g_2)$. D'après l'unicité, on voit que $\psi = \varphi_{f(\mathrm{T})}$.

Exemple.

Si on considère sur $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ l'opérateur M_g de multiplication par $g \in \mathrm{L}_\infty(0,1)$, si f est continue sur $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}_g)$ on voit que $f(\mathrm{M}_g)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $t \in [0,1] \to f(g(t))$, c'est à dire la multiplication par la fonction $f \circ g$.

Corollaire 9.4.2. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal et* f *une fonction continue sur* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; alors, si* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}$, $f(\mathrm{T})$ *est hermitien ; si de plus* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}_+$, $f(\mathrm{T})$ *est hermitien positif; si* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{T}$, *alors* $f(\mathrm{T})$ *est unitaire.*

Démonstration. Si $f = \overline{f}$ (sur $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$) alors $f(\mathrm{T}) = \overline{f}(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T})^*$; si f est réelle ≥ 0 sur $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$, on peut introduire $g = \sqrt{f}$, et écrire $f(\mathrm{T})$ comme le carré d'un hermitien ; si $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{T}$, alors $f\overline{f} = 1$, donc $f(\mathrm{T})^* f(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) f(\mathrm{T})^* = (f\overline{f})(\mathrm{T}) = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$, donc l'opérateur $f(\mathrm{T})$ est unitaire.

Les réciproques sont vraies : *soient* H *un espace de Hilbert complexe,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal et* f *une fonction continue sur* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; si* $f(\mathrm{T})$ *est hermitien, alors* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}$ *; si de plus* $f(\mathrm{T})$ *est hermitien positif, alors* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}_+$ *; si* $f(\mathrm{T})$ *est unitaire, alors* $f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T})) \subset \mathbb{T}$.

Elles proviennent du théorème spectral et des localisations connues pour les spectres : par exemple, $f(\mathrm{T})$ hermitien entraîne $\mathrm{Sp}(f(\mathrm{T})) \subset \mathbb{R}$; mais le théorème spectral donne $\mathrm{Sp}(f(\mathrm{T})) = f(\mathrm{Sp}(\mathrm{T}))$, l'ensemble des valeurs prises par f sur $\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$. De même pour les deux autres.

9.3. Application aux hermitiens positifs. La racine carrée

Proposition 9.3.3. *Pour* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *hermitien positif, il existe un et seul* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *hermitien positif tel que* $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}$.

Démonstration. On a déjà vu l'existence d'une racine hermitienne positive, passons maintenant à la démonstration de l'unicité. Soit S un opérateur hermitien positif tel que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}$; considérons le spectre $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{S}) \subset [0, +\infty[$, et considérons sur K la fonction $f : s \to s^2$, puis sur $\mathrm{L} = f(\mathrm{K}) \subset [0, +\infty[$ la fonction $g(t) = \sqrt{t}$. Du fait que $\mathrm{K} \subset [0, +\infty[$, on vérifie que $g(f(s)) = \sqrt{s^2} = s$ pour tout $s \in \mathrm{K}$, donc le résultat de composition nous donne, puisque $g \circ f = i_{\mathrm{K}}$

$$\mathrm{S} = (g \circ f)(\mathrm{S}) = g(f(\mathrm{S})) = g(\mathrm{S}^2) = g(\mathrm{T}) = \sqrt{\mathrm{T}}.$$

Bien entendu il n'y a pas unicité si on ne demande pas que la racine soit positive : il suffit de considérer $-\sqrt{\mathrm{T}}$ pour avoir une autre racine hermitienne.

Soient H un espace de Hilbert et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$; on appelle *module* de T et on note $|\mathrm{T}|$ l'unique $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ hermitien positif tel que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{T}^*\mathrm{T}$, c'est à dire que $|\mathrm{T}| = \sqrt{\mathrm{T}^*\mathrm{T}}$.

Il faut voir que $|\mathrm{T}|$ est en général différent de $|\mathrm{T}^*|$ (en fait, on a l'égalité $|\mathrm{T}| = |\mathrm{T}^*|$ si et seulement si T est normal).

Exercice (mal) traité.

On suppose que U est un opérateur unitaire sur un Hilbert complexe H, et que le spectre de U contient exactement les quatre points $1, i, -1, -i$.

– Donner un exemple de cette situation.

– Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 \oplus \mathrm{H}_3$, avec $\mathrm{H}_k \neq (0)$ et $\mathrm{H}_k = \ker(\mathrm{U} - i^k \,\mathrm{Id}_\mathrm{H})$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Ce qui suit n'a été que très partiellement dit à l'amphi.

Pour un exemple, prendre l'opérateur diagonal Δ_α de coefficients diagonaux $\alpha_n = i^n$, dans $\ell_2(\mathbb{N})$ par exemple.

Posons $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{U}) = \{1, i, -1, -i\}$; considérons pour $k = 0, 1, 2, 3$ la fonction f_k sur K égale à 1 au point i^k et nulle aux autres points. C'est une fonction continue sur K ! ! Puisque U est unitaire, il est normal et on peut calculer $\mathrm{P}_k = f_k(\mathrm{U})$; les fonctions (f_k) vérifient des relations algébriques qui vont se transférer aux P_k :

$$\|f_k\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} = 1,\ f_k f_j = \delta_{k,j} f_k,\ \sum_{k=0}^{3} f_k = 1.$$

On aura donc $\|\mathrm{P}_k\| = 1$ et $\mathrm{P}_k^2 = \mathrm{P}_k$ pour chaque k, donc P_k est un projecteur, non nul. Puisque f_k est réelle, P_k est hermitien, donc c'est un projecteur orthogonal sur un sous-espace F_k non nul. Si $k \neq j$, on a $\mathrm{P}_k \mathrm{P}_j = 0$ qui montre que F_j est orthogonal à F_k. Enfin $\mathrm{Id}_\mathrm{H} = \mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3$ montre que $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 \oplus \mathrm{H}_3$.

Il reste à voir que $\mathrm{F}_k = \ker(\mathrm{U} - i^k \,\mathrm{Id}_\mathrm{H})$; montrons le par exemple pour $k = 0$. Considérons la fonction g égale à $1/(i^j - 1)$ au point $x_j = i^j$ pour $j \neq 0$, et $g(1) = 1$. On a g inversible dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ donc $\mathrm{S} = g(\mathrm{U})$ est inversible. On a $g(i_\mathrm{K} - 1) = f_1 + f_2 + f_3 = 1 - f_0$, donc $\mathrm{S}(\mathrm{U} - \mathrm{Id}_\mathrm{H}) = \mathrm{Id}_\mathrm{H} - \mathrm{P}_0$. Puisque l'opérateur S est inversible, ceci implique que $\ker(\mathrm{U} - \mathrm{Id}_\mathrm{H}) = \ker(\mathrm{Id}_\mathrm{H} - \mathrm{P}_0) = \mathrm{F}_0$.

Pour résoudre cet exercice, on n'avait pas besoin de toute la construction du calcul fonctionnel. On aurait pu s'arrêter au moment où on a prouvé que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et tout opérateur normal U, l'opérateur $\mathrm{P}(\mathrm{U})$ ne dépend que de la fonction polynomiale $t \in \mathrm{K} \to \mathrm{P}(t)$, parce que $\|\mathrm{Q}(\mathrm{U})\| = \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})}$ pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

Considérons alors le polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X} + i)$; la fonction polynomiale associée à P est nulle sur le spectre de U, donc

$$(\mathrm{U} - 1)(\mathrm{U} - i)(\mathrm{U} + \mathrm{Id})(\mathrm{U} + i\,\mathrm{Id}) = 0.$$

En revanche les polynômes tels que $\mathrm{Q} = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + 1)$ ne sont pas identiquement nuls sur K, donc $\|\mathrm{Q}(\mathrm{U})\| = \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} > 0$ montre que $\mathrm{Q}(\mathrm{U}) \neq 0$; on en déduit que P est le polynôme minimal de U (qui n'existe pas en général en dimension infinie, mais ici il existe). Puisque le polynôme minimal est à racines simples, U est diagonalisable.

MT404, Cours n° 20, lundi 3 décembre 2001.

11. Opérateurs autoadjoints non bornés

11.1. Opérateurs non bornés

Préliminaires algébriques

Dans cette sous-section il ne sera question que d'algèbre linéaire : pas un poil de topologie. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; une *application linéaire partiellement définie* (un peu plus loin, on dira un *opérateur*) T de X dans Y est donnée par un sous-espace vectoriel dom(T) de X appelé *domaine* de T et par une application linéaire (usuelle) $\mathrm{L_T}$ de dom(T) dans Y.

Autrement dit, la donnée T est celle de $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{dom(T)}, \mathrm{L_T})$. Le *graphe* de T est le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à $\mathrm{Gr(T)} = \{(x, \mathrm{L_T}(x)) : x \in \mathrm{dom(T)}\}$. On va voir que T est complètement déterminé par Gr(T), qui est un sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, avec la propriété $\bigl((0_\mathrm{X}, y) \in \mathrm{G}\bigr) \Rightarrow (y = 0_\mathrm{Y})$.

Dans la suite, pour tout $x \in \mathrm{dom(T)}$ on posera $\mathrm{T}(x) = \mathrm{L_T}(x)$ et on ne fera plus la distinction entre $\mathrm{L_T}(x)$ et $\mathrm{T}(x)$. On laissera donc tomber complètement $\mathrm{L_T}$. Si T est une application linéaire partiellement définie, le *graphe* de T est donc le sous-espace vectoriel du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ égal à $\mathrm{Gr(T)} = \{(x, \mathrm{T}(x)) : x \in \mathrm{dom(T)}\}$. La restriction à Gr(T) de la première projection est injective. Réciproquement, appelons *graphe partiel* tout sous-espace vectoriel G de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ tel que la restriction de la première projection à G soit injective. Autrement dit, si $(x, y) \in \mathrm{G}$ et $(x, y') \in \mathrm{G}$, alors $y = y'$; ou encore : si $(0, y) \in \mathrm{G}$, alors $y = 0$. On voit que tout graphe partiel est le graphe d'une unique application linéaire partiellement définie T. La correspondance qui à T associe son graphe est une correspondance bijective entre applications linéaires partiellement définies et graphes partiels :

soit $\mathrm{G} \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ un graphe partiel. Notons $p_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ et $p_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ les projections et définissons un opérateur T en posant $\mathrm{dom(T)} = p_1(\mathrm{G})$ et $\mathrm{T}(p_1(z)) = p_2(z)$ pour tout $z \in \mathrm{G}$. Il est clair que $\mathrm{Gr(T)} = \mathrm{G}$. Comme le noyau de la première projection de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ dans X est le sous-espace $\{0\} \times \mathrm{Y}$ de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, la correspondance entre opérateur et graphe partiel est bijective.

Désormais on dira *opérateur* au lieu d'application linéaire partiellement définie. On appelle *extension* d'un opérateur T tout opérateur S tel que $\mathrm{Gr(T)} \subset \mathrm{Gr(S)}$. On écrit alors $\mathrm{T} \subset \mathrm{S}$. Soient S et T deux opérateurs de X dans Y ; on définit l'opérateur $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ en posant $\mathrm{dom(S+T)} = \mathrm{dom(S)} \cap \mathrm{dom(T)}$ et en posant $(\mathrm{S} + \mathrm{T})(x) = \mathrm{S}(x) + \mathrm{T}(x)$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{dom(S+T)}$.

Si S est une application linéaire usuelle de X dans Y, elle définit un opérateur de la façon la plus évidente : on pose $\mathrm{dom(S)} = \mathrm{X}$ et $\mathrm{S}(x) \in \mathrm{Y}$ aura le sens habituel pour tout $x \in \mathrm{X}$; si T est un opérateur de X dans Y, le domaine de $\mathrm{S} + \mathrm{T}$ sera alors égal à celui de l'opérateur T. Cette remarque sera utilisée lorsque $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ et $\mathrm{S} = -\lambda \, \mathrm{Id_X}$, pour introduire l'opérateur $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id_X}$, de même domaine que T.

Soient X, Y et Z des espaces vectoriels, T un opérateur de X dans Y et S un opérateur de Y dans Z ; on définit la composition ST de ces deux opérateurs en posant d'abord $\mathrm{dom(ST)} = \{x \in \mathrm{dom(T)} : \mathrm{T}(x) \in \mathrm{dom(S)}\}$ et en posant $(\mathrm{ST})(x) = \mathrm{S}(\mathrm{T}(x))$ pour tout $x \in \mathrm{dom(ST)}$.

L'attitude habituelle quand on travaille avec les opérateurs bornés continus est d'essayer de les prolonger le plus vite possible à l'espace complet convenable. Pour comprendre les définitions du précédent paragraphe, il faut se dire qu'on adopte l'attitude radicalement opposée : ici, on ne prend **aucune** initiative de prolongement ; si T_1 est défini sur D_1 et T_2 sur D_2, la seule chose que nous sommes obligés d'admettre est que les deux sont définis sur $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2$.

Exemple A. On prend $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_{\mathbf{A}})$ est l'espace des fonctions C^1 à support compact sur $\mathbb{R}$, et on pose $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}(f) = f'$ pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_{\mathbf{A}})$. On a bien f et $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}(f) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ puisque ce sont deux fonctions continues à support compact. On notera $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ l'espace des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à support compact.

La topologie revient

Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur T de E dans F est dit *densément défini* si son domaine dom(T) est dense dans E.

Remarque. L'exemple $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$ ci dessus est densément défini, puisque $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Définition 11.1.3. Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur de E dans F est dit *fermé* si son graphe est un sous-espace fermé de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. Un opérateur de E dans F est dit *fermable* s'il admet une extension fermée.

Soit S une extension fermée de l'opérateur T ; alors le fermé Gr(S) contient Gr(T), donc son adhérence $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$. Il s'ensuit qu'un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$ est le graphe d'un opérateur. On appellera *fermeture* de l'opérateur T l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}$ tel que $\mathrm{Gr}(\overline{\mathrm{T}}) = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})}$. En particulier, pour que l'opérateur T soit fermable il faut et il suffit que l'on ait $\overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T})} \cap (\{0\} \times \mathrm{F}) = \{(0,0)\}$. On en déduit immédiatement :

Proposition 11.1.1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* T *un opérateur de* E *dans* F *; pour que l'opérateur* T *soit fermable il faut et il suffit que pour toute suite* (x_n) *de* dom(T) *qui converge vers* 0 *dans* E *et telle que* $\mathrm{T}(x_n)$ *converge dans* F *vers un vecteur* y*, on ait* $y = 0$.

Exemple. Opérateur diagonal (non borné) Δ_α. On considère une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *quelconque* de scalaires, et on veut définir avec cette suite un opérateur (non borné) de ℓ_2 dans ℓ_2, qui agira sur $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{dom}(\Delta_\alpha)$ par

$$\Delta_\alpha(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Il y a un choix particulièrement naturel pour la définition de Δ_α (choix qui sera conservé dans la suite du chapitre). C'est de dire que $x \in \ell_2$ est dans le domaine **exactement quand** son candidat-image est dans ℓ_2,

$$\mathrm{dom}(\Delta_\alpha) = \{x \in \ell_2 : \sum |\alpha_n|^2\, |x_n|^2 < +\infty\}.$$

Il est clair que ce domaine contient toutes les suites à support fini, donc le domaine est dense (Δ_α est densément défini). De plus on peut décrire $\mathrm{dom}(\Delta_\alpha)$ par une seule formule : c'est l'espace vectoriel des suites scalaires $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_n (1 + |\alpha_n|^2)\, |y_n|^2 < +\infty.$$

On voit que l'ensemble des couples $(x, \Delta_\alpha(x))$ avec la topologie induite par $\ell_2 \times \ell_2$, s'identifie naturellement à un espace $\mathrm{L}_2(\mathbb{N}, \mu)$ pour une certaine mesure μ, la mesure μ sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu\big(\{n\}\big) = 1 + |\alpha_n|^2$ pour tout $n \ge 0$. Le graphe de Δ_α est donc fermé dans $\ell_2 \times \ell_2$ puisqu'il est complet. On peut aussi montrer directement que le graphe est fermé : si $(x^{(k)})$ est une suite du domaine qui converge vers x, et telle que $\Delta(x^{(k)})$ converge vers $y \in \ell_2$, on notera d'abord que la suite $(\Delta(x^{(k)}))$ doit être bornée ; il existe donc M tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \, |x_n^{(k)}|^2 \le \mathrm{M}^2$$

pour tout k ; la convergence ℓ_2 de la suite $x^{(k)}$ implique que chaque coordonnée $x_n^{(k)}$ converge vers la coordonnée correspondante x_n de la limite x. On déduit de l'inégalité précédente, pour tout N,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} |\alpha_n|^2 \, |x_n|^2 \le \mathrm{M}^2 \, ;$$

il en résulte que $\sum |\alpha_n|^2 \, |x_n|^2 < +\infty$ et on a montré que x est dans le domaine.

Exemple 11.1.5. Reprenons l'opérateur $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$ de l'exemple **A**, défini sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. On va montrer que $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$ est fermable et isoler un candidat pour la fermeture.

Supposons que (f, g) soit dans l'adhérence de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_{\mathbf{A}})$; il existe une suite $(f_n) \subset \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ telle que $f_n \to f$ dans L_2 et $f'_n \to g$ dans L_2. Quitte à passer à une sous-suite on peut supposer qu'il existe $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{E}$ soit négligeable et tel que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in \mathrm{E}$. En particulier, E est non vide, et il est même dense dans $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \mathrm{E}$, et soit $t \in \mathrm{E}$; pour tout n on a

$$f_n(t) = f_n(a) + \int_a^t f'_n(s) \, ds,$$

et la convergence dans L_2 implique la convergence des intégrales sur les segments bornés, donc compte tenu de tout

$$f(t) = f(a) + \int_a^t g(s) \, ds.$$

La fonction continue $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(t) = f(a) + \int_a^t g(s) \, ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ coïncide avec f pour tout $t \in \mathrm{E}$, c'est à dire presque partout ; il en résulte que f "est" continue, et qu'il existe une fonction $g \in \mathrm{L}_2$ telle que

$$\forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s) \, ds.$$

On introduit l'ensemble

$$\mathbf{G} = \{(f, g) \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \forall t < u, \quad f(u) = f(t) + \int_t^u g(s) \, ds\}$$

(pour être vraiment correct, on devrait dire : l'ensemble des couples (f, g) tels que la classe f admette un représentant $\tilde{f}$ pour lequel, pour tous $t < u$, on ait $\tilde{f}(u) = \ldots$). On vient de montrer que l'adhérence de $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_{\mathbf{A}})$ est contenue dans $\mathbf{G}$; pour savoir que $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$ est fermable, il suffit de voir que $\mathbf{G}$ est un graphe : c'est clairement un espace vectoriel, et si $(0, g) \in \mathbf{G}$, on aura $\int_t^u g = 0$ pour tous $t < u$, ce qui signifie que g est orthogonale à toutes les fonctions en escalier, qui sont denses dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, donc $g = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

En modifiant très légèrement ce qui précède, on peut montrer que $\mathbf{G}$ est fermé, mais on le retrouvera plus loin en montrant que $\mathbf{G}$ est en fait *égal* à l'adhérence de $\mathrm{G}r(\mathrm{T}_{\mathbf{A}})$. On aura ainsi complètement identifié la fermeture $\overline{\mathrm{T}}_{\mathbf{A}}$ de l'opérateur $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$.

On appelle $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$ (espace de Sobolev) l'espace des fonctions $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ telle que $(f, g) \in \mathbf{G}$. On dit que g est la *dérivée généralisée* de f, et on note simplement $g = f'$. La fermeture de l'exemple $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$ est donc (comme on le montrera plus loin) l'opérateur $\overline{\mathrm{T}}_{\mathbf{A}}$ de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même dont le domaine est $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$ et qui est défini par $\overline{\mathrm{T}}_{\mathbf{A}}(f) = f'$ (généralisée) pour $f \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R})$.

Pour tout intervalle borné $[a, b]$, on appelle $\mathrm{H}_1([a, b])$ l'espace des fonctions f continues sur $[a, b]$ telles qu'il existe $g \in \mathrm{L}_2([a, b])$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt.$$

On montre facilement avec Fubini une formule d'intégration par parties pour les dérivées généralisées. Le meilleur cadre est le suivant : on suppose que f_1, f_2 sont deux fonctions dans $\mathrm{L}_1([a, b])$ et que $\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{F}_1(a) + \int_a^x f_1(t)\, dt$ et $\mathrm{F}_2(x) = \mathrm{F}_2(a) + \int_a^x f_2(t)\, dt$ pour tout x de $[a, b]$. On a alors

$$\int_a^b \mathrm{F}_1(t) f_2(t)\, dt = \Big[\mathrm{F}_1(t)\mathrm{F}_2(t)\Big]_a^b - \int_a^b f_1(t)\mathrm{F}_2(t)\, dt.$$

On peut encore dire, dans un sens légèrement différent du sens adopté pour $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, que f_j est la dérivée généralisée de F_j sur $[a, b]$, $j = 1, 2$.

En particulier, on obtient la formule d'intégration par parties dans $\mathrm{H}^1([a, b])$: si $f, g \in \mathrm{H}^1([a, b])$, on a

$$\int_a^b f(t) g'(t)\, dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t)\, dt.$$

Revenons sur la notion de dérivée généralisée. Si $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ et si φ est C^1 à support compact, on a

$$\text{(D)} \qquad \int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} f'\varphi.$$

Il suffit d'appliquer la formule précédente à un intervalle $[a, b]$ assez grand pour que φ soit nulle hors de $[a, b]$.

C'est la propriété (D) précédente qui permet d'étendre la définition de H^1 au cas de plusieurs dimensions. Par exemple, on dit que $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ si $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ et s'il existe deux fonctions $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ qui seront les *dérivées partielles faibles* de f, ce qui signifie que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} g_j(x)\varphi(x)\, dx$$

pour $j = 1, 2$ et pour toute fonction φ qui soit C^1 à support compact sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions de cet espace $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ne sont plus nécessairement continues, ni même bornées sur les compacts de $\mathbb{R}^2$.

Cours n° 21, mercredi 5 décembre 2001.

On va vérifier en détail la densité de $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Etant donnés une fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, on peut d'abord trouver $\mathrm{A} > 0$ tel que $f_1 = \mathbf{1}_{[-\mathrm{A},\mathrm{A}]} f$ vérifie $\|f_1 - f\|_2 < \varepsilon$. Sur un intervalle borné on sait trouver g_1 continue sur $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ telle que $\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} |f_1 - g_1|^2 < \varepsilon^2$. Si on prolonge g_1 en $\widetilde{g}_1$ sur $\mathbb{R}$ en lui donnant la valeur 0 hors de $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$, la fonction $\widetilde{g}_1$ vérifie $\|f_1 - \widetilde{g}_1\|_2 < \varepsilon$, mais $\widetilde{g}_1$ n'est pas nécessairement continue. Il est facile de corriger en trouvant g continue sur $\mathbb{R}$, nulle hors de $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ et telle que $\|g_1 - g\|_2 < \varepsilon$. Pour finir il faut approcher (en norme L_2) une fonction continue g à support compact par une fonction C^1 à support compact.

On pose pour $h > 0$ petit, disons $0 < h < \mathrm{A}$

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t)dt.$$

Puisque g est continue, cette fonction G est de classe C^1. De plus, on voit que si $h < \mathrm{A}$, la fonction G est nulle hors de $[-2\mathrm{A}, 2\mathrm{A}]$; avec la continuité uniforme de g on voit que pour h assez petit on aura $\|\mathrm{G} - g\|_\infty < \varepsilon/(2\sqrt{\mathrm{A}})$ si on veut. Alors pour finir cette trop longue histoire

$$\|\mathrm{G} - g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{G}(x) - g(x)|^2 \, dx = \int_{-2\mathrm{A}}^{2\mathrm{A}} |\mathrm{G}(x) - g(x)|^2 \, dx \le 4\mathrm{A} \, \|\mathrm{G} - g\|_\infty^2 < \varepsilon^2.$$

La construction de G est un cas très particulier d'utilisation d'une *convolution*. Si on pose $k = h^{-1} \mathbf{1}_{[-h,0]}$, alors k est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale un, et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{G}(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-t) g(t) \, dt = (k * g)(x)$$

est la convolée de k et de g.

On va maintenant montrer, comme promis, que l'adhérence du graphe de l'exemple $\mathrm{T}_{\mathbf{A}}$ est *égale* au graphe partiel $\mathbf{G}$ de la leçon précédente. Il faut montrer que pour tout couple $(f, g) \in \mathbf{G}$, où $f \in \mathrm{H}_1(\mathbb{R})$ et où $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ est la dérivée généralisée de f, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ telle que $\|f - \varphi\|_2 < \varepsilon$ et $\|g - \varphi'\|_2 < \varepsilon$.

On commence par approcher (f, g) par $(f_1, g_1) \in \mathbf{G}$ avec f_1 (et donc g_1 aussi) nulles hors d'un intervalle borné $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$. Pour y arriver, on fixe une fonction $\theta \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ telle que $\theta(0) = 1$, et on définit une suite (θ_n) de fonctions par $\theta_n(x) = \theta(x/n)$. On vérifie que pour tout n, la fonction $f_n = \theta_n f$ admet pour dérivée généralisée $g_n = \theta'_n f + \theta_n g$; ceci résulte de la formule d'intégration par parties. Ensuite pour toute fonction $h \in \mathrm{L}_2$, on vérifie que $\|\theta_n h - h\|_2$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, en appliquant le théorème de convergence dominée (on a $|\theta_n(x)| \le \|\theta\|_\infty$ pour tout x et tout n, et $\theta_n(x) \to \theta(0) = 1$, simplement) à la suite des fonctions $x \to |\theta_n(x) h(x) - h(x)|^2$.

On a donc $f_n \to f$ en norme L_2, et $\theta_n g \to g$ en norme L_2. Par ailleurs $|\theta'_n(x)| = n^{-1} |\theta(x/n)| \le n^{-1} \|\theta'\|_\infty$ implique $\|\theta'_n f\|_2 \to 0$; pour n assez grand, on aura donc $\|f_n - f\|_2 < \varepsilon$ et $\|g_n - g\|_2 < \varepsilon$, et f_n, g_n sont à support borné. On renommera (f_1, g_1) ce couple (f_n, g_n) à support borné, disons à support dans $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$, et $\mathrm{A} \ge 1$.

On a $f_1(-\mathrm{A}) = f_1(\mathrm{A}) = 0$, donc $\int g_1 = \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} g_1 = f_1(\mathrm{A}) - f_1(-\mathrm{A}) = 0$. Si on approche g_1 par une fonction continue h_1 sur $\mathbb{R}$, à support dans $[\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ et telle que $\|g_1 - h_1\|_2 < \varepsilon/(4\mathrm{A})$, on aura

$$\Bigl|\int_{\mathbb{R}} h_1\Bigr| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}} (h_1 - g_1)\Bigr| = \Bigl|\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} (h_1 - g_1)\Bigr| \le \sqrt{2\mathrm{A}}\,\|h_1 - g_1\|_2 < \varepsilon/(2\sqrt{\mathrm{A}}).$$

Pour finir, il faut rattraper la petite erreur d'intégrale avec une fonction continue χ à support dans $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$, linéaire par morceaux, égale à $1/\mathrm{A}$ au point 0. On a $\int \chi = 1$ et $\|\chi\|_\infty \le 1/\mathrm{A}$, $\|\chi\|_2 \le 1/\sqrt{\mathrm{A}}$. On pose $\alpha = \int h_1$ et $h = h_1 - \alpha\chi$; alors $\int h = 0$, $\|g_1 - h\|_2 \le \varepsilon/\mathrm{A}$ et on termine avec la fonction φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt,$$

qui est bien C^1, à support dans $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ et proche de f_1 en norme L_2. En effet, pour $x \in [-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ on a

$$|f_1(x) - \varphi(x)| = \Bigl|\int_{-\mathrm{A}}^{x} (g_1 - h)\Bigr| \le \sqrt{2\mathrm{A}}\,\|g_1 - h\|_2 \le \sqrt{2}\varepsilon/\sqrt{\mathrm{A}}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1 - \varphi|^2 = \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} |f_1 - \varphi|^2 \le 4\,\varepsilon^2.$$

Inverse (non borné) d'un opérateur injectif

Si T est un opérateur injectif, on peut définir de façon algébrique un inverse sur le domaine $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^{-1}) = \mathrm{T}(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$, en posant $\mathrm{T}^{-1}(y) = x$ si et seulement si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y = \mathrm{T}(x)$;

Proposition 11.1.2. *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé.*

Démonstration. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur fermé de E dans F ; on a $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^{-1}) = \rho(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$ où $\rho : \mathrm{E}\times\mathrm{F} \to \mathrm{F}\times\mathrm{E}$ est l'homéomorphisme $(x, y) \to (y, x)$, donc $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^{-1})$ est fermé.

Exemple. Considérons $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathrm{L}_2(0, 1)$; soit V l'opérateur borné de “primitive nulle en 0”, $(\mathrm{V}f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, et posons $\mathrm{D} = \mathrm{im}(\mathrm{V})$. On a vu que V est injectif (exemples 7.3.2). On peut donc définir l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ de domaine D en posant pour tout $g \in \mathrm{D}$

$$(\mathrm{T}g = f) \Leftrightarrow (\mathrm{V}f = g).$$

Cet opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ est donc injectif lui-aussi. Le domaine de V^{-1} est $\mathrm{im}(\mathrm{V})$; on a vu que $\mathrm{im}(\mathrm{V})$ est dense (exemples 7.3.2), donc V^{-1} est densément défini. En fait $\mathrm{im}(\mathrm{V})$ est exactement l'espace des fonctions de $\mathrm{H}^1([0, 1])$ nulles en 0. Puisque V est continu, son graphe est fermé, donc V^{-1} est fermé puisque son graphe s'obtient à partir de celui de V par l'homéomorphisme $(x, y) \to (y, x)$ de $\mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_2$ sur lui-même.

11.2. Spectre des opérateurs fermés

Définition 11.2.1. Soient T un opérateur d'un espace de Banach complexe E dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$; on dit que λ est une *valeur régulière* de T si $\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une application linéaire bijective de dom(T) sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire *continue* de E dans lui-même. On appelle *spectre* de T le complémentaire Sp(T) dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de T.

Soit T un opérateur sur un espace de Banach complexe E ; désignons par Ω_T l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont valeur régulière de T ; pour $\lambda \in \Omega_\mathrm{T}$, on pose

$$\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = (\mathrm{T}-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$$

et on appelle $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ la *résolvante* de T.

Seuls les opérateurs fermés sont intéressants pour la théorie spectrale : en effet, si T admet une valeur régulière λ, l'opérateur $(\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{-1}$ est continu donc à graphe fermé ; on en déduit que son inverse $\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est fermé, et il en résulte facilement que T lui-même est fermé. Autrement dit : si T n'est pas fermé, T n'admet aucune valeur régulière, donc on a toujours $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathbb{C}$.

Exemple. Opérateur diagonal. Pour toute suite scalaire $(\alpha_n)_{n\ge 0}$, on a défini l'opérateur (en général non borné) Δ_α sur $\ell_2(\mathbb{N})$.

On va montrer que si la suite (α_n) est réelle, alors tous les $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ sont des valeurs régulières pour Δ_α. En effet, si $\lambda = a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, on remarque que $|\alpha_n-\lambda| \ge |b|$ pour tout n, ce qui permet de définir un opérateur diagonal borné S_λ de multiplication par la suite $1/(\alpha_n-\lambda)$, suite bornée par $|b|^{-1}$. De plus, on vérifie que l'image de cet opérateur borné S_λ est contenue dans $\mathrm{dom}(\Delta_\alpha)$. En effet, si $x\in\mathrm{im}(\mathrm{S}_\lambda)$, on a $x_n = y_n/(\alpha_n-\lambda)$ pour un certain $y\in\ell_2$, la condition pour que x appartienne au domaine est alors

$$\sum_n \Bigl(\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_n-\lambda|}\Bigr)^2 |y_n|^2 < +\infty.$$

Cette condition est réalisée, parce que la suite $(\alpha_n/(\alpha_n-\lambda))$ est aussi une suite bornée,

$$\Bigl|\frac{\alpha_n}{\alpha_n-\lambda}\Bigr| = \Bigl|\frac{\alpha_n-\lambda+\lambda}{\alpha_n-\lambda}\Bigr| \le 1+\frac{|\lambda|}{|b|}.$$

Ensuite, il est immédiat de voir que $(\Delta_\alpha-\lambda\,\mathrm{Id})\circ\mathrm{S}_\lambda = \mathrm{Id}$, et encore plus simple de voir que $\mathrm{S}_\lambda\circ(\Delta_\alpha-\lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

En fait, on peut voir dans le cas général que le spectre de Δ_α est l'adhérence dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs $(\alpha_n)_{n\ge 0}$. Comme toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$ admet une suite dense, on trouve que pour toute partie fermée non vide F de $\mathbb{C}$, on peut construire un opérateur T d'un espace de Hilbert H dont le spectre Sp(T) soit égal à F.

Proposition 11.2.2. *Le spectre d'un opérateur fermé* T *d'un espace de Banach complexe* E *dans lui même est une partie fermée de* $\mathbb{C}$, *et l'application* $\lambda\to\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$ *est continue de* $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Démonstration. Supposons que $\lambda\in\mathbb{C}$ soit une valeur régulière pour T ; montrons que les valeurs μ voisines de λ sont elles aussi régulières et que $\mu\to\mathrm{R}_\mu(\mathrm{T})$ est continue au point λ, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose donc que $\mathrm{T}-\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une bijection de $\mathrm{D}=\mathrm{dom}(\mathrm{T})$

sur E, avec un inverse borné $\mathrm{S} = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, bijection de E sur D. On va montrer que pour tout ε complexe tel que $|\varepsilon| < \|\mathrm{S}\|^{-1}$, on peut, étant donné $y \in \mathrm{E}$ quelconque, résoudre avec solution unique l'équation

$$x \in \mathrm{D} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(x) - (\lambda + \varepsilon)x = y. \tag{1}$$

Ceci signifiera déjà que $\mathrm{T} - (\lambda + \varepsilon)\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une bijection de D sur E. La forme de l'inverse montrera que c'est un opérateur borné S_ε, dépendant de ε de façon continue.

Comme S est une bijection de E sur D, tout élément $x \in \mathrm{D}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \mathrm{S}(z)$, $z \in \mathrm{E}$, et alors $\mathrm{T}(x) - \lambda x = z$. Le problème (1) équivaut donc à trouver une solution z unique à

$$z \in \mathrm{E},\ x = \mathrm{S}(z) \quad \text{et} \quad z - \varepsilon\,\mathrm{S}(z) = y \tag{2}$$

ou encore

$$z \in \mathrm{E},\ x = \mathrm{S}(z) \quad \text{et} \quad (\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \varepsilon\,\mathrm{S})(z) = y. \tag{2b}$$

Comme on a supposé $\|\varepsilon \mathrm{S}\| < 1$, on sait que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} - \varepsilon\,\mathrm{S}$ est une bijection de E sur E, et que son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathrm{S}^n$, donc (2$b$) équivaut à

$$x = \mathrm{S}(z) \quad \text{et} \quad z = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathrm{S}^n\Bigr)(y). \tag{3}$$

On a alors $x = \bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathrm{S}^{n+1}\bigr)(y)$. Ce raisonnement montre qu'il y a au plus une solution x, celle qui vient d'être donnée, et on vérifie que ce vecteur x est bien la solution cherchée en remontant les équivalences. On a ainsi trouvé $\mathrm{R}_{\lambda+\varepsilon}(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathrm{S}^{n+1} \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, qui dépend bien continûment de ε.

MT404, Cours n° 22, lundi 10 décembre 2001.

Rappel. Soit T un opérateur (non borné et fermé) sur un espace de Banach complexe E. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est *une valeur régulière pour* T si $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est une bijection de dom(T) sur E, dont l'inverse (noté $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$) est continue de E dans E.

Si E est un espace de Banach et T un opérateur fermé sur E, on est sûr que l'inverse algébrique S de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est continu quand il existe, puisque S est alors une application linéaire de graphe fermé définie sur un espace de Banach (théorème du graphe fermé).

Considérons par exemple l'opérateur V de primitive nulle en 0, comme endomorphisme de $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,1)$ (complexe). On sait que V est injectif, ce qui permet de parler de son inverse non borné $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$, défini sur le domaine (dense) V(H). Il est évident que 0 est valeur régulière de T puisqu'on vient de dire que $\mathrm{T} = \mathrm{T} - 0\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est une bijection de dom(T) sur H, et l'inverse est V, dont on sait depuis longtemps qu'il est borné de H dans H.

Exemple de spectre.

Nous allons montrer que le spectre de l'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ est vide : on vient de dire que 0 est valeur régulière de T et $\mathrm{R}_0(\mathrm{T}) = \mathrm{V}$. Pour $\lambda \neq 0$, cherchons à résoudre l'équation $\mathrm{T}x - \lambda x = y$, pour $y \in \mathrm{H}$ donné (on cherche $x \in \mathrm{D} = \mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{V}(\mathrm{H})$). Puisque T est surjectif, on peut écrire $y = \mathrm{T}z$, avec $z = \mathrm{V}(y) \in \mathrm{D}$. En appliquant V on trouve $x - \lambda \mathrm{V}x = z$, soit $\mathrm{V}x - \lambda^{-1}x = -\lambda^{-1}z$. On sait que λ^{-1} n'est pas dans le spectre de V (qui est réduit à $\{0\}$) donc on peut résoudre,

$$x = \mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})(-\lambda^{-1}z) = -\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})\,(\mathrm{V}y).$$

On vient donc d'identifier $\mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T}) = -\lambda^{-1}\mathrm{R}_{\lambda^{-1}}(\mathrm{V})\,\mathrm{V}$. Finalement, on constate que tout nombre complexe est valeur régulière de T, donc le spectre de $\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}$ est vide.

Exemple. Spectre de l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}$.

On considère sur $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ l'opérateur de dérivation T, de domaine $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, défini par $\mathrm{T}(f) = f'$ (dérivée généralisée) pour toute $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.

On se donne une fonction réelle $\theta \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ telle que $\int \theta^2 = 1$, puis on pose $\theta_n(x) = \theta(x/n)/\sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$. On regarde pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ définie par $f_n(x) = \theta_n(x)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$; on voit que $f_n' = i\alpha f_n + \theta_n'\,\mathrm{e}^{i\alpha x}$. Du point de vue des normes,

$$\int |f_n(x)|^2\,dx = \int |\theta(x/n)|^2\,dx/n = \int |\theta(t)|^2\,dt = 1$$

alors que

$$\int |\theta_n'(x)\,\mathrm{e}^{i\alpha x}\,|^2\,dx = \int |\theta_n'(x)|^2\,dx = n^{-2} \int |\theta'(t)|^2\,dt \to 0,$$

ce qui montre que $f_n' - \alpha f_n$ tend vers 0, alors que $\|f_n\|_2 = 1$ pour tout n. Cela implique, comme on l'a déjà vu dans le cas borné, qu'il ne peut pas exister un inverse borné S pour $\mathrm{T} - i\alpha\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$. En effet, on aurait que $\|\mathrm{S}(f_n' - \alpha f_n)\| \leq \|\mathrm{S}\|\,\|f_n' - \alpha f_n\|$ tendrait vers 0, alors qu'il faudrait que $\mathrm{S}(f_n' - \alpha f_n) = f_n$ pour tout n.

Le spectre de T *contient donc l'axe imaginaire* $i\,\mathbb{R}$.

On va maintenant montrer que le spectre de T est exactement égal à $i\mathbb{R}$, en calculant la résolvante pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$, par exemple $\lambda = -a + ib$ avec $a > 0$. On veut résoudre en f, pour une h quelconque donnée dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, l'équation

$$(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(f) = f' - \lambda f = h$$

avec de plus solution f unique. Commençons par l'unicité ; si f_1, f_2 sont deux solutions, considérons la différence $\varphi = f_2 - f_1 \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$; elle vérifie l'équation $\varphi' - \lambda\varphi = 0$, mais au sens des dérivées généralisées. Fixons $a < b$ et considérons $\psi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\varphi(x)$. On voit que sa dérivée généralisée est $-\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\varphi(x) + \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\varphi'(x) = 0$. Il en résulte que $\psi(b) - \psi(a) = 0$, pour tous a, b ; la fonction ψ prend une valeur constante c et $\varphi(x) = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; il reste à dire que $x \to \mathrm{e}^{\lambda x}$ n'est pas dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, ce qui implique que $c = 0$ et $\varphi = 0$.

Pour montrer l'existence de f, on va essayer l'une des formules classiques en théorie des équations différentielles linéaires,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, h(t)\, dt.$$

Pour commencer, la formule a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque

$$|f(x)| \le \mathrm{e}^{-ax} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{at}\, |h(t)|\, dt \le \mathrm{e}^{-ax} \Bigl(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{2at}\ dt \Bigr)^{1/2} \|h\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, \|h\|_2.$$

On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\lambda(x-t)}\, h(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda s}\, h(x-s)\, ds.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz pour la mesure finie $\mathbf{1}_{s \ge 0}\, \mathrm{e}^{-as}\ ds$ on aura pour chaque x

$$|f(x)|^2 \le \Bigl(\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-as}\ ds \Bigr) \Bigl(\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-as}\, |h(x-s)|^2\, ds \Bigr)$$

puis avec Fubini

$$\int |f(x)|^2\, dx \le a^{-1} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-as} \Bigl(\int |h(x-s)|^2\, dx \Bigr)\, ds = a^{-2}\, \|h\|_2^2.$$

On a donc $f \in \mathrm{L}_2$, et la formule d'intégration par parties permet de voir à partir de la définition de f que $f' = \lambda f + h$ est la dérivée faible de f, donc $f' \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, et $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ est dans le domaine de T. De plus, la correspondance $h \to f$ est d'après le calcul précédent un opérateur linéaire borné S_λ de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, et c'est l'inverse de $\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{H}}$. Quand $\operatorname{Re}\lambda > 0$, disons $\lambda = a + ib$ avec $a > 0$, on travaillera avec la mesure finie $-\mathbf{1}_{s \le 0}\, \mathrm{e}^{as}\ ds$. Finalement, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\lambda \ne 0$ est régulier pour T.

11.3. Transposés et adjoints

Exemple introductif

Considérons l'opérateur Δ diagonal non borné sur ℓ_2 qui associe à $x = (x_n) \in \ell_2$ le vecteur $(2^n x_n)$; si on compose Δ avec la forme linéaire m_1 continue sur ℓ_2 définie par $y \to \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} y_n$, on obtient la forme linéaire $m_1 \circ \Delta$, définie sur le domaine de Δ par

$$x = (x_n) \to \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\,;$$

cette forme $m_1 \circ \Delta$ ne peut pas se prolonger en forme linéaire continue sur ℓ_2, car elle n'est pas bornée sur le domaine : si pour tout $n \ge 1$ on pose $x^{(n)} = (1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}, 0, \ldots)$ de façon que $\|x^{(n)}\| = 1$, on voit que $|(m_1 \circ \Delta)(x^{(n)})| = \sqrt{n}$.

En revanche, si nous considérons la forme linéaire m_2 définie par $y \to \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n} y_n$, on obtient, en composant avec Δ, la forme linéaire définie sur $\mathrm{dom}(\Delta)$ par

$$x = (x_n) \to \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} x_n\,;$$

cette forme linéaire $m_2 \circ \Delta$ sur $\mathrm{dom}(\Delta)$ peut se prolonger en forme linéaire continue sur ℓ_2, car elle est bornée sur le domaine (muni de la norme ℓ_2 ; de plus le prolongement sera unique parce que le domaine de Δ est dense dans ℓ_2),

$$|m_2(\Delta(x))| = \Bigl|\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} x_n\Bigr| \le \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n}\Bigr)^{1/2} \|x\|_2.$$

La forme linéaire m_2 sera dans le domaine de *l'adjoint* (non borné) de Δ, défini plus loin ; la forme m_1 n'y sera pas.

Définition. Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur densément défini de E dans F ; on définit *le transposé* de T, qui est un opérateur de F^* dans E^*, de la façon suivante : le domaine de ${}^t\mathrm{T}$ est l'ensemble des $y^* \in \mathrm{F}^*$ telles que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to y^*(\mathrm{T}(x))$ soit continue (en ayant muni l'espace vectoriel $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ de la norme induite par celle de E). Dans le cas où $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, cette forme linéaire continue, définie sur le sous-espace dense $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$, se prolonge de façon unique en une forme linéaire $x^* \in \mathrm{E}^*$ continue sur E. On pose alors ${}^t\mathrm{T}(y^*) = x^*$. On a donc

$$({}^t\mathrm{T})(y^*)(x) = y^*(\mathrm{T}(x))$$

pour tous $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y^* \in \mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$.

Lorsque E et F sont deux espaces de Hilbert et T un opérateur densément défini de E dans F, on définit un opérateur T^* de F dans E de la façon suivante : on définit $\mathrm{T}^*(y) = x$ si la forme linéaire ℓ_y associée à $y \in \mathrm{H}$ est dans $\mathrm{dom}({}^t\mathrm{T})$, et si $\ell_x = x^* = {}^t\mathrm{T}(\ell_y)$. Le vecteur y est donc dans le domaine de T^* si et seulement si la forme linéaire $\ell : u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}(u), y\rangle$ est continue sur $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ (muni de la norme de E), et le couple $(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$ est dans le graphe de T^* si et seulement si

$$(*) \qquad \langle \mathrm{T}(u), y\rangle = \langle u, x\rangle$$

pour tout $u \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui signifie que x représente la forme linéaire ℓ (et son prolongement continu à E). On a donc

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*) = \{(y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E} : \forall z \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}),\ \langle x, z\rangle = \langle y, \mathrm{T}(z)\rangle\}.$$

En effet, la forme linéaire $u \to \langle \mathrm{T}(u), y\rangle$ est alors continue puisqu'elle est égale à $u \to \langle u, x\rangle$ et dans ce cas on a $x = \mathrm{T}^*(y)$ par définition de l'adjoint. Il est clair que la condition $(*)$ définit un ensemble fermé de couples (y, x), ce qui montre que T^* est toujours un opérateur fermé.

Définition. On dit que T (densément défini sur un Hilbert) est *autoadjoint* si $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$.

Sur le produit $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ de deux espaces de Hilbert on introduit le produit scalaire

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = \langle x, x'\rangle + \langle y, y'\rangle.$$

Proposition. *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* T *un opérateur densément défini de* E *dans* F *; soit* $\mathrm{U} \in \mathcal{L}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}, \mathrm{F} \times \mathrm{E})$ *l'opérateur unitaire qui à* $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *associe*

$(-y, x) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$; *le graphe* $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ *de* T^* *est l'orthogonal dans l'espace de Hilbert* $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ *de l'image* $\mathrm{U}(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$.

Démonstration. C'est à peu près évident sur la définition d'un élément du graphe de T^* : le couple $(\xi, \eta) \in \mathrm{F} \times \mathrm{E}$ est dans le graphe de T^* si et seulement si

$$\langle \mathrm{T}(x), \xi \rangle = \langle x, \eta \rangle$$

pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui équivaut à

$$\langle (-\mathrm{T}(x), x), (\xi, \eta) \rangle = 0$$

pour tout $(x, \mathrm{T}(x)) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$.

Exemple. L'opérateur diagonal $\Delta(x) = (2^n x_n)$ est autoadjoint.

On a défini le domaine de Δ par

$$\mathrm{D} = \{x = (x_n) \in \ell_2 : \sum |2^n x_n|^2 < +\infty\}.$$

On remarque d'abord que pour $x, y \in \mathrm{D}$ on a

$$\langle \Delta(x), y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{2^n y_n} = \langle x, \Delta(y) \rangle$$

ce qui montre que $\mathrm{D} \subset \mathrm{dom}(\Delta^*)$ et $\Delta^*(y) = \Delta(y)$ pour tout $y \in \mathrm{D}$. Montrons ensuite que $\mathrm{dom}(\Delta^*) \subset \mathrm{dom}(\Delta)$. Supposons que $y \in \mathrm{dom}(\Delta^*)$. Alors la forme linéaire $x \in \mathrm{D} \to \langle \Delta(x), y \rangle$ est continue sur ℓ_2, donc il existe une constante C telle que

$$\Bigl| \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x_n \overline{y_n} \Bigr| \le \mathrm{C} \, \|x\|_2$$

pour tout $x \in \mathrm{D}$. Pour tout entier $n \ge 0$ on définit un vecteur $x^{(n)}$ dont les coordonnées sont égales à $2^j y_j$ pour $0 \le j \le n$ et nulles ensuite ; on a $x^{(n)} \in \mathrm{D}$ et donc

$$\sum_{j=0}^{n} 4^j |y_j|^2 = \langle \Delta(x^{(n)}), y \rangle \le \mathrm{C} \, \|x^{(n)}\|_2 = \mathrm{C} \Bigl(\sum_{j=0}^{n} 4^j |y_j|^2 \Bigr)^{1/2}$$

d'où résulte $\sum_{j=0}^{n} 4^j |y_j|^2 \le \mathrm{C}^2$ pour tout n puis $\sum |2^n y_n|^2 < +\infty$, c'est à dire $y \in \mathrm{D}$. Finalement, $\mathrm{dom}(\Delta^*) = \mathrm{D} = \mathrm{dom}(\Delta)$ et on a en plus l'égalité des valeurs pour $y \in \mathrm{D}$: la conclusion est bien que $\Delta^* = \Delta$.

Cours n° 23, mercredi 12 décembre 2001.

Exemple.

On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et une classe φ de fonctions mesurables complexes. Pour chaque classe f, la classe du produit φf est bien définie, et il est légitime de l'appeler la classe produit φf.

On veut définir l'opérateur (non borné) M_φ sur $\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, opérateur de multiplication par φ. On commence par décider du domaine,

$$\mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi) = \{f \in \mathrm{L}_2 : \varphi f \in \mathrm{L}_2\}.$$

On pose ensuite naturellement lorsque $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$

$$\mathrm{M}_\varphi(f) = \varphi f \in \mathrm{L}_2.$$

On montre d'abord que M_φ est densément défini. Soit $\widetilde{\varphi}$ une vraie fonction mesurable dans la classe φ et posons pour tout entier $n \ge 1$

$$\mathrm{B}_n = \{\omega \in \Omega : |\widetilde{\varphi}(\omega)| < n\}\,;$$

c'est l'image inverse d'un ouvert de $\mathbb{C}$, donc $\mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$ pour tout n ; il est clair que la suite (B_n) est croissante et $\lim_n \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} = 1$ sur Ω. Soit $f \in \mathrm{L}_2$ quelconque ; on voit que $f_n = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} f$ est dans $\mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$ pour tout n (on a $|\varphi f_n| \le n|f| \in \mathrm{L}_2$) et la suite $|f_n - f|^2$ tend simplement vers 0 en étant dominée par la fonction intégrable fixe $|f|^2$: il résulte du théorème de convergence dominée que $\lim_n \int |f_n - f|^2 \, d\mu = 0$, ce qui montre que f est limite dans L_2 d'une suite (f_n) de points du domaine $\mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$.

On va montrer que $(\mathrm{M}_\varphi)^* = \mathrm{M}_{\overline{\varphi}}$, la multiplication par la fonction complexe conjuguée $\overline{\varphi}$. On note d'abord que $\mathrm{dom}(\mathrm{M}_{\overline{\varphi}}) = \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$. On commence par vérifier que $\mathrm{M}_{\overline{\varphi}} \subset (\mathrm{M}_\varphi)^*$, ce qui est très facile : il faut voir que pour $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$, $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_{\overline{\varphi}})$, on a

$$\langle \mathrm{M}_\varphi(f), g\rangle = \langle f, \mathrm{M}_{\overline{\varphi}}(g)\rangle\,;$$

c'est presque évident : les deux intégrales existent, et sont égales à

$$\langle \mathrm{M}_\varphi(f), g\rangle = \int_\Omega f(\omega)\varphi(\omega)\overline{g(\omega)}\, d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega)\overline{\overline{\varphi(\omega)}g(\omega)}\, d\mu(\omega) = \langle f, \mathrm{M}_{\overline{\varphi}}(g)\rangle.$$

Ensuite, il suffit pour terminer de montrer que $\mathrm{dom}((\mathrm{M}_\varphi)^*) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{M}_{\overline{\varphi}})$. Supposons donc que $g \in \mathrm{dom}((\mathrm{M}_\varphi)^*)$; il existe alors une constante C telle que

$$\Bigl|\int \varphi\, f\, \overline{g}\, d\mu\Bigr| = |\langle \mathrm{M}_\varphi(f), g\rangle| \le \mathrm{C}\, \|f\|_2$$

pour toute $f \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$; posons $f_n = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}\overline{\varphi} g$; on vérifie que $f_n \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$, et on obtient

$$\int_{\mathrm{B}_n} |\varphi|^2\, |g|^2\, d\mu = |\langle \mathrm{M}_\varphi(f_n), g\rangle| \le \mathrm{C}\, \|f_n\|_2 = \mathrm{C}\Bigl(\int_{\mathrm{B}_n} |\varphi|^2\, |g|^2\, d\mu\Bigr)^{1/2}$$

ce qui conduit à

$$\int_{\mathrm{B}_n} |\varphi|^2\, |g|^2\, d\mu \le \mathrm{C}^2$$

pour tout n, puis à $\int |\varphi|^2\, |g|^2\, d\mu < +\infty$, c'est à dire $\overline{\varphi} g \in \mathrm{L}_2$, ou bien $g \in \mathrm{dom}(\mathrm{M}_{\overline{\varphi}})$.

On remarque que $\mathrm{M}_{\overline{\varphi}}$ est fermé puisque c'est un adjoint ; en échangeant les rôles de φ et $\overline{\varphi}$ on déduit que M_φ est fermé (ça ne serait pas dur à faire directement).

Lorsque φ est une fonction réelle, on trouve donc un opérateur M_φ autoadjoint. C'est en fait un modèle universel pour les opérateurs autoadjoints : tout autoadjoint sur un espace de Hilbert complexe séparable est équivalent (dans un sens à préciser) à un opérateur de multiplication par une fonction réelle sur un espace L_2.

Opérateur symétrique

Soient H un espace de Hilbert réel ou complexe et T un opérateur densément défini ; on dit que T est *symétrique* si pour tous $x, y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ on a

$$\langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, \mathrm{T}(y)\rangle.$$

Cette relation montre que tout $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ est dans le domaine de T^*, et que $\mathrm{T}^*(y) = \mathrm{T}(y)$; autrement dit, T^* apparaît comme une extension de T ; il est facile de faire le chemin à l'envers : l'opérateur T est symétrique si et seulement si $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$.

Exemple. On va donner un exemple d'opérateur symétrique qui n'est pas autoadjoint. Posons $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1])$. Considérons l'opérateur T_0 dont le domaine est

$$\mathrm{D}_0 = \{f \in \mathrm{H}^1([0,1]) : f(0) = f(1) = 0\}$$

et qui est défini par $\mathrm{T}_0(f) = if'$ pour toute $f \in \mathrm{D}_0$; on va montrer que T_0 est symétrique, mais pas autoadjoint.

Avant tout on vérifie que D_0 est dense dans H : les fonctions affines par morceaux, nulles en 0 et 1, sont dans D_0, et elles sont denses dans $\mathrm{L}_2(0,1)$. On montre maintenant que T_0 est symétrique, c'est à dire que

$$\langle \mathrm{T}_0(f_1), f_2\rangle = \langle f_1, \mathrm{T}_0(f_2)\rangle$$

pour toutes $f_1, f_2 \in \mathrm{D}_0$. On a en effet en utilisant l'intégration par parties dans $\mathrm{H}^1([0,1])$

$$\langle f_1, \mathrm{T}_0(f_2)\rangle = \int_0^1 f_1\,\overline{(if_2')} = \bigl[f_1\,\overline{(if_2)}\bigr]_0^1 - \int_0^1 f_1'\,\overline{(if_2)} = \int_0^1 (if_1')\,\overline{f}_2 = \langle \mathrm{T}_0(f_1), f_2\rangle$$

(le terme $\bigl[\,.\,\bigr]_0^1$ est nul parce que toutes les fonctions sont nulles en 0 et en 1 par définition de D_0). Mais on voit que le même calcul fonctionnerait avec $f_1 \in \mathrm{D}_0$ et $f_2 \in \mathrm{H}^1([0,1])$,

$$\langle f_1, if_2'\rangle = \langle \mathrm{T}_0(f_1), f_2\rangle$$

ce qui montre que $\mathrm{H}^1([0,1]) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*)$, et que $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*)$ est strictement plus grand que $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_0)$ (on peut montrer que $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_0^*) = \mathrm{H}^1([0,1])$). L'opérateur T_0 n'est pas symétrique parce qu'il n'est "pas assez défini" : on peut trouver des extensions de T_0 qui sont autoadjointes : mais il existe aussi des exemples d'opérateurs symétriques qui n'admettent aucune extension autoadjointe.

Proposition. *Si* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est un opérateur hermitien borné* injectif, *son inverse (non borné)* S^{-1} *est autoadjoint.*

Démonstration. Le domaine de S^{-1} est l'image de S, qui est dense dans H parce que S est hermitien injectif. Montrons d'abord que S^{-1} est symétrique,

$$\langle \mathrm{S}^{-1}(x_1), x_2\rangle = \langle x_1, \mathrm{S}^{-1}(x_2)\rangle$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}^{-1}) = \mathrm{S}(\mathrm{H})$; on peut écrire $x_i = \mathrm{S}(y_i)$, $i = 1, 2$ et la relation voulue devient

$$\langle y_1, \mathrm{S}(y_2)\rangle = \langle \mathrm{S}(y_1), y_2\rangle,$$

qui est vraie parce que S est hermitien. Pour terminer il faut voir que $\mathrm{dom}((\mathrm{S}^{-1})^*) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{S}^{-1})$. Supposons que $\xi \in \mathrm{dom}((\mathrm{S}^{-1})^*)$; il existe alors $\eta = (\mathrm{S}^{-1})^*(\xi) \in \mathrm{H}$ tel que

$$\langle \mathrm{S}^{-1}(x), \xi\rangle = \langle x, \eta\rangle$$

pour tout $x = \mathrm{S}(y) \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}^{-1})$, c'est à dire que pour tout $y \in \mathrm{H}$

$$\langle y, \xi\rangle = \langle \mathrm{S}(y), \eta\rangle = \langle y, \mathrm{S}(\eta)\rangle\,;$$

ceci implique $\xi = \mathrm{S}(\eta) \in \mathrm{dom}(\mathrm{S}^{-1})$ et termine la preuve.

Exemple.

On considère l'opérateur T sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, de domaine $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, défini par $\mathrm{T}(f) = if'$ (dérivée généralisée). On va montrer que cet opérateur est autoadjoint.

On commence par montrer que T est symétrique. On remarque d'abord que si $f_1, f_2 \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\lim_n a_n = -\infty$, $\lim_n b_n = +\infty$, $f_1(a_n)\overline{f}_2(a_n) \to 0$ et $f_1(b_n)\overline{f}_2(b_n) \to 0$; il suffit de prendre $b_n \in [n, n+1]$ tel que

$$|f_1(b_n)\overline{f}_2(b_n)| \le \int_n^{n+1} |f_1(x)|\,|f_2(x)|\,dx = u_n$$

et la suite (u_n) tend vers 0 puisque $\sum u_n < +\infty$ (le produit $f_1\overline{f}_2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$) ; on procède de même du côté < 0 pour choisir les (a_n). On écrit ensuite

$$\langle \mathrm{T}(f_1), f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}} if_1'(x)\,\overline{f_2(x)}\,dx = \lim_n \int_{a_n}^{b_n} if_1'(x)\overline{f_2(x)}\,dx =$$

$$\lim_n \Big(\Big[if_1(x)\overline{f_2(x)} \Big]_{a_n}^{b_n} + \int_{a_n}^{b_n} f_1(x)\overline{if_2'(x)}\,dx \Big) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,\overline{if_2'(x)}\,dx = \langle f_1, \mathrm{T}(f_2)\rangle.$$

Montrons ensuite que $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^*) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. On suppose que g est dans le domaine de T^*. Il existe donc une fonction $h \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ telle que $ih = \mathrm{T}^*g$ vérifie

$$\langle \mathrm{T}f, g\rangle = \langle f, ih\rangle$$

pour toute f du domaine de T. On pose $\mathrm{H}(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si f est $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$, à support dans $[a, b]$, on écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{ih(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\overline{ih(x)}\,dx = \Big[f(x)\overline{i\mathrm{H}(x)} \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\overline{i\mathrm{H}(x)}\,dx,$$

soit

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{ih(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} if'(x)\overline{\mathrm{H}(x)}\,dx.$$

Si k est dans $\mathrm{L}_2([a, b])$, d'intégrale nulle, on la prolonge sur $\mathbb{R}$ en lui donnant la valeur 0 hors de $(a, b]$ et on définit $\mathrm{K}(x) = \int_{-\infty}^x k(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie que $\mathrm{K}(x) = 0$ pour tout x en dehors de $[a, b]$, donc K est dans $\mathrm{H}_1(\mathbb{R})$. On a vu (semaine précédente) qu'on peut trouver une suite (f_n, f_n') avec $f_n \in \mathrm{C}_1^{\mathrm{comp}}$ telle que $\|f_n - \mathrm{K}\|_2 \to 0$ et $\|f_n' - k\|_2 \to 0$. On en déduit, en passant à la limite dans $(*)$ appliquée à (f_n, f_n'), que

$$\int_a^b ik(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} ik(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{K}(x)\overline{ih(x)}\,dx = \int_a^b ik(x)\overline{\mathrm{H}(x)}\,dx.$$

On voit donc que la restriction r de $g - \mathrm{H}$ à l'intervalle $[a, b]$ est orthogonale à toute fonction $k \in \mathrm{L}_2([a, b])$ orthogonale à $\mathbf{1}_{(a,b)}$; il en résulte que r est constante sur $[a, b]$ (elle est dans le biorthogonal de $\mathbb{C}\mathbf{1}_{[a,b]}$, qui est égal à ce même sous-espace vectoriel fermé $\mathbb{C}\mathbf{1}_{[a,b]}$). Il en résulte pour tous $a < b$,

$$g(b) - g(a) = \mathrm{H}(b) - \mathrm{H}(a) = \int_a^b h(t)\,dt$$

ce qui montre que $h \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ est la dérivée généralisée de g, et montre que $g \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$.

MT404, Cours n° 24, lundi 17 décembre 2001.

Utilisation de la géométrie de $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$

Dans l'espace de Hilbert $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ (muni du produit scalaire indiqué précédemment, pour lequel $\|(x,y)\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ pour tout élément $(x,y) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$) on considère la "rotation" R définie par

$$\mathrm{R}\big((x,y)\big) = (-y, x)$$

pour tout $(x,y) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$. On voit que R est unitaire, et $\mathrm{R}^2 = -\,\mathrm{Id}$.

Soit d'autre part T un opérateur sur H, fermé et densément défini ; on rappelle que $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}^*)$ est l'orthogonal de $\mathrm{R}(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$ dans $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Puisque l'opérateur T est symétrique quand $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}^*$, on voit que T est symétrique lorsque $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ est orthogonal à $\mathrm{R}(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$. L'opérateur T est autoadjoint quand $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ est la somme directe orthogonale des deux sous-espaces vectoriel fermés $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{R}(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$.

Lemme. *Si* T *est fermé, densément défini, symétrique, et si* i *et* $-i$ *sont des valeurs régulières pour* T, *alors* T *est autoadjoint.*

Démonstration. On sait déjà que $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{R}(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$ sont deux sous-espaces vectoriels fermés orthogonaux dans $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Il suffit pour conclure de montrer que leur somme est égale à $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Donnons un point $(y_1, y_2) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ quelconque. On cherche $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ tels que

$$(\xi_1, \mathrm{T}(\xi_1)) + (-\mathrm{T}(\xi_2), \xi_2) = (y_1, y_2)$$

c'est à dire $\xi_1 - \mathrm{T}(\xi_2) = y_1$ et $\mathrm{T}(\xi_1) + \xi_2 = y_2$. Puisque i et $-i$ sont deux valeurs régulières pour T, on peut résoudre (en $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$) les équations $\mathrm{T}(x_1) + ix_1 = z_1$ et $\mathrm{T}(x_2) - ix_2 = z_2$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathrm{H}$. On obtient $\mathrm{T}(x_1 + ix_2) + (ix_1 + x_2) = z_1 + iz_2$ et $\mathrm{T}(ix_1 + x_2) - x_1 - ix_2 = iz_1 + z_2$, ce qui donne avec $\xi_1 = x_1 + ix_2$ et $\xi_2 = ix_1 + x_2$ les équations $\mathrm{T}(\xi_1) + \xi_2 = z_1 + iz_2$ et $\xi_1 - \mathrm{T}(\xi_2) = -iz_1 - z_2$. Pour obtenir le résultat voulu il suffit que $-iz_1 - z_2 = y_1$ et $z_1 + iz_2 = y_2$, soit $z_1 = \frac{1}{2}(iy_1 + y_2)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-y_1 - iy_2)$.

Conséquence. Revenons à l'opérateur $\mathrm{T}(f) = if'$, défini sur $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. On sait que T est fermé, densément défini, et on a vu qu'il est facile de montrer que T est symétrique. Par ailleurs, on a vu que le spectre de $-i\mathrm{T}$, l'opérateur de dérivation $f \to f'$, est égal à $i\mathbb{R}$, donc $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \mathbb{R}$, ce qui entraîne que $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$ et $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ existent. On retrouve ainsi que T est autoadjoint, avec moins de calculs.

Spectre des autoadjoints

Théorème 11.4.1. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur autoadjoint sur* H *; le spectre de* T *est réel :* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; notons b sa partie imaginaire, non nulle. Pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, on a $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle = \langle x, \mathrm{T}(x)\rangle$ donc $\langle \mathrm{T}(x), x\rangle \in \mathbb{R}$; la partie imaginaire de $\langle (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x), x\rangle$ est donc $-b\|x\|^2$. On en déduit que

$$|b|\,\|x\|^2 \le |\langle (\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x), x\rangle| \le \|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x)\|\,\|x\|,$$

donc $\|(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x)\| \ge |b|\,\|x\|$, pour tout vecteur $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Il en résulte que l'image $(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ est fermée dans H : supposons en effet que $(x_n) \subset \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et que $(\mathrm{T}x_n - \lambda x_n)$ converge vers $y \in \mathrm{H}$; d'après ce qui précède,

$$\|x_n - x_m\| \le |b|^{-1} \|(\mathrm{T}x_n - \lambda x_n) - (\mathrm{T}x_m - \lambda x_m)\| \to 0$$

donc (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un $x \in \mathrm{H}$; par conséquent, $\mathrm{T}x_n$ converge vers $y+\lambda x$; puisque T est fermé (parce qu'il est autoadjoint) et puisque $(x_n, \mathrm{T}(x_n)) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, on en déduit que $(x, y+\lambda x) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$, donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $y = (\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id_H})(x)$.

Pour finir, on va voir que l'image $(\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id_H})(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$ est dense dans H, en vérifiant que $y = 0_\mathrm{H}$ est le seul vecteur de H orthogonal à cette image ; si y est orthogonal à l'image, on aura

$$\langle \mathrm{T}x - \lambda x, y \rangle = 0$$

pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui montre que la forme linéaire $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \langle \mathrm{T}x, y\rangle$ est continue, puisqu'elle est égale à $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \to \lambda \langle x, y\rangle = \langle x, \overline{\lambda} y\rangle$; on en déduit que $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(y) = \mathrm{T}^*(y) = \overline{\lambda} y$; mais $\langle \mathrm{T}(y), y\rangle = \langle y, \mathrm{T}(y)\rangle = \lambda \langle y, y\rangle$ doit être réel, ce qui n'est possible que si $y = 0_\mathrm{H}$.

Il résulte de tout ce qui précède que $\mathrm{T} - \lambda \, \mathrm{Id_H}$ est bijective de $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ sur H, et que l'inverse est continue, de norme $\le 1/|b|$.

Voici une deuxième démonstration. On va montrer que $\mathrm{T} - i \, \mathrm{Id_H}$ est une bijection de $\mathrm{dom}(\mathrm{T})$ sur H, d'inverse continu. Comme ci-dessus, on commence avec l'inégalité facile $\|(\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H})(x)\|_\mathrm{H} \ge \|x\|_\mathrm{H}$ pour tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ (ici $b = 1$) ; ce premier pas montre que $\mathrm{T} - i \, \mathrm{Id_H}$ est injective, et que l'inverse, si par hasard il existe, sera de norme ≤ 1. Ensuite, on rappelle que puisque T est autoadjoint, on a

$$\mathrm{H} \times \mathrm{H} = \mathrm{Gr}(\mathrm{T}) \oplus \mathrm{R}(\mathrm{Gr}(\mathrm{T}))$$

ce qui permet de résoudre pour un $y \in \mathrm{H}$ quelconque l'équation

$$(x_1, \mathrm{T}(x_1)) + (-\mathrm{T}(x_2), x_2) = (0, y).$$

On en déduit $x_1 - \mathrm{T}(x_2) = 0$, $\mathrm{T}(x_1) + x_2 = y$, donc $\mathrm{T}(x_1 + i x_2) - i(x_1 + i x_2) = y$.

11.4. Théorème de représentation

Produit de résolvantes

Proposition 11.4.2. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe,* T *un opérateur fermé sur* H *et* $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{T})$ *; posons* $r_\lambda = \mathrm{R}_\lambda(\mathrm{T})$, $r_\mu = \mathrm{R}_\mu(\mathrm{T})$ *; l'image* $r_\lambda r_\mu(\mathrm{H})$ *est égale au domaine de* T^2, *et* $r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda$.

Démonstration. Rappelons que

$$\mathrm{dom}(\mathrm{T}^2) = \{x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) : \mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})\}.$$

Considérons $x = r_\lambda(r_\mu(y))$, pour un $y \in \mathrm{H}$ quelconque. Par définition, on a $r_\lambda(\mathrm{H}) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}x - \lambda x = r_\mu(y) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$; par linéarité, $\mathrm{T}x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$.

Inversement supposons $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$; alors $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $x_1 = \mathrm{T}x - \lambda x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, ce qui permet de calculer $y = \mathrm{T}x_1 - \mu x_1$; on aura alors $r_\mu y = x_1$, puis $r_\lambda r_\mu y = x$.

Si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$, on vérifie immédiatement en développant que

$$(\mathrm{T} - \lambda)(\mathrm{T} - \mu)x = \mathrm{T}^2(x) - \lambda \mathrm{T}(x) - \mu \mathrm{T}(x) + \lambda\mu x = (\mathrm{T} - \mu)(\mathrm{T} - \lambda)x.$$

En prenant l'inverse de cette relation sur l'image commune $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^2) = r_\lambda r_\mu(\mathrm{H}) = r_\mu r_\lambda(\mathrm{H})$ on obtient $r_\lambda r_\mu = r_\mu r_\lambda$: si $r_\lambda r_\mu(y) = x_1$ et $r_\mu r_\lambda(y) = x_2$, on aura

$$(\mathrm{T} - \mu)(\mathrm{T} - \lambda)(x_1) = y = (\mathrm{T} - \lambda)(\mathrm{T} - \mu)(x_2) = (\mathrm{T} - \mu)(\mathrm{T} - \lambda)(x_2)$$

ce qui implique que $x_1 = x_2$ puisque $(\mathrm{T} - \mu)(\mathrm{T} - \lambda)$ est bijective de $\mathrm{dom}(\mathrm{T}^2)$ sur H.

Proposition 11.4.3. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur autoadjoint sur* H *; alors* $\mathrm{R}_i(\mathrm{T}) = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H})^{-1}$ *est un opérateur borné normal, et son adjoint est égal à* $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$.

Démonstration. D'après le théorème 1, les opérateurs $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$ et $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ existent et sont bornés. D'après la proposition précédente il suffit de savoir que $\mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})$ est l'adjoint de $\mathrm{R}_i(\mathrm{T})$. Soient y, v deux vecteurs quelconques dans H et posons $x = \mathrm{R}_i(\mathrm{T})(y)$ et $u = \mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})(v)$. On a

$$\langle \mathrm{R}_i(\mathrm{T})(y), v\rangle = \langle x, (\mathrm{T}+i)(u)\rangle = \langle \mathrm{T}x - ix, u\rangle = \langle y, \mathrm{R}_{-i}(\mathrm{T})(v)\rangle.$$

On utilisera le théorème suivant, qui sera démontré en partie à la rentrée. C'est le théorème de représentation des opérateurs normaux.

Théorème. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe séparable et* S *un opérateur borné et normal de* H *dans* H *; il existe un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *σ-fini, une fonction* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable bornée et un opérateur unitaire* $\mathrm{U} : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *tels que* $\mathrm{T} = \mathrm{U}^* \, \mathrm{M}_g \, \mathrm{U}$.

Théorème 11.4.4. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe séparable et* T *un opérateur autoadjoint sur* H *; il existe un espace mesuré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *σ-fini, une fonction* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable* réelle *et un opérateur unitaire* $\mathrm{U} : \mathrm{H} \to \mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *tels que* $\mathrm{T} = \mathrm{U}^* \, \mathrm{M}_\varphi \, \mathrm{U}$.

On donne à l'opérateur M_φ son domaine naturel (vu dans un exemple, $\mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi) = \{f \in \mathrm{L}_2 : \varphi f \in \mathrm{L}_2\}$) ; la relation ci-dessus sous-entend que U et son inverse U^* échangent les domaines de T et de M_φ, c'est à dire qu'on a l'égalité $\mathrm{U}^*(\mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ (et inversement, $\mathrm{U}(\mathrm{dom}(\mathrm{T})) = \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi)$).

Esquisse de démonstration. On va se servir de l'opérateur normal $\mathrm{S} = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H})^{-1}$ et de sa représentation indiquée ci-dessus. Il existe un espace mesuré σ-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, un unitaire U de H sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, une fonction bornée $g \in \mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tels que

$$\mathrm{S} = \mathrm{U}^* \, \mathrm{M}_g \, \mathrm{U},$$

où M_g désigne l'opérateur borné sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ défini par la multiplication par g,

$$\forall f \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \mathrm{M}_g(f) = gf.$$

Comme M_g représente l'inverse de $\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H}$, il n'est pas bien difficile de voir que la multiplication par la fonction non bornée $1/g$ va représenter $\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id_H}$, donc la multiplication par $\varphi = i + 1/g$ représentera T.

Exemple 11.4.3. Représentation de l'opérateur autoadjoint $f \to if'$ au moyen de la transformation de Fourier dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Soit $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ et définissons T sur H par $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{T}f = -if'$ pour toute $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$; on a vérifié que T est autoadjoint. Sa représentation par une multiplication est obtenue au moyen de la transformation de Fourier sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. On va obtenir ainsi que T est conjugué à l'opérateur M de multiplication par $t \to t$ sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Si on pose pour $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixt} f(x)\, dx$$

on obtient par une intégration par parties facile que pour f à support compact de classe C^1, on a $\mathcal{F}(-if')(t) = t\,\mathcal{F}(f)(t)$. Par ailleurs on sait montrer que $\mathrm{U} = (2\pi)^{-1/2}\,\mathcal{F}$ se prolonge en opérateur unitaire de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, et on a alors la représentation

$$\mathrm{T} = \mathrm{U}^* \circ \mathrm{M} \circ \mathrm{U}.$$

Cours n° 25, mercredi 19 décembre 2001.

Représentation des autoadjoints : détail de la preuve

On suppose que T est un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert H complexe et séparable. On commence par représenter l'opérateur normal borné $\mathrm{S} = \mathrm{R}_i(\mathrm{T})$ sous la forme

$$\mathrm{S} = \mathrm{U}^* \, \mathrm{M}_g \, \mathrm{U}$$

où U est un opérateur unitaire de H sur $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, avec μ mesure positive σ-finie, g une (classe de) fonction mesurable bornée sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs complexes.

On remarque que g est non nulle presque partout : en effet, S est injectif comme inverse de la bijection $\mathrm{T} - i \, \mathrm{Id}_\mathrm{H}$ de dom(T) sur H, et $\mathrm{M}_g = \mathrm{U} \, \mathrm{S} \, \mathrm{U}^*$ est donc injectif aussi. Choisissons un représentant $\widetilde{g}$ de g, qui soit une vraie fonction mesurable bornée, et posons

$$\mathrm{A} = \{\omega \in \Omega : \widetilde{g}(\omega) \neq 0\} \in \mathcal{A}.$$

Si on avait $\mu(\mathrm{A}) > 0$, on pourrait trouver, parce que μ est σ-finie, un ensemble $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}) < +\infty$ (si $\mu(\mathrm{A}) < +\infty$, on prend simplement $\mathrm{B} = \mathrm{A}$) ; alors $f = \mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f \neq 0_{\mathrm{L}_2}$ et $\mathrm{M}_g(f) = 0_{\mathrm{L}_2}$, ce qui est impossible parce que M_g est injective.

On supposera maintenant que $\widetilde{g} \neq 0$ partout. On sait que $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{S}(\mathrm{H})$, et $x = \mathrm{S}(y)$ pour un $y \in \mathrm{H}$ si et seulement si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{T}(x) - ix = y$. On a $x = \mathrm{U}^*(\mathrm{M}_g(\mathrm{U}y))$ ce qui montre que tout $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$ est dans l'image par U^* de

$$\mathrm{D}_1 = \{gf : f \in \mathrm{L}_2\} = \{f_1 \in \mathrm{L}_2 : f_1/\widetilde{g} \in \mathrm{L}_2\}.$$

Inversement si $f_1 \in \mathrm{D}_1$, on pose $f = f_1/g \in \mathrm{L}_2$, $y = \mathrm{U}^*(f)$ et on voit que $\mathrm{U}^*(f_1) = \mathrm{S}(y) \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$, donc $\mathrm{dom}(\mathrm{T}) = \mathrm{U}^*(\mathrm{D}_1)$, ou bien $\mathrm{D}_1 = \mathrm{U}(\mathrm{dom}(\mathrm{T}))$. Posons $\varphi(\omega) = i + 1/\widetilde{g}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. On voit que

$$\mathrm{D}_1 = \{f_1 \in \mathrm{L}_2 : \varphi f_1 \in \mathrm{L}_2\} = \mathrm{dom}(\mathrm{M}_\varphi).$$

Pour finir calculons $\mathrm{T}(x)$ pour $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. Posons $f_1 = \mathrm{U}(x) \in \mathrm{D}_1$, $f = f_1/g \in \mathrm{L}_2$ puis $y = \mathrm{U}^*(f)$. Alors $\mathrm{S}(y) = \mathrm{U}^*\mathrm{M}_g\mathrm{U}(y) = \mathrm{U}^*(gf) = \mathrm{U}^*(f_1) = x$ donc

$$\mathrm{T}(x) = y + ix = \mathrm{U}^*(f_1/g + if_1) = \mathrm{U}^*(\mathrm{M}_\varphi(\mathrm{U}(x))).$$

Il reste à voir que φ est réelle μ-presque partout. L'argument qui suit n'a pas été donné à l'amphi. Si $f_1 \in \mathrm{D}_1$ est comme ci-dessus,

$$\langle \mathrm{M}_\varphi(f_1), f_1 \rangle = \langle \mathrm{U}(\mathrm{T}(x)), \mathrm{U}(x) \rangle = \langle \mathrm{T}(x), x \rangle$$

est réel. Si $\{\omega : \mathrm{Im}\, \varphi(\omega) \neq 0\}$ était un ensemble de mesure > 0, on aurait par exemple $\mu\big(\{\omega : \mathrm{Im}\, \varphi(\omega) > 0\}\big) > 0$, d'où résulterait l'existence de $\varepsilon > 0$ et de $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ tels que

$$\mathrm{B} \subset \{\omega \in \Omega : \varepsilon \leq \mathrm{Im}\, \varphi(\omega), \ |\varphi(\omega)| \leq 1/\varepsilon\}$$

et $0 < \mu(\mathrm{B}) < +\infty$. Alors $f_1 = \mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathrm{D}_1$, mais $\langle \mathrm{M}_\varphi(f_1), f_1 \rangle$ ne sera pas réel,

$$\mathrm{Im}\, \langle \mathrm{M}_\varphi(f_1), f_1 \rangle = \int_\mathrm{B} \mathrm{Im}\, \varphi \, d\mu \geq \varepsilon \, \mu(\mathrm{B}) > 0.$$

Cette contradiction montre que φ doit être réelle μ-presque partout.

11.5. Le théorème de Stone

Soit H un espace de Hilbert ; on appelle *groupe à un paramètre d'unitaires* une famille $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments unitaires de $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ telle que :

(*i*) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ on a $v_{s+t} = v_s v_t$;

(*ii*) pour tout $x \in \mathrm{H}$ l'application $t \to v_t(x)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans H.

Pour que la condition (*ii*) soit vraie il suffit que $x = \lim_{t\to 0} v_t(x)$ pour tout $x \in \mathrm{H}$; en prenant l'image par v_s, en utilisant la continuité et la propriété (*i*) on aura ensuite

$$v_s(x) = \lim_{t\to 0} v_{s+t}(x)$$

pour tout $x \in \mathrm{H}$, tout $s \in \mathbb{R}$.

Il résulte de (*i*) que $v_0 = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$, et ensuite que $v_{-t} = v_t^*$ est l'inverse de v_t. On a donc bien un groupe G pour la multiplication des opérateurs, isomorphe à $\mathbb{R}$, contenu dans le groupe des unitaires sur H, groupe G dont les éléments sont les v_t, $t \in \mathbb{R}$.

Comment fabriquer des unitaires sur un Hilbert

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ considérons la fonction f_s définie sur $\mathbb{R}$ par $f_s(\alpha) = \mathrm{e}^{is\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Si A est hermitien borné, on peut considérer pour tout s l'opérateur $\mathrm{U}_s = f_s(\mathrm{A}) = \mathrm{e}^{is\mathrm{A}}$. C'est un opérateur unitaire puisque f_s est à valeurs dans $\mathbb{T}$. De plus $f_{s_1} f_{s_2} = f_{s_1+s_2}$ pour tous s_1, s_2, donc $\mathrm{U}_{s_1}\mathrm{U}_{s_2} = \mathrm{U}_{s_1+s_2}$.

Ici on a une propriété plus forte que (*ii*), à savoir $\|\, \mathrm{e}^{is\mathrm{A}} - \mathrm{Id}_\mathrm{H} \,\| \le |s|\, \|\mathrm{A}\|$ pour tout réel s. En effet, $\mathrm{K} = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset [-\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{A}\|]$ et puisque $|\, \mathrm{e}^{is\alpha} - 1| \le |s\alpha|$ on a

$$\|\, \mathrm{e}^{is\mathrm{A}} - \mathrm{Id}_\mathrm{H} \,\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} = \|f_s - 1\|_{\mathrm{C}(\mathrm{K})} \le |s|\, \|\mathrm{A}\|.$$

Sur le compact K, la fonction exponentielle f_s est limite uniforme des sommes partielles $\sum_{k=0}^n (is\alpha)^n/(n!)$; il en résulte par les propriétés du calcul fonctionnel que

$$\mathrm{e}^{is\mathrm{A}} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(is)^k \mathrm{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(is)^k \mathrm{A}^k}{k!}.$$

Le groupe des translations sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$

Pour $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ et t réel on définit la fonction translatée $\tau_t f$ par

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\tau_t f)(\alpha) = f(\alpha - t).$$

Il est clair que τ_t est une isométrie linéaire de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ sur lui-même, dont l'inverse est τ_{-t}.

Lemme. *Pour toute fonction* $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ *on a* $\lim_{t\to 0} \|\tau_t f - f\|_2 = 0$. *La famille* $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est donc un groupe à un paramètre d'unitaires sur* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration. On commence par le montrer pour une fonction g continue à support compact, ensuite on utilise la densité de $\mathrm{C}_{\mathrm{comp}}$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, et l'équicontinuité de la famille (τ_t).

Si g est continue à support compact, à support dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$, avec $\mathrm{M} > 0$, et si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe par l'uniforme continuité de g un $\delta > 0$ tel que $|g(\alpha) - g(\beta)| < \varepsilon/\sqrt{4\mathrm{M}}$ lorsque $|\alpha - \beta| < \delta$; on peut supposer $\delta < \mathrm{M}$. Si $|t| < \delta$, la fonction $\tau_t g$ est à support dans $[-2\mathrm{M}, 2\mathrm{M}]$ et

$$\|\tau_t g - g\|_2^2 = \int_{-2\mathrm{M}}^{2\mathrm{M}} |g(\alpha - t) - g(\alpha)|^2 \, d\alpha \le 4\mathrm{M}\, (\varepsilon^2/4\mathrm{M}) = \varepsilon^2.$$

Si $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ et si $\varepsilon > 0$ est donné, on trouve $g \in \mathrm{C}_{\mathrm{comp}}$ tel que $\|f - g\|_2 < \varepsilon/3$; d'après l'étape préliminaire, il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta$ implique $\|\tau_t g - g\|_2 < \varepsilon/3$. Pour finir, on a lorsque $|t| \le \delta$

$$\|\tau_t f - f\|_2 \le \|\tau_t f - \tau_t g\|_2 + \|\tau_t g - g\|_2 + \|g - f\|_2 < \varepsilon.$$

Intégrale de fonctions vectorielles

On va procéder à une introduction rapide mais artificielle de la notion. On suppose que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Hilbert H, mesurable dans le sens suivant : pour tout vecteur $x \in \mathrm{H}$, la fonction scalaire $t \in \mathbb{R} \to \langle f(t), x\rangle$ est mesurable.

Supposons de plus que $\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathrm{H}}\, dt < +\infty$. On définit alors une forme linéaire ℓ sur H par

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), x\rangle\, dt$$

et on voit que ℓ est continue,

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad |\ell(x)| \le \Bigl(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|\, dt\Bigr)\, \|x\|.$$

Il existe donc un vecteur y de H qui représente cette forme linéaire ; on l'appellera l'intégrale de la fonction vectorielle f, et on la notera $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = y \in \mathrm{H}$. On a pour cette intégrale la propriété caractéristique suivante

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \int_{\mathbb{R}} \langle f(t), x\rangle\, dt = \langle \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt, x\rangle$$

et de plus

$$\Bigl\|\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\Bigr\|_{\mathrm{H}} \le \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathrm{H}}\, dt.$$

Exercice évident. Si f est étagée vectorielle, $f(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}(t) v_i$, avec $\mathrm{A}_i \subset \mathbb{R}$ mesurable de mesure finie, $v_i \in \mathrm{H}$, alors $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \lambda(\mathrm{A}_i) v_i \in \mathrm{H}$ (où $\lambda(\mathrm{A}_i)$ désigne la mesure de Lebesgue de A_i).

On aura besoin du résultat suivant :

si $t \to f(t) \in \mathrm{H}$ *est continue, la fonction vectorielle* F *définie par* $\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ *est dérivable, avec* $\mathrm{F}'(t) = f(t)$.

On écrit si $h > 0$

$$\Bigl\|\frac{\mathrm{F}(t+h) - \mathrm{F}(t)}{h} - f(t)\Bigr\| \le |h|^{-1} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|_{\mathrm{H}}\, ds$$

qui tend vers 0 quand h tend vers 0, parce que f est continue au point t.

Théorème 11.5.2 : théorème de Stone. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe et séparable ;*

(i) *soit* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'opérateurs d'unitaires. L'ensemble*

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{H} : \lim_{t\to 0} \frac{v_t(x) - x}{t} \quad \textit{existe dans} \ \ \mathrm{H}\}$$

est un sous-espace vectoriel de H*, dense dans* H*. Si on pose*

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad i\,\mathrm{T}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{v_t(x) - x}{t} \in \mathrm{H}$$

l'opérateur T *de domaine* D *est autoadjoint sur* H*. Pour* $x \in \mathrm{dom(T)}$ *et* t *réel, on a* $v_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$ *et* $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$*.*

(ii) *pour tout opérateur autoadjoint* T_1 *sur* H*, il existe un groupe d'unitaires* (v_t) *pour lequel l'autoadjoint associé* T *est égal à* T_1*.*

Démonstration. Montrons que le domaine D de T est dense. Soient $y \in \mathrm{H}$ et $a > 0$. On pose $x_a = a^{-1} \int_0^a v_s(y)\, ds$. On remarque que $x_a \to y$ lorsque $a \to 0$. On va montrer que $x_a \in \mathrm{D}$, et il en résultera que D est dense. On a

$$a v_t(x_a) = \int_0^a v_t v_s(y)\, ds = \int_t^{a+t} v_s(x)\, ds.$$

Donc

$$a(v_t(x_a) - x_a)/t = t^{-1} \int_a^{a+t} v_s(y)\, ds - t^{-1} \int_0^t v_s(y)\, ds.$$

Quand t tend vers 0, $(v_t(x_a) - x_a)/t$ tend donc vers $(v_a(y) - y)/a$. On en déduit que $x_a \in \mathrm{dom(T)}$. Donc $\mathrm{dom(T)} = \mathrm{D}$ est dense.

Si $x \in \mathrm{dom(T)}$, on applique v_s à la limite qui définit l'appartenance de x à D, et on obtient avec la propriété de groupe que

$$\lim_{t\to 0} \frac{v_t(v_s(x)) - v_s(x)}{t}$$

existe, et vaut $v_s(i\mathrm{T}(x))$. On en déduit que $v_s(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$ et $i\mathrm{T}(v_s(x)) = v_s(i\mathrm{T}(x))$.

Soient $x, y \in \mathrm{dom(T)}$; on a

$$\langle i\mathrm{T}(x), y\rangle = \lim_{t\to 0} \langle (v_t(x) - x)/t, y\rangle = \lim_{t\to 0} \langle x, (v_{-t}(y) - y)/t\rangle = -\langle x, i\mathrm{T}(y)\rangle$$

ce qui montre déjà que T est symétrique. Il reste à voir que $\mathrm{dom(T^*)} \subset \mathrm{dom(T)}$; on y reviendra en 2002.

Survolons le deuxième point. Si T_1 est autoadjoint sur H, on peut le représenter sur un espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ par une multiplication par une fonction réelle φ. On introduit alors sur L_2 les opérateurs unitaires $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de multiplication par la fonction $\mathrm{e}^{it\varphi}$ qui est de module 1 sur Ω, puis on ramène ces opérateurs unitaires de L_2 à H pour obtenir les unitaires $v_t = \mathrm{U}^*\, w_t\, \mathrm{U}$ sur H.

MT404, Cours n$^{\text{o}}$ 26, lundi 7 janvier 2002.

Rappel : théorème de Stone. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe et séparable ; soit* $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre d'opérateurs d'unitaires. L'ensemble*

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathrm{H} : \lim_{t\to 0} \frac{v_t(x) - x}{t} \ \ \textit{existe dans}\ \ \mathrm{H}\}$$

est un sous-espace vectoriel de H, *dense dans* H. *Si on pose*

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad i\,\mathrm{T}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{v_t(x) - x}{t} \in \mathrm{H}$$

l'opérateur T *de domaine* D *est autoadjoint sur* H. *Pour* $x \in \mathrm{dom(T)}$ *et* t *réel, on a* $v_t(x) \in \mathrm{dom(T)}$ *et* $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$.

On a vu en 2001 que $\mathrm{T}(v_t(x)) = v_t(\mathrm{T}(x))$ pour $x \in \mathrm{dom(T)}$, et que T est symétrique. Il reste à voir que $\mathrm{dom(T^*)} \subset \mathrm{dom(T)}$. Supposons que $y \in \mathrm{dom(T^*)}$. La forme linéaire $x \in \mathrm{dom(T)} \to \langle \mathrm{T}(x), y\rangle$ est alors continue, donc représentable par un vecteur $z = \mathrm{T}^*(y)$,

$$(*) \qquad \forall x \in \mathrm{D}, \quad \langle \mathrm{T}(x), y\rangle = \langle x, z\rangle.$$

Il s'agit de voir que $y \in \mathrm{dom(T)}$, c'est à dire que la fonction vectorielle $t \to v_t(y) \in \mathrm{H}$ est dérivable. On sait que pour tout $x \in \mathrm{D}$

$$\langle x, \frac{v_{t+h}(y) - v_t(y)}{h}\rangle = \langle \frac{v_{-t-h}(x) - v_{-t}(x)}{h}, y\rangle = -\,\langle \frac{v_{-h}(v_{-t}(x)) - v_{-t}(x)}{-h}, y\rangle$$

tend quand $h \to 0$, puisque $v_{-t}(x) \in \mathrm{D}$, et d'après $(*)$, vers

$$-\,\langle i\mathrm{T}(v_{-t}(x)), y\rangle = \langle v_{-t}(x), iz\rangle = \langle x, iv_t(z)\rangle\,;$$

on fixe $x \in \mathrm{D}$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \langle x, v_t(y)\rangle\,;$$

le calcul précédent montre que $\psi'(t) = \langle x, iv_t(z)\rangle$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; considérons d'autre part pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = y + i\int_0^t v_s(z)\,ds \in \mathrm{H}.$$

Cette fonction vectorielle est dérivable, et $\varphi'(t) = iv_t(z)$; la fonction $t \to \langle x, \varphi(t)\rangle$ est elle aussi dérivable, de dérivée

$$\langle x, \varphi'(t)\rangle = \langle x, iv_t(z)\rangle = \psi'(t).$$

Comme $\psi(0) = \langle x, y\rangle = \langle x, \varphi(0)\rangle$ on en déduit que pour tout t,

$$\langle x, v_t(y)\rangle = \langle x, \varphi(t)\rangle$$

et comme x est quelconque dans D dense, on en déduit $v_t(y) = \varphi(t)$, et la fonction $t \to v_t(y)$ est donc bien dérivable. On a bien montré que $y \in \mathrm{dom(T)}$. Finalement, $\mathrm{dom(T^*)} = \mathrm{dom(T)}$ et T est autoadjoint.

Application au groupe des translations

Le groupe d'unitaires des translations $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ engendre un autoadjoint T dont le domaine est, d'après le théorème précédent

$$\mathrm{D} = \{f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t f - f}{t} \text{ existe dans } \mathrm{L}_2(\mathbb{R})\}\,;$$

si $f \in \mathrm{D}$, on définit $i\mathrm{T}(f)$ comme étant cette limite. Si $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$, on voit que la limite existe : c'est la fonction $-f' \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$; on a donc $\mathrm{T}(f) = if'$ pour toute $f \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$.

Désignons par T_0 la restriction de T à $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$; au coefficient i près, on a déjà étudié cet opérateur au début du chapitre : on connaît la fermeture T_1 de T_0 : cet opérateur T_1 est défini sur l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$, et on a montré que T_1 est autoadjoint ; puisque $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_1) = \overline{\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_0)}$ et $\mathrm{Gr}(\mathrm{T}_0) \subset \mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ avec $\mathrm{Gr}(\mathrm{T})$ fermé (à cause d'autoadjoint), on déduit $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}$. Mais alors

Maximalité : si T_1, T *sont autoadjoints et* $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}$, *alors* $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}$.

En effet $\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}$ est une bijection de dom(T) sur H, dont la restriction à $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1)$ est $\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}$, déjà bijectif : cela n'est possible que si $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{dom}(\mathrm{T})$. En effet, s'il existait un vecteur $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}) \setminus \mathrm{dom}(\mathrm{T}_1)$, on pourrait poser $y = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x)$, et trouver ensuite $x_1 \in \mathrm{dom}(\mathrm{T}_1)$ tel que $(\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x_1) = y$, puisque $\mathrm{T}_1 - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est une bijection de $\mathrm{dom}(\mathrm{T}_1)$ sur H ; puisque T étend T_1 et que $x \neq x_1$, on aurait alors $(\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x_1) = y = (\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H})(x)$, ce qui contredit le fait que $\mathrm{T} - i\,\mathrm{Id}_\mathrm{H}$ est injectif pour tout opérateur autoadjoint T.

On déduit de tout ceci une autre description pour l'espace de Sobolev. On a

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}) = \mathrm{D} = \{f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) : \lim_{t\to 0} \frac{\tau_t f - f}{t} \text{ existe dans } \mathrm{L}_2(\mathbb{R})\}.$$

Théorème : théorème de représentation de Riesz : le dual de C(K) (espace réel). *Pour toute forme linéaire positive* ℓ *sur* C(K), *il existe une mesure* μ *positive sur* $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ *telle que*

$$\forall \varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}), \quad \ell(\varphi) = \int_\mathrm{K} \varphi(t)\, d\mu(t).$$

Lemme de Dini. *Si une suite de fonctions continues sur un compact* K *tend simplement vers* 0 *en décroissant, la convergence vers* 0 *est uniforme sur* K.

Démonstration. Soit (φ_n) une suite de fonctions continues sur K, décroissant vers 0 en tout point t de K. Pour $\varepsilon > 0$ fixé on considère les ensembles

$$\mathrm{F}_n = \{t \in \mathrm{K} : \varphi_n(t) \geq \varepsilon\}.$$

On a une suite décroissante de fermés du compact K ; s'ils sont tous non vides, on trouvera un point commun t_0 ; alors en ce point on n'aura pas convergence de la suite $(\varphi_n(t_0))$ vers 0, en contradiction avec l'hypothèse ; il doit donc exister $n_0(\varepsilon)$ tel que $\mathrm{F}_{n_0} = \emptyset$, c'est à dire que $\|\varphi_n\| \leq \|\varphi_{n_0}\| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Indiquons quelques pas de la démonstration du théorème de Riesz :

1. Si (K, d) est un espace métrique compact et ℓ une forme linéaire positive sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, alors ℓ est continue et $\|\ell\| = \ell(\mathbf{1})$.

Si $\varphi \le \psi$, alors $\psi - \varphi \ge 0$ implique $\ell(\psi) - \ell(\varphi) = \ell(\psi - \varphi) \ge 0$. Si $\|\varphi\| \le 1$, on a $-\mathbf{1} \le \varphi \le \mathbf{1}$, donc $-\ell(\mathbf{1}) \le \ell(\varphi) \le \ell(\mathbf{1})$, donc $|\ell(\varphi)| \le \ell(\mathbf{1})$. Le maximum est atteint en prenant $\varphi = \mathbf{1}$.

2. Le point de départ : la propriété de Fatou pour $\mathrm{C}(\mathrm{K})$: *si la suite* $(\varphi_n) \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ *tend en croissant vers* $\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$, *alors* $\ell(\varphi) = \lim_n \ell(\varphi_n)$.

Dans ce cas la suite $(\varphi - \varphi_n)$ tend simplement vers 0, en décroissant ; d'après le lemme de Dini, la convergence vers 0 est uniforme et $\ell(\varphi - \varphi_n) \to 0$ puisque ℓ est continue sur $\mathrm{C}(\mathrm{K})$.

3. On désigne par G l'ensemble des fonctions définies sur K, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, qui sont de la forme $g = \lim_n \varphi_n$, où (φ_n) est une suite croissante de fonctions continues sur K. On pose

$$\forall g \in \mathrm{G}, \quad \ell^*(g) = \sup\{\ell(\varphi) : \varphi \le g,\ \varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K})\}.$$

La valeur de $\ell^*(g)$ peut être $+\infty$.

L'ensemble G est l'ensemble des fonctions *semi-continues inférieurement* sur K, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3.a $\mathbf{1}_\mathrm{U} \in \mathrm{G}$ pour tout ouvert U de K.

On pose $\varphi_n(t) = \min(1, n \operatorname{dist}(t, \mathrm{U}^c))$. Cette suite (φ_n) de fonctions continues est croissante et tend simplement vers $\mathbf{1}_\mathrm{U}$.

3.b Définition de G avec $\sup\{\psi : \psi \in \mathrm{D}\}$, où $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ est dénombrable.

On suppose que $g = \sup\{\psi : \psi \in \mathrm{D}\}$. Soit $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une énumération de l'ensemble dénombrable $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$; posons $\varphi_n = \max(\psi_0, \ldots, \psi_n)$; alors (φ_n) est une suite croissante de fonctions continues et

$$\lim_n \varphi_n = \sup_k \psi_k = g.$$

4. Propriété de Fatou pour ℓ^* : si $(g_n) \subset \mathrm{G}$ tend en croissant vers g, alors $g \in \mathrm{G}$ et $\ell^*(g) = \lim_n \ell^*(g_n)$.

Pour chaque n on écrit $g_n = \sup_k \psi_{n,k}$; alors $g = \sup_n g_n = \sup_{n,k} \psi_{n,k}$ est dans G comme sup d'une famille dénombrable de fonctions continues.

La suite $\ell^*(g_n)$ est croissante, donc admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Il est évident que $\ell^*(g) \ge \lim_n \ell^*(g_n)$, parce que $g_n \le g$ pour tout n. Inversement soit $\varphi \le g$, $\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$. Posons $\varphi_n = \sup_{0 \le j,k \le n} \psi_{j,k}$; on a $\varphi_n \le g_n$, car pour $0 \le j, k \le n$ on a $\psi_{j,k} \le g_j \le g_n$. La suite (φ_n) est une suite croissante de fonctions continues et $\lim_n \varphi_n = g$.

La suite de fonctions continues $\chi_n = \min(\varphi_n, \varphi)$ tend en croissant vers $\min(g, \varphi) = \varphi$; d'après la propriété de Fatou dans $\mathrm{C}(\mathrm{K})$, on a

$$\ell(\varphi) = \lim_n \ell(\chi_n) \le \lim_n \ell(\varphi_n) \le \lim_n \ell^*(g_n).$$

En prenant le sup en $\varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$ on obtient $\ell^*(g) \le \lim_n \ell^*(g_n)$.

4.a Additivité de ℓ^*

Soient $g, h \in \mathrm{G}$; on a vu que $g+h$ est limite croissante d'une suite $\varphi_n + \psi_n$; par Fatou,

$$\ell^*(g+h) = \lim_n \ell^*(\varphi_n + \psi_n) = \lim_n \ell(\varphi_n + \psi_n) = \lim_n \ell(\varphi_n) + \lim_n \ell(\psi_n) = \ell^*(g) + \ell^*(h).$$

5. L'espace $\mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions réelles bornées f sur K qui ont la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $g, h \in \mathrm{G}$ telles que $-h \le f \le g$ et $\ell^*(g+h) < \varepsilon$.

Il résulte de l'égalité $\ell^*(g+h) = \ell^*(g) + \ell^*(h)$ que les deux expressions sont finies, et $g + h \ge 0$ implique $\ell^*(g+h) \ge 0$, c'est à dire $a = -\ell^*(h) \le \ell^*(g) = b$, et $b - a < \varepsilon$. On pose

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad \widetilde{\ell}(f) = \inf\{\ell^*(g) : f \le g,\ g \in \mathrm{G}\} = \sup\{-\ell^*(h) : -h \le f,\ h \in \mathrm{G}\}.$$

On peut alors montrer les faits suivants : $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et $\widetilde{\ell}$ une forme linéaire sur $\mathcal{E}$, positive. On a la propriété de Fatou pour $\mathcal{E}$: *si la suite $(f_n) \subset \mathcal{E}$ tend en croissant vers f bornée, alors $f \in \mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(f) = \lim_n \widetilde{\ell}(f_n)$.*

On pose

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}_\mathrm{K} : \mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathcal{E}\}.$$

Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(\mathrm{A}) = \widetilde{\ell}(\mathbf{1}_\mathrm{A})$. Alors $\mathbf{1}_\mathrm{U} \in \mathcal{E}$, donc $\mathrm{U} \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert U de K. La classe $\mathcal{A}$ est une tribu, donc $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\mathrm{K}$ et μ est une mesure positive sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$. Enfin, $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ est contenu dans $\mathcal{E}$ et $\widetilde{\ell}(f) = \int_\mathrm{K} f(t)\, d\mu(t)$ pour toute $f \in \mathcal{L}_\infty$. La mesure μ représente la forme linéaire ℓ. On trouvera les détails dans un document à venir.

Cours n° 27, mercredi 9 janvier 2002.

On désigne par $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}(\mathrm{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues sur K, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème : théorème de représentation de Riesz. *Pour toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}(\mathrm{K})$, il existe un prolongement $\widetilde{\ell}$ à $\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{K}}(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ qui vérifie la propriété suivante : si $(f_n) \subset \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}$ est bornée et tend en croissant vers f, alors*

$$\text{(F)} \qquad \widetilde{\ell}(f) = \lim_n \widetilde{\ell}(f_n).$$

Un tel prolongement vérifiant (F) *est unique. Il existe une unique mesure réelle ou complexe μ sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ qui représente la forme linéaire ℓ, c'est à dire*

$$\forall \varphi \in \mathrm{C}(\mathrm{K}), \quad \ell(\varphi) = \int_\mathrm{K} \varphi(t)\, d\mu(t).$$

Une mesure μ à valeurs réelles (resp : à valeurs complexes) sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ est une application de $\mathcal{B}_\mathrm{K}$ dans $\mathbb{R}$ (resp : $\mathbb{C}$; pas de valeur infinie ici) telle que

$\mu(\emptyset) = 0$.

$\mu(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = \mu(\mathrm{A}_1) + \mu(\mathrm{A}_2)$ quand $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}_\mathrm{K}$ sont disjoints.

$\mu(\bigcup_n \mathrm{A}_n) = \lim_n \mu(\mathrm{A}_n)$ lorsque la suite $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{B}_\mathrm{K}$ est croissante.

Une mesure complexe μ s'exprime sous la forme $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, où μ_1, μ_2 sont réelles : il suffit de considérer les parties réelles et imaginaires de $\mu(\mathrm{A}) \in \mathbb{C}$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}_\mathrm{K}$. Une meure réelle μ s'exprime sous la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2$, où μ_1, μ_2 sont deux mesures positives finies : c'est moins évident.

On va considérer que l'existence de $\widetilde{\ell}$ et de μ a été expliquée dans le cas d'une forme linéaire positive. L'existence dans le cas réel résulte du lemme suivant.

Lemme. *Toute forme linéaire sur* $\mathrm{C}^\mathbb{R}(\mathrm{K})$ *peut s'écrire sous la forme* $\ell = \ell_1 - \ell_2$, *où* ℓ_1 *et* ℓ_2 *sont deux formes linéaires positives.*

Démonstration. On se donne une forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{C}^\mathbb{R}(\mathrm{K})$. Posons pour $\varphi \geq 0$

$$m(\varphi) = \sup \{\ell(\psi) : |\psi| \leq \varphi\}.$$

Il est facile de voir que $m(\lambda\varphi) = \lambda m(\varphi)$ lorsque $\lambda > 0$. Cette fonction m est additive au sens suivant : si φ_1, φ_2 sont continues positives, alors $m(\varphi_1 + \varphi_2) = m(\varphi_1) + m(\varphi_2)$.

Si $|\psi_j| \leq \varphi_j$ on a $|\psi_1 + \psi_2| \leq \varphi_1 + \varphi_2$, donc $m(\varphi_1 + \varphi_2) \geq \ell(\psi_1) + \ell(\psi_2)$. En passant au sup en ψ_1, ψ_2 on obtient $m(\varphi_1 + \varphi_2) \geq m(\varphi_1) + m(\varphi_2)$.

Inversement si $|\psi| \leq \varphi_1 + \varphi_2$ on va montrer que $\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec $|\psi_1| \leq \varphi_1$ et $|\psi_2| \leq \varphi_2$; pour cela on va utiliser la fonction ψ_2 ainsi définie : $\psi_2(x) = \psi(x) - \varphi_1(x)$ si $\psi(x) \geq \varphi_1(x)$, $\psi_2(x) = \psi(x) + \varphi_1(x)$ si $\psi(x) \leq -\varphi_1(x)$, et $\psi_2(x) = 0$ si $|\psi(x)| \leq \varphi_1(x)$. On vérifie que ψ_2 est bien définie et continue (voir exercice ci-dessous), et de plus $|\psi_2| \leq \varphi_2$, et $\psi_1 = \psi - \psi_2$ vérifie $|\psi_1| \leq \varphi_1$. On a alors

$$\ell(\psi) = \ell(\psi_1) + \ell(\psi_2) \leq m(\varphi_1) + m(\varphi_2),$$

d'où $m(\varphi_1 + \varphi_2) \leq m(\varphi_1) + m(\varphi_2)$ en passant au sup en ψ.

Si $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ est une fonction continue réelle, on pose $m(\psi) = m(\varphi_1) - m(\varphi_2)$, qui ne dépend pas de la décomposition. On a ainsi défini une forme linéaire m positive sur $\mathrm{C}^\mathbb{K}(\mathrm{K})$, et $m - \ell$ est positive aussi. On écrit $\ell = m - (m - \ell)$.

Exercice. On suppose donnés des fermés $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_\mathrm{N}$ de l'espace métrique (X, d), et sur chaque F_j une fonction réelle continue f_j, de façon que $f_j = f_k$ sur $\mathrm{F}_j \cap \mathrm{F}_k$, pour tous $j, k = 1, \ldots, \mathrm{N}$. On peut alors définir une fonction f sur $\bigcup_{j=1}^\mathrm{N} \mathrm{F}_j$ en posant $f(t) = f_j(t)$ si $t \in \mathrm{F}_j$. Montrer que f est continue.

Lemme. *Si* E *est un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur* K, *qui contient* $\mathrm{C}^\mathbb{R}(\mathrm{K})$ *et tel que pour toute suite croissante bornée* $(f_n) \subset \mathrm{E}$ *tendant vers* f *on ait* $f \in \mathrm{E}$, *alors* $\mathcal{L}_\infty^\mathbb{R}(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K}) \subset \mathrm{E}$.

Démonstration. Désignons par $\mathcal{M}$ la famille de tous les espaces vectoriels E de fonctions réelles bornées sur K, qui contiennent $\mathrm{C}^\mathbb{R}(\mathrm{K})$ et tels que pour toute suite croissante bornée $(f_n) \subset \mathrm{E}$ tendant vers f, on ait $f \in \mathrm{E}$.

Désignons par F l'intersection de tous les espaces $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$. Il est clair que F est un espace vectoriel de fonctions réelles bornées, contenant $\mathrm{C}^\mathbb{R}(\mathrm{K})$; de plus si une suite $(f_n) \subset \mathrm{F}$ bornée tend en croissant vers f, on aura $(f_n) \subset \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$, donc

$f \in \mathrm{E}$ par définition de $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$, et finalement $f \in \mathrm{F}$. Ceci montre que $\mathrm{F} \in \mathcal{M}$, donc F est *le plus petit* élément de $\mathcal{M}$.

On va montrer que F est stable par produit de deux fonctions : si $f_1, f_2 \in \mathrm{F}$, alors $f_1 f_2 \in \mathrm{F}$. C'est le seul point astucieux de la démonstration. Soit $\varphi \geq 0$ continue. Posons

$$\mathrm{F}_\varphi = \{f \in \mathrm{F} : f\varphi \in \mathrm{F}\}.$$

Il est clair que F_φ est un espace vectoriel, contenant $\mathrm{C}^{\mathbb{R}}(\mathrm{K})$. Si une suite $(f_n) \subset \mathrm{F}_\varphi$ bornée tend en croissant vers f, alors $(f_n\varphi)$ est bornée et tend en croissant vers $f\varphi$; puisque $\mathrm{F} \in \mathcal{M}$, il en résulte que $f\varphi \in \mathrm{F}$, donc $f \in \mathrm{F}_\varphi$. On a ainsi vérifié que $\mathrm{F}_\varphi \in \mathcal{M}$. Comme F est le plus petit élément de $\mathcal{M}$ et $\mathrm{F}_\varphi \subset \mathrm{F}$, il en résulte que $\mathrm{F}_\varphi = \mathrm{F}$, ce qui signifie que $f\varphi \in \mathrm{F}$ pour toute $f \in \mathrm{F}$. En écrivant $\psi = \psi_+ - \psi_-$ pour toute fonction continue ψ, on voit que $f\psi \in \mathrm{E}$ pour tous $f \in \mathrm{F}$, $\psi \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$.

Fixons maintenant $g \in \mathrm{F}$; soit M une constante telle que $g \leq \mathrm{M}$. Posons

$$\mathrm{F}_g = \{f \in \mathrm{F} : fg \in \mathrm{F}\} = \{f \in \mathrm{F} : f(\mathrm{M} - g) \in \mathrm{F}\}.$$

Le pas précédent montre que $\mathrm{C}^{\mathbb{R}}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{F}_g$. La même preuve conduit ensuite à $\mathrm{F}_g = \mathrm{F}$, ce qui signifie que $fg \in \mathrm{F}$ pour tous $f, g \in \mathrm{F}$.

Une fois ce point établi, on pose

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}_{\mathrm{K}} : \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \in \mathrm{F}\}.$$

On montre facilement que $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de K (utiliser $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$ pour la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie) ; par ailleurs on a vu que $\mathbf{1}_{\mathrm{U}} = \lim \varphi_n$ pour tout ouvert U de K, ce qui implique que $\mathbf{1}_{\mathrm{U}} \in \mathrm{F}$, donc $\mathrm{U} \in \mathcal{A}$. La tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathrm{K}}$ contenant tous les ouverts est égale à $\mathcal{B}_{\mathrm{K}}$.

Puisque F est un espace vectoriel il contient toutes les fonctions étagées de la forme $e = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, $\mathrm{A}_i \in \mathcal{B}_{\mathrm{K}}$. Pour finir, toute fonction $f \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}$ est limite croissante d'une suite (e_n) de fonctions étagées, donc $f \in \mathrm{F}$. On a ainsi montré que $\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}} \subset \mathrm{F}$.

Application. Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes $\mathbb{K}$-linéaires sur $\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{K}}(\mathrm{K}, \mathcal{B}_{\mathrm{K}})$, qui coïncident sur $\mathrm{C}^{\mathbb{K}}(\mathrm{K})$ et ont la propriété de Fatou, alors $\ell_1 = \ell_2$.

On pose

$$\mathrm{E} = \{f \in \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}} : \ell_1(f) = \ell_2(f)\}.$$

Il est clair que E est un espace vectoriel de fonctions réelles, et $\mathrm{C}^{\mathbb{R}}(\mathrm{K}) \subset \mathrm{E}$ par hypothèse. Il est facile de voir que $\mathrm{E} \in \mathcal{M}$, donc $\mathrm{E} = \mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}$, ce qui donne le résultat, directement dans le cas réel, après décomposition $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ dans le cas complexe.

10. Décomposition spectrale des opérateurs normaux

Je vais dire quelques mots sur le calcul fonctionnel borélien, d'une façon qui essaiera de convaincre que c'est une extension naturelle du théorème de prolongement de Riesz : au lieu d'étendre à $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_{\mathrm{K}})$ une application $\mathrm{C}(\mathrm{K}) \to \mathbb{C}$, on va étendre l'homomorphisme du calcul fonctionnel continu, $\varphi_{\mathrm{S}} : \mathrm{C}(\mathrm{Sp}(\mathrm{S})) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ pour un opérateur borné normal $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$.

Théorème. *Soient* H *un espace de Hilbert complexe et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal ; notons* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp(S)}$ *et* $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ *l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées sur* K. *Il existe un prolongement de l'homomorphisme du calcul fonctionnel continu* $\varphi_\mathrm{S} : \mathrm{C(K)} \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *en un homomorphisme d'algèbres unitaires* $\Phi : \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K}) \to \mathcal{L}(\mathrm{H})$, *tel que pour toute suite bornée* (g_n) *dans* $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ *convergeant en croissant vers* $g \in \mathcal{L}_\infty(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K})$ *on ait*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \|\Phi(g_n)(x) - \Phi(g)(x)\|_\mathrm{H} \to 0.$$

Un tel prolongement est unique.

Soient H un espace de Hilbert, $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ normal et f une fonction borélienne sur Sp(S) ; l'élément $\Phi(f)$ défini dans le théorème se note encore $f(\mathrm{S})$.

Il est facile d'imaginer que la démonstration de l'unicité est essentiellement la même que celle qui a été donnée pour le théorème de Riesz. L'existence peut être montrée avec la famille de mesures (complexes) associée par le théorème de Riesz aux formes linéaires

$$\forall f \in \mathrm{C(K)}, \quad \ell_{x,y}(f) = \langle f(\mathrm{S})x, y\rangle$$

où x, y varient dans H. Voir aussi le poly, fin du chapitre 10, pour une approche à partir du théorème de représentation établi plus loin.

Exemple. Soit T un opérateur normal sur un espace de Hilbert complexe ; si $f = \mathbf{1}_\mathrm{A}$ est l'indicatrice d'un borélien de $\mathbb{C}$ (resp : de $\mathbb{R}$) contenu dans le spectre de T, et si $\mathrm{P} = f(\mathrm{T})$, on aura $\mathrm{P}^* = \mathrm{P}$ parce que f est réelle, et $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ parce que $f^2 = f$. L'opérateur P est donc un projecteur orthogonal. On dit que P est un *projecteur spectral*.

Définition. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et $\mathrm{T}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$, $\mathrm{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_2)$; on dit que T_1 et T_2 sont *unitairement équivalents* s'il existe un opérateur unitaire $\mathrm{U} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ tel que $\mathrm{T}_1 = \mathrm{U}^* \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}$.

On va voir que tout opérateur normal est unitairement équivalent à un modèle canonique : la multiplication par une fonction mesurable bornée sur un espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, pour lequel on a dit que le calcul fonctionnel était simple.

10.3. Théorème de représentation des opérateurs normaux bornés

Soient H un espace de Hilbert complexe et S un opérateur normal sur H ; étant donné un vecteur non nul x, on va s'intéresser au plus petit sous-espace vectoriel fermé F_x de H contenant x et qui soit stable par S et par S^*. Il est clair que ce sous-espace F_x doit contenir tous les vecteurs de la forme $\mathrm{S}^k(\mathrm{S}^*)^\ell(x)$, avec $k, \ell \ge 0$. Inversement, le sous-espace fermé engendré par tous ces vecteurs est stable par S et S^* (grâce à la commutation $\mathrm{SS}^* = \mathrm{S}^*\mathrm{S}$). L'espace F_x est donc égal à l'adhérence du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{\mathrm{S}^k(\mathrm{S}^*)^\ell(x) : k, \ell \ge 0\}$. Il est stable par tout opérateur de la forme $f(\mathrm{S})$ obtenu par calcul fonctionnel continu.

Convenons de dire (entre nous) que S est *monogène* s'il existe un vecteur $x_0 \in \mathrm{H}$ tel que $\mathrm{H} = \mathrm{F}_{x_0}$. Dans ce cas particulier, le théorème de représentation prend une forme bien sympathique.

Proposition 10.3.1. *Soient* H *un espace de Hilbert,* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal* monogène *et* $\mathrm{K} = \mathrm{Sp(S)}$ *; il existe une probabilité* μ *sur* K *telle que* S *soit unitairement équivalent à l'opérateur* $\mathrm{M}_{i_\mathrm{K}} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mathcal{B}_\mathrm{K}, \mu))$ *de multiplication par la fonction* i_K*.*

Démonstration. Soit x_0 un vecteur tel que $\mathrm{F}_{x_0} = \mathrm{H}$; on peut choisir $\|x_0\| = 1$ si on veut. Considérons la forme linéaire $\ell : f \to \langle f(\mathrm{S})(x_0), x_0\rangle$ sur C(K) ; si $f \in \mathrm{C(K)}$ est réelle positive, on sait par le calcul fonctionnel (corollaire 9.4.2) que $f(\mathrm{S})$ est hermitien positif, donc $\langle f(\mathrm{S})(x_0), x_0\rangle \geq 0$. On voit ainsi que ℓ est une forme linéaire positive sur C(K) ; donc il existe une unique mesure positive μ sur K telle que, pour toute fonction $f \in \mathrm{C(K)}$, on ait $\ell(f) = \int_\mathrm{K} f(t)\, d\mu(t)$; on a $\mu(\mathrm{K}) = \int 1\, d\mu = \langle 1(\mathrm{S})(x_0), x_0\rangle = \|x_0\|^2 = 1$, donc μ est une probabilité. Si y est un vecteur de F_{x_0} de la forme $y = f(\mathrm{S})(x_0)$, avec $f \in \mathrm{C(K)}$, on a

$$\|y\|^2 = \langle f(\mathrm{S})(x_0), f(\mathrm{S})(x_0)\rangle = \langle \overline{f}(\mathrm{S}) f(\mathrm{S})(x_0), x_0\rangle = \int_\mathrm{K} |f(t)|^2\, d\mu(t)\,;$$

la relation précédente montre que y ne dépend que de la classe $\widehat{f}$ de f dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$, et que l'application $u : \widehat{f} \to f(\mathrm{S})(x_0)$, définie sur l'image Y de C(K) dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$, est isométrique, de Y muni de la norme de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ vers la norme de H ; par ailleurs, le sous-espace Y est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ par un résultat général d'intégration. On peut donc prolonger u en une isométrie U de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ dans H. Pour tous $k, \ell \geq 0$, le vecteur $y = \mathrm{S}^k(\mathrm{S}^*)^\ell(x_0)$ est dans l'image de u, puisqu'il provient de la fonction continue $i_\mathrm{K}^k(\overline{i_\mathrm{K}})^\ell$; l'image de U est donc dense puisque S est monogène, et U est unitaire de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ dans H. Si $y = u(f)$ avec f continue, on a $y = f(\mathrm{S})(x_0)$, donc

$$\mathrm{S}(u(f)) = \mathrm{S} f(\mathrm{S})(x_0) = (i_\mathrm{K} f)(\mathrm{S})(x_0) = u(\mathrm{M}_{i_\mathrm{K}}(f)).$$

Cette relation $\mathrm{S} \circ u = u \circ \mathrm{M}_{i_\mathrm{K}}$, vraie sur le sous-espace dense Y de $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$, se prolonge à $\mathrm{L}_2(\mathrm{K}, \mu)$ tout entier et dit que S et la multiplication par i_K sont conjugués par l'opérateur unitaire U, donc unitairement équivalents.

Si on donne un opérateur normal $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ et un vecteur $x \in \mathrm{H}$ non nul, on peut considérer la restriction S_x de S au sous-espace F_x ; puisque F_x est aussi stable par S^*, on voit facilement que $\mathrm{S}_x^* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}_x)$ est la restriction de S^* à F_x, et que S_x est normal. De plus, S_x est évidemment monogène, en tant qu'opérateur de l'espace de Hilbert F_x. Le résultat général qui suit consiste simplement à décomposer H en somme directe orthogonale de tels morceaux, et à exprimer le recollement des morceaux obtenus par le théorème précédent.

Théorème 10.3.3. *Soient* H *un espace de Hilbert séparable et* $\mathrm{S} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *un opérateur normal ; il existe un espace mesuré* $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$*, une fonction* $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ *et un isomorphisme unitaire* $\mathrm{U} : \mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu) \to \mathrm{H}$ *tels que* $\mathrm{S} = \mathrm{U}\, \mathrm{M}_f\, \mathrm{U}^*$.